

Fractions

I Nombres rationnels

1- Définition

Définition :

Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est appelé **nombre rationnel**.

Exemple : $-\frac{5}{17}$ est un nombre rationnel. 5,6 est aussi un nombre rationnel puisque $5,6 = \frac{56}{10}$

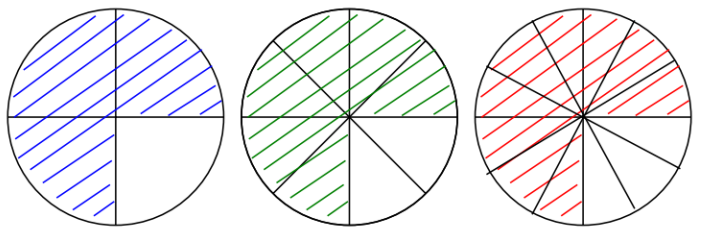
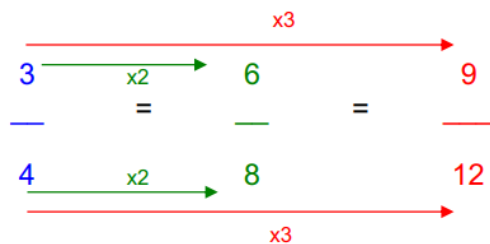
2- Egalité de fractions

Propriété :

Une fraction ne change pas si on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre.

Exemple : Les parties bleue, verte et rouge représentent la même surface.

Les fractions sont donc égales : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$



Remarque : On peut également diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre pour obtenir une fraction égale. Cela permet de simplifier une fraction.

Propriété :

Soit a, b, c et d quatre nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

- Réciproquement, si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple : $3 \times 10 = 30$ et $5 \times 6 = 30$ donc $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

Application : Exercices 1 et 2

II Mettre au même dénominateur

Pour comparer des fractions entre elles, il faut d'abord qu'elles aient le même dénominateur pour ensuite comparer leurs numérateurs.

Méthode : Mettre au même dénominateur des fractions

1/ $\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{18}$ On **multiplie** par 3 le numérateur et le dénominateur de la 1^{ère} fraction : $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$

On peut maintenant comparer les numérateurs des deux fractions : $\frac{15}{18} > \frac{5}{18}$

2/ $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{35}$ On **divise** par 5 le numérateur et le dénominateur de la 2^{ème} fraction : $\frac{5}{35} = \frac{5 \div 5}{35 \div 5} = \frac{1}{7}$

On peut maintenant comparer les numérateurs des deux fractions : $\frac{4}{7} > \frac{1}{7}$

Application : Exercice 3

III Additions et soustractions de fractions

On ne peut pas additionner ou soustraire des fractions qui n'ont pas le même dénominateur.

Méthode :

1^{ère} étape : Il faut donc d'abord les mettre au même dénominateur.

<u>Addition</u> :	<u>Soustraction</u> :
$\begin{array}{r} \frac{4}{5} + \frac{9}{25} = \\ \frac{4 \times 5}{5 \times 5} + \frac{9}{25} = \\ \frac{20}{25} + \frac{9}{25} = \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{5}{3} - \frac{8}{9} = \\ \frac{5 \times 3}{3 \times 3} - \frac{8}{9} = \\ \frac{15}{9} - \frac{8}{9} = \end{array}$

2^{ème} étape : On peut additionner ou soustraire les numérateurs entre eux et on garde le même dénominateur.

<u>Addition</u> :	<u>Soustraction</u> :
$\frac{20}{25} + \frac{9}{25} = \frac{29}{25}$	$\frac{15}{9} - \frac{8}{9} = \frac{7}{9}$

Application : Exercice 4

IV Simplifier une fraction à l'aide des nombres premiers

Définition :

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 47 ; 53...

Remarque : La liste des nombres premiers est infinie.

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique et permet de simplifier les fractions

Exemple : Soit la fraction $\frac{60}{126}$

Pour rendre cette fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

La décomposition de 60 en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

La décomposition de 126 en produits de facteurs premiers est : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a donc : $\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

1 est le seul diviseur commun de 10 et 21

Donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$

Application : Exercice 5

V Multiplication de fractions

Propriété :

Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple : $\frac{2}{3} \times \frac{-4}{5} = \frac{2 \times (-4)}{3 \times 5} = \frac{-8}{15}$

Remarque : Dans un énoncé, le mot « de » (ou « d' ») est une indication pour utiliser la multiplication.

Si on demande $\frac{3}{5}$ de $\frac{7}{4}$ alors il faut faire $\frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$

Application : Exercice 6

VI Division de fractions

1- Inverse

Définition :

Deux nombres non nuls sont dits **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Exemple : $2 \times 0,5 = 1$ donc 2 est l'inverse de 0,5

Propriétés :

Soit a et b deux nombres relatifs non nuls :

- L'inverse du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$
- L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$

Exemple : L'inverse de $\frac{2}{-7}$ est le nombre $\frac{-7}{2}$

Remarque :

- 1 est son propre inverse.
- -1 est son propre inverse
- 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.

2- Division de nombres rationnels

Propriété :

Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Autrement dit, si a, b, c , et d sont quatre nombres relatifs avec $b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$ alors :

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple : $\frac{-4}{9} \div \frac{3}{-2} = \frac{\frac{-4}{9}}{\frac{3}{-2}} = \frac{-4}{9} \times \frac{-2}{3} = \frac{-4 \times (-2)}{9 \times 3} = \frac{8}{27}$

Application : Exercice 7

Fractions (Exercices)

Exercice 1

Dans la liste ci-dessous, il y a 4 groupes de 5 fractions égales. Retrouver les.

$\frac{4}{3}$	$\frac{40}{60}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{40}{30}$	$\frac{45}{60}$
$\frac{6}{9}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{30}{40}$	$\frac{26}{39}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{35}{42}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{50}{60}$	$\frac{20}{15}$

Exercice 2

Simplifier les fractions suivantes

$$1/ \frac{12}{28} \quad 2/ \frac{45}{35} \quad 3/ \frac{63}{81} \quad 4/ \frac{110}{132} \quad 5/ \frac{77}{35}$$

Exercice 3

Comparer les fractions

$$1/ \frac{3}{8} \text{ et } \frac{11}{24} \quad 2/ \frac{5}{9} \text{ et } \frac{1}{2} \quad 3/ \frac{5}{3} \text{ et } \frac{6}{5} \quad 4/ \frac{6}{7} \text{ et } \frac{9}{11} \quad 5/ \frac{13}{17} \text{ et } \frac{11}{16}$$

Exercice 4

Calculer

$$1/ \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \quad 2/ \frac{4}{9} + \frac{1}{27} = \quad 3/ \frac{11}{13} + 3 = \quad 4/ \frac{8}{3} - 1 = \quad 5/ \frac{32}{8} - \frac{1}{2} = \quad 6/ \frac{9}{6} - \frac{2}{5} =$$

Exercice 5

En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, simplifier le plus possible les fractions suivantes :

$$1/ \frac{306}{510} \quad 2/ \frac{726}{660} \quad 3/ \frac{280}{1225} \quad 4/ \frac{1392}{504}$$

Exercice 6

Calculer les expressions suivantes :

$$1/ A = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$2/ B = \frac{1}{4} \times \frac{-2}{7}$$

$$3/ C = \frac{-5}{6} \times \frac{3}{-8}$$

$$4/ D = \frac{7}{12} \times (-11)$$

Exercice 7

Calculer les expressions suivantes :

$$1/ A = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{8}$$

$$2/ B = \frac{\frac{9}{8}}{18}$$

$$3/ \frac{C(-5)}{15} \div \frac{10}{18}$$

$$4/ D = -\frac{24}{49} \div \left(-\frac{16}{14}\right)$$

Exercice 8

80 candidats participent à un jeu télévisé. A la fin de la première semaine, le quart des candidats est éliminé. A la fin de la deuxième semaine, les deux tiers de ceux qui restent sont éliminés. A la fin de la troisième semaine, les trois cinquièmes restants sont éliminés.

Calculer le nombre de candidats qui participeront à la finale pendant la quatrième semaine.

Exercice 9

Marylise, Martin et Juliette se partagent un paquet de bonbons. Marylise se sert la première, elle prend $\frac{3}{5}$ des bonbons contenus dans le paquet. Martin prend $\frac{1}{3}$ de ce qu'a laissé Marylise. Juliette vide le paquet.

1/ Quelle proportion de bonbons Martin a-t-il pris ?

2/ Quelle proportion de bonbons reste-t-il à Juliette ?

3/ Sachant qu'il y avait 75 bonbons dans le paquet, combien de bonbons chaque enfant a-t-il pris ?

Exercice 10

Pour transporter un groupe de voyageurs, l'organisateur d'un séjour de vacances dispose de cinq autocars. La répartition des voyageurs s'effectue de la façon suivante :

- Un cinquième des voyageurs monte dans le premier autocar.
- Le quart des personnes restante monte dans le deuxième autocar.
- Le tiers des autres personnes monte dans le troisième autocar.
- La moitié des dernières personnes monte dans le quatrième autocar.

Les derniers touristes montent dans le cinquième autocar. Les voyageurs ont-ils été équitablement répartis entre les cinq autocars ? Justifier la réponse.

Exercice 11

On considère les deux programmes de calcul ci-dessous :

- Prendre le nombre $\frac{4}{5}$
- Lui soustraire $\frac{2}{3}$
- Le diviser par $\frac{2}{5}$
- Prendre le nombre $\frac{1}{3}$
- Le diviser par $\frac{2}{7}$
- Lui soustraire 1
- Le multiplier par $\frac{5}{2}$

1/ Traduire chacun des programmes de calculs en une seule expressions.

2/ Donner le résultat de chacun des deux programmes de calculs.

Exercice 12

Trouver LA bonne réponse.

Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Quel nombre est égale à $\frac{7}{-8}$?	$\frac{21}{24}$	$\frac{39}{24}$	$\frac{-39}{24}$	$\frac{-21}{24}$
Si $-3.3 \times 59.5 = -23.1 \times 8.5$ On peut en déduire que :	$\frac{-3.3}{-23.1} = \frac{59.5}{8.5}$	$\frac{59.5}{-23.1} = \frac{-3.3}{8.5}$	$\frac{-3.3}{8.5} = \frac{-23.1}{59.5}$	$\frac{-3.3}{59.5} = \frac{-23.1}{8.5}$
$\frac{7}{-8} + \frac{-11}{5} =$	$\frac{-4}{-40}$	$\frac{123}{-40}$	$\frac{-4}{-3}$	$\frac{-77}{-3}$
$\frac{7}{-8} \times \frac{-1}{-3} =$	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{88}{24}$	$\frac{88}{24}$	$\frac{7}{24}$
$7 \times \frac{-3}{-9} =$	$-\frac{21}{63}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{63}$	$\frac{63}{-3}$
$\frac{-1}{-3} \div \frac{7}{-8} =$	$\frac{-1 \div 7}{8 \times 3}$	$\frac{-1}{-3} \times \frac{8}{7}$	$\frac{-21}{8}$	$\frac{8}{-21}$
$-\frac{2}{3} + \frac{2}{1} \div \frac{-5}{6} =$	$-\frac{46}{15}$	$-\frac{15}{46}$	$\frac{15}{46}$	$\frac{46}{15}$