

Endomorphismes d'un espace euclidien – TD₁₄

Isométries vectorielles

Exercice 1 :

Soient f un isométrie d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On note $g = f - \text{Id}_E$ et p la projection orthogonale sur $\text{Ker}(g)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^\perp$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x)$.

Exercice 2 :

Déterminer toutes les matrices de $O(n)$ diagonalisables.

Exercice 3 :

Montrer que $O(n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$.
2. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Indication : On pourra calculer AU où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A , alors $\lambda = 0$.
2. En déduire que les matrices $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.
3. Montrer que $(A + I_n) \times (A - I_n)^{-1} \in O(n)$.

Exercice 6 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application (non nécessairement linéaire). On suppose que, pour tous x et y dans E , $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

1. Montrer que f transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E .
2. Montrer que f est linéaire.

Exercice 7 :

Soient A et B dans $O_n(\mathbb{R})$.

1. Les matrices $A + B$ et AB sont-elles nécessairement dans $O_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que si $\frac{1}{2}(A + B) \in O_n(\mathbb{R})$, alors le segment $[A, B]$ est inclus dans $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et telle que $A^2 = A^\top$.

1. Montrer que A est orthogonale.
2. Si de plus A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver A .

Espaces vectoriels euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

Exercice 9 :

Soient a un vecteur non nul d'un espace euclidien orienté de E de dimension 3 et f l'application définie, pour tout $x \in E$, par $f(x) = a \wedge x$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer les éléments propres de f .

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Exercice 10 :

Trouver les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$.

Exercice 11 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $A^\top \times A$ est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de $A^\top \times A$ sont positives.
3. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de $A^\top \times A$ comptées avec multiplicités. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i$.
4. On suppose de plus $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicités. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Exercice 12 :

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

1. Montrer que A définit un projecteur orthogonal.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\text{tr}(M^\top M)$ en fonction des coefficients de M .
3. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n \sqrt{\text{rg}(A)}$.

Exercice 13 :

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que $\frac{(\text{tr } A)^2}{\text{tr}(A^2)} \leq \text{rg } A$.

Exercice 14 :

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = A^2$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^2$.

Exercice 15 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M = I_n$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Déterminer M .

Exercice 16 :

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(M + M^\top)^p = 0$. Montrer que M est antisymétrique.
2. Trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $(M + M^\top)^2 = 0$ et $M + M^\top \neq 0$.

Exercice 17 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
2. Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Montrer que $\det(A_p) \geq 0$.

Exercice 18 :

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E .

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors $F^\perp$ est aussi stable par f .

Exercice 19 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est un endomorphisme autoadjoint

Exercice 20 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et s une symétrie de E .

Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est un endomorphisme autoadjoint

Exercice 21 :

1. Une symétrie est-elle un endomorphisme autoadjoint?
2. Une projection orthogonale est-elle une isométrie?
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques?
4. Quelles sont les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 :

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) \times Q(t) dt$.

Montrer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = (X^2 - 1) \times P'' + 2X \times P' + P$ est symétrique.

Exercice 23 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^\top \times A = A \times A^\top$ et $A^2 = -I_n$.

1. On note $S = A \times A^\top$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Calculer S^2 .
3. Montrer que $A \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Dans le cas où $n = 2$, déterminer les matrices A telles que $A^\top \times A = A \times A^\top$ et $A^2 = -I_2$.

Exercice 24 :

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E . On note $\lambda_{\min} = \min_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$ et $\lambda_{\max} = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lambda_{\min} \times \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_{\max} \times \|x\|^2$.
2. On suppose que les valeurs propres de f sont deux à deux distinctes et vérifier $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Soit $x \in E$ de norme 1.

Montrer que $\langle f(x), x \rangle = \lambda_1$ si, et seulement si, $f(x) = \lambda_1 \cdot x$.

Exercice 25 :

Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n telle que $6S^2 - 5S + I_n = 0_n$. Montrer que la suite $(S^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 26 :

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E .

Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp$.

Exercice 27 :

Soit E un espace euclidien.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Donner un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ dont l'ensemble image est F .
2. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $h^2 = f$.
4. Soient $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et $x \in E$. Montrer que si $\langle f(x), x \rangle = 0$, alors $f(x) = 0$.
5. Soit $(f, g) \in \mathcal{S}^+(E) \times \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que : $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Exercice 28 :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur orthogonal.

Endomorphismes d'un espace euclidien
Exercice 29 :

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$.

Exercice 30 :

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on le suppose orienté par sa base canonique. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

Exercice 31 :

Soit E un espace euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme g dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme h dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme v dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $E = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 32 :

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on le suppose orienté par sa base canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$.

Exercice 33 :

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.