

Espaces vectoriels normés 2 – TD₁₁

Suites de matrices

Exercice 1 : Applications continues usuelles

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application transposition est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \text{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\psi : M \mapsto PMQ^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
5. Montrer que l'application $B : (M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
6. Montrer que l'application $f : M \mapsto M^2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Réponse

1. L'application tr est linéaire en dimension finie, donc, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. L'application transposition est linéaire en dimension finie, donc, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. L'application φ est linéaire en dimension finie, donc, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
4. L'application ψ est linéaire en dimension finie, donc, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
5. L'application B est bilinéaire en dimension finie, donc, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
6. Les coefficients de A^2 sont polynomiaux en les coefficients de A , donc f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2

On note $A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la convergence de la suite (A^n) .
2. Étudier la convergence de la série de terme général A^n .

Indication : Étudier la suite des sommes partielles définies par $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ si, et seulement si, A est une matrice de projecteur.

Réponse

La CNS cherchée est $A^2 = A$.

Indication : $M^{2n} = M^n \times M^n$ et l'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (car bilinéaire en dimension finie).

Exercice 4

1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que cette suite est stationnaire.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, alors A est nilpotente.

Réponse

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $v_k = u_{k+1} - u_k$.
Par hypothèse, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Donc, à partir d'un certain rang N , pour tout $k \geq N$, $|v_k| \leq \frac{1}{2}$.

Or, $u_k \in \mathbb{Z}$ et $u_{k+1} \in \mathbb{Z}$, donc, $v_k \in \mathbb{Z}$.

Donc, pour tout $k \geq N$, $v_k = 0$, autrement dit, $u_{k+1} = u_k$.

Donc,

La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

2. Soit $(i, j) \in [1, n]^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la ligne i colonne j de la matrice A^k .

Comme A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite à coefficients entiers.

Or, $A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc, $a_{i,j}^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Donc, par **Q1** cette suite est stationnaire et est donc égale à 0 à partir d'un certain rang $N_{i,j}$.

On note $N = \max \{N_{i,j} | 1 \leq i, j \leq n\}$. On a alors $A^N = 0$.

Donc,

A est nilpotente.

Exercice 5

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser la matrice A .
2. En déduire que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
3. Généraliser ce qui précède à une matrice M trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ tel que $(A \times B)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_p$.

Montrer que $(B \times A)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_p$.

Réponse

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$(B \times A)^n = B \times A \times B \times A \times \cdots \times B \times A = B \times (A \times B)^{n-1} \times A.$$

Or, l'application $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est linéaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$$M \mapsto B \times M \times A$$

$$\varphi(\lambda.M + N) = B \times (\lambda.M + N) \times A = \lambda.B \times M \times A + B \times N \times A = \lambda.\varphi(M) + \varphi(N).$$

De plus, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Donc, φ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Donc,

$$(B \times A)^n = \varphi((A \times B)^{n-1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi(0_p) = A \times 0_p \times B = 0_p.$$

Exercice 7

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que sa limite est nulle.

Réponse

Soit $n \geq 2$.

1. Soit (M_p) une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui converge. On note L sa limite et on montre que $L \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ et l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire en dimension finie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$$

Donc, $M_p^\top \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L^\top$.

De plus, on sait que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $M_p^\top = M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$.

Par unicité de la limite, on a $L^\top = L$. Donc $L \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit (M_p) une suite d'éléments de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ qui converge. On note L sa limite et on montre que $L \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ et l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire en dimension finie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$$

finie

Donc, $M_p^\top \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L^\top$.

De plus, on sait que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M_p \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $M_p^\top = -M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} -L$.

Par unicité de la limite, on a $L^\top = -L$. Donc $L \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note L la limite de $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

On sait que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers L , donc les suites extraites $(A^{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(A^{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent aussi vers L .

De plus, par continuité de l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les suites $((A^{2p})^\top)_{p \in \mathbb{N}}$ et $((A^{2p+1})^\top)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$$

aussi vers $L^\top$.

Or, comme $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a : $(A^{2p})^\top = (A^\top)^{2p} = (-A)^{2p} = A^{2p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ et

$$(A^{2p+1})^\top = (A^\top)^{2p+1} = (-A)^{2p+1} = -A^{2p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} -L.$$

Par unicité de la limite, $L^\top = L$ et $L^\top = -L$. Donc, $L = -L$, puis $L = 0_n$.

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 8

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x \times y}{x^2 + y^2}$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 \times y^2}{x^2 + y^2}$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x \times y}{x - y}$;
5. $f_5 : (x, y, z) \mapsto \frac{x \times y + y \times z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$;
6. $f_6 : (x, y) \mapsto \frac{1 - \cos(x \times y)}{x \times y^2}$;
7. $f_7 : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x \times y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
8. $f_8 : (x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^2}{x \times y}$;
9. $f_9 : (x, y) \mapsto \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}$.

Exercice 9

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) \times \ln(1 + x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Les applications $(x, y) \mapsto 1 + x^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 > 0$ et l'application $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition d'applications continues, l'application $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 > 0$, $\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \in [0, 1]$ et l'application Arcsin est continue sur $[-1, 1]$, donc, par

composition d'applications continues, l'application $(x, y) \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, par opérations sur les fonctions continues, $(x, y) \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) \times \ln(1 + x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Fonctions entre deux espaces vectoriels normés

Exercice 11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|} \cdot x$ est continue sur E .

Exercice 12

1. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{\sin(x)}{x}, \frac{\ln(1 + 2x)}{x}, \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right)$ est prolongeable par continuité en 0.
3. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme ∞ . Montrer que l'application $t \mapsto \left\| \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tracer son graphe.

Réponse

1. L'application $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

De plus, l'application $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'application $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $(x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, donc, par opérations sur les fonctions continues, $(x, y) \mapsto x + \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, l'application $(x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

Or, on a : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x = -\sqrt{x^2 + y^2} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y) \in \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

On en déduit que l'application $(x, y) \mapsto \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ comme quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

Les applications coordonnées de f sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

2. Avec les équivalents usuels on a : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$.

3. Les applications $t \mapsto 2e^{-t}$ et $t \mapsto (t-1)^2$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc l'application $t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, l'application $\|\cdot\|_\infty$ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car 1-lipschitzienne).

Donc, par composition d'applications continues, $t \mapsto \left\| \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Topologie

Exercice 13

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
- En déduire l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$.
- Dans cette question, on suppose A inversible. Montrer que $\chi_{A \times B} = \chi_{B \times A}$.
- En déduire que $\chi_{A \times B} = \chi_{B \times A}$ dans le cas général.

Réponse

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A possède un nombre fini de valeurs propres, donc, à partir d'un certain rang $N > 0$, pour tout $p \geq N$, $\chi_A\left(\frac{1}{p}\right) \neq 0$.

Donc, la matrice $\frac{1}{p} \cdot I_n - A$ est inversible, donc, $A_p = A - \frac{1}{p} \cdot I_n$ est inversible.

De plus, $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$.

Donc,

A est limite d'une suite de matrices inversibles.

2. L'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble de ses points adhérents. Ici, les points sont des matrices.

Or, une matrice est adhérente $GL_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, celle-ci est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Par Q1,

$$\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det(X.I_n - AB) \\ &= \det(A \times (X.A^{-1} - B)) \\ &= \det(A) \det(X.A^{-1} - B) \\ &= \det((X.A^{-1} - B) \det(A)) \\ &= \det((X.A^{-1} - B) \times A) \\ &= \det(X.I_n - BA) \\ &= \chi_{AB}.\end{aligned}$$

4. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices inversibles qui convergent vers A .

Soit $z \in \mathbb{K}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \mapsto & z.I_n - MB \end{array}$ est linéaire en dimension finie, donc, $z.I_n - A_k B \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} z.I_n - AB$.

Or, le déterminant est multilinéaire en dimension finie, donc,

$$\chi_{A_k B}(z) = \det(z.I_n - A_k B) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \det(z.I_n - AB) = \chi_{AB}(z).$$

De même, $\chi_{BA_k}(z) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \chi_{BA}(z)$.

Or, par **Q3**, $\chi_{A_k B}(z) = \chi_{BA_k}(z)$.

D'où, en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on a $\chi_{AB}(z) = \chi_{BA}(z)$.

Ceci est vrai pour tout $z \in \mathbb{K}$, ainsi,

$$\chi_{A \times B} = \chi_{B \times A}.$$

Exercice 14

Les parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivantes sont-elles fermées ? ouvertes ? (Justifier)

1. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices de traces nulles
2. L'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices d'homothéties.
3. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles.
4. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de projecteurs.

Réponse

1. Montrons que l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices de traces nulles est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(M_p) \in \mathcal{T}_n^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_n$ qui converge. On note L sa limite et on montre que $L \in \mathcal{T}_n$.

On sait que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(M_p) = 0$, donc $\text{Tr}(M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ et l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire en dimension finie donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc, $\text{Tr}(M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \text{Tr}(L)$.

Par unicité de la limite, on a $\text{Tr}(L) = 0$. Donc $L \in \mathcal{T}_n$.

Par caractérisation séquentielle des fermés,

$\mathcal{T}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ (la notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie quand on travaille en dimension finie).

La matrice nulle appartient à $\mathcal{T}_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $M_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{T}_n$. On a $\|M_{\varepsilon} - 0_n\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(M_{\varepsilon}, \varepsilon) \not\subset \mathcal{T}_n$.

Donc, la matrice nulle n'est pas intérieure à $\mathcal{T}_n$.

Ainsi,

$\mathcal{T}_n$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices d'homothéties qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons que A est une matrice d'homothétie.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que A_k est une matrice d'homothétie, donc, il existe $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tel que $A_k = \lambda_k \cdot I_n$.

Comme $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$, en notant $a_{1,1}^{(k)}$ le coefficient de la ligne 1 et colonne 1 de A_k , on a $\lambda_k = a_{1,1}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a_{1,1}$.

On en déduit que $A_k = \lambda_k \cdot I_n \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a_{1,1} \cdot I_n$.

Donc, par unicité de la limite $A = a_{1,1} \cdot I_n$.

Donc, par caractérisation séquentielle des fermés,

l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices d'homothéties est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ (la notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie quand on travaille en dimension finie).

La matrice nulle appartient à $\mathcal{H}_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $M_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{H}_n$. On a $\|M_{\varepsilon} - 0_n\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(0, \varepsilon) \not\subset \mathcal{H}_n$.

Donc, la matrice nulle n'est pas intérieure à $\mathcal{H}_n$.

Ainsi,

$\mathcal{H}_n$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. On a : $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

De plus, $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (son complémentaire $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$) et $\det$ est continue (car multilinéaire en dimension finie).

Donc,

$GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

La suite de matrices $\left(\frac{1}{k}.I_n\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est composée de matrices inversibles mais converge vers $0 \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Donc, par caractérisation séquentielle des fermés,

$GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un fermé.

4. La matrice I_n est diagonale donc diagonalisable.

On note $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A_k est triangulaire, donc, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Autrement dit, $\text{Sp}(A_k) = \{1\}$.

Si A_k est diagonalisable, alors A_k est semblable à I_n , donc, pour une certaine matrice inversible, $A_k = P.I_n.P^{-1}$. On en déduit que $A_k = I_n$. Contradiction.

Donc, les matrices A_k ne sont pas diagonalisables. De plus, $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I_n$.

Donc, par caractérisation séquentielle des fermés,

$\mathcal{D}_n$ n'est pas un fermé.

La matrice I_n est diagonale donc diagonalisable.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme précédemment, la matrice A_ε n'est pas diagonalisable. De plus, $\|A_\varepsilon - I_n\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, $B_o(I_n, \varepsilon) \not\subset \mathcal{D}_n$.

Donc, la matrice identité n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n$.

Ainsi,

$\mathcal{D}_n$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A_k est triangulaire, donc, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Autrement dit, $\text{Sp}(A_k) = \{1\}$.

Si A_k est diagonalisable, alors A_k est semblable à I_n , donc, pour une certaine matrice inversible, $A_k = P.I_n.P^{-1}$. On en déduit que $A_k = I_n$. Contradiction.

Donc, les matrices A_k ne sont pas diagonalisables. De plus, $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I_n$.

Donc, par caractérisation séquentielle des fermés,

$\mathcal{D}_n$ n'est pas un fermé.

5. Montrons que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de projecteurs est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit (M_p) une suite d'éléments de $\mathcal{P}_n$ qui converge. On note L sa limite et on montre que $L \in \mathcal{P}_n$.

On sait que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$ et l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^2 \end{matrix}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car ses applications coordon-

nées (dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont polynomiales en les coefficients de M .

Donc, $M_p^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L^2$.

De plus, on sait que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M_p \in \mathcal{P}_n$, donc $M_p^2 = M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$.

Par unicité de la limite, on a $L^2 = L$. Donc $L \in \mathcal{P}_n$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, $\mathcal{P}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de projecteurs n'est pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La négation de $\mathcal{P}_n$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

$$\exists M \in \mathcal{P}_n, \quad \forall r > 0, \quad B_o(M, r) \not\subset \mathcal{P}_n.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme infinie (la notion d'ouvert est indépendante de la norme choisie quand on travaille en dimension finie).

On considère la matrice $M = I_n \in \mathcal{P}_n$ (car $I_n^2 = I_n$).

Soit $r > 0$, on cherche une matrice M_r telle que $M_r \in B_o(M, r)$ et $M_r \notin \mathcal{P}_n$.

On note E_r la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (1,1) qui vaut $\frac{r}{2}$ et on pose $M_r = M + E_r$.

Le coefficient en position (1,1) de M_r est $1 + \frac{r}{2}$.

On a alors $\|M_r - M\|_\infty = \|E_r\|_\infty = \frac{r}{2} < r$, donc $M_r \in B_o(M, r)$.

De plus, $M_r^2 = (I_n + E_r)^2$. Le coefficient en position (1,1) de M_r^2 est $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \neq 1 + \frac{r}{2}$ (car $r > 0$).

Donc, $M_r \neq M_r^2$. D'où, $M_r \notin \mathcal{P}_n$.

On en déduit que $B_o(M, r) \not\subset \mathcal{P}_n$. Ceci est vrai pour tout $r > 0$.

Donc, $\mathcal{P}_n$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

Pour tout $f \in E$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

1. Soit $f \in E$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) \times (1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\|f_n - f\|_1$.

2. En déduire que F est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Étudier la densité de F dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.