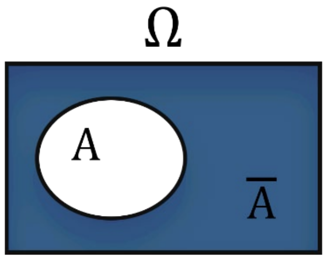
Probabilités Conditionnelles

Rappel :



$\boldsymbol{\Omega}$: univers

$\boldsymbol{A}$: événement dans $\boldsymbol{\Omega}$

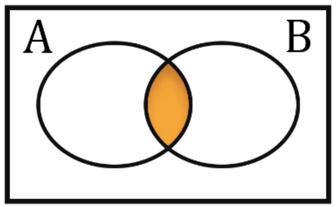
$\overline{\boldsymbol{A}}$: événement contraire de $\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{P(A)}$: probabilité de l'événement A

$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

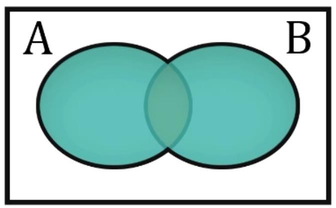
INTERSECTION d'événements

« A **et** B » $\Leftrightarrow A \cap B$



UNION d'événements

« A **ou** B » $\Leftrightarrow A \cup B$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

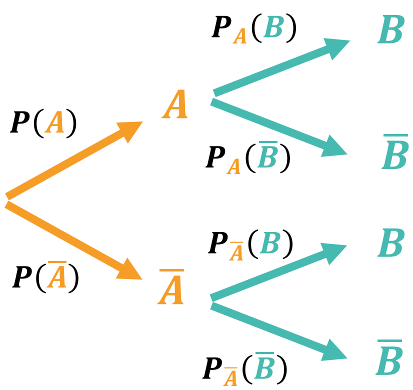
Probabilité CONDITIONNELLE :

Probabilité de B sachant A →
$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

TABLEAU à double entrée :

	A	$\overline{A}$	Total
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$	B
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B}$
Total	A	$\overline{A}$	Ω

ARBRE Pondéré :



$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

$\boldsymbol{P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})}$

$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$

$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})}$

Loi de Probabilité TOTALE :

$$\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$$

INDÉPENDANCE :

Si $\boldsymbol{P(A) \times P(B) = P(A \cap B)}$ alors A et B **indépendants**.

Si $\boldsymbol{P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)}$ alors A et B **pas indépendants**.

Exercice 1 :

Les données sont celles du tableau ci-dessous où A et B sont deux évènements de l'ensemble des issues d'une exprérience aléatoire.
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $P(\overline{B}) = 0.2$
2. $P(A) = 0.48$
3. $P(\overline{A} \cap B) = 0.32$
4. $P_A(B) = 0.5$

	A	$\overline{A}$	Total
B	0.32		
$\overline{B}$		0.2	0.36
Total			

Exercice 2 :

Les deux questions suivantes sont indépendantes

1. A et B sont deux évènement d'une même expéreince aléatoire tels que :
   $P(\overline{A}) = 0.7 \qquad P(B) = 0.7 \qquad P(A \cup B) = 0.9.$
   Calculer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$
2. Soient A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $P(B) \neq 0$
   Montrer que $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$

Exercice 3 :

Un concessionnaire possède un parc de voiture d'occasion et de voitures neuves, de deux marques différentes : la marque **A** et la marque **B**.

En faisant le bilan de l'année passé, il constate que 20% de ses ventes concernent des voitures neuves.
Parmi ces voitures neuves vendues, 3 véhicules sur 10 sont de la marque **A**.
On tire au hasard une fiche client et on note :
N l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture neuve »,
O l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture d'occasion »,
A l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture de marque **A** »,
B l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture de marque **B** ».
Toutes les probabilités demandées seront données sous forme décimale.

1. Donner, à partir des informations de l'énoncé :
   (a) La probabilité **P(N)** de l'évènement **N**,
   (b) La probabilité **P**$_N$**(A)** de l'évènement **A** sachant **N**.
2. (a) Construire puis compléter au fur et à mesure l'arbre de probabilité correspondant à cette situation.
   (b) En déduire la probabilité **P(O)** de l'évènement **O** et la probabilité **P**$_N$**(B)** de l'évènement **B** sachant **N**
3. (a) Calculer la probabilité que la fiche concerne un client ayant acheté une voiture neuve de marque **B**.
   (b) Le concessionnaire constate que 62% des clients ont acheté une voiture de marque **B**. Démontrer que, la probabilité que la fiche concerne un client ayant acheté un véhicule d'occasion de marque **B** est **P(O∩B)=0.48**.
   (c) En déduire la probabilité que le véhicule soit de marque **B** sachant qu'il a été acheté d'occasion.
4. Les évènements **B** et **O** sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 1 (5 points)

Lors de l'année de terminale, les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire. Un candidat au baccalauréat a une probabilité de $0,9$ d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de $0,2$ s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note :

- T l'événement : « le candidat a travaillé sérieusement » ;
- A l'événement : « le candidat est admis au baccalauréat ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat. Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants : $T \cap \bar{A}$; $\bar{T} \cap A$.
3. (a) Démontrer que la probabilité que le candidat interrogé soit admis est $0,725$.
   (b) Le candidat est admis. Déterminer la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
4. Les événements A et T sont-ils indépendants ?
5. Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien, s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note S l'événement : « Le candidat est surpris ».
   Déterminer la probabilité de l'événement S.

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième.

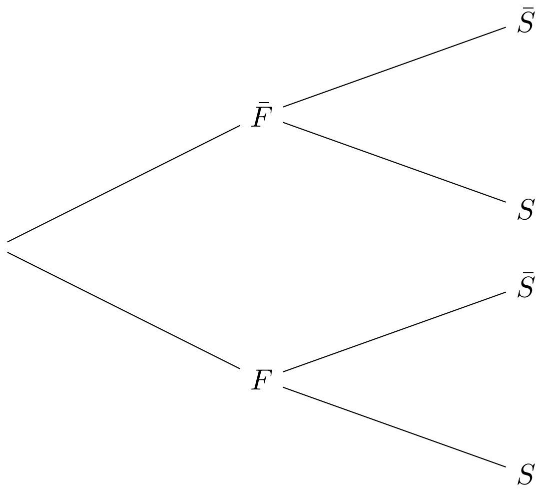
Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle. Cette étude montre que :

- $52\,\%$ des demandeurs d'emploi sont des femmes et $48\,\%$ sont des hommes ;
- $18\,\%$ des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que $17,5\,\%$ sont sans expérience.

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

- S : l'événement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;
- F : l'événement « le demandeur d'emploi est une femme ».

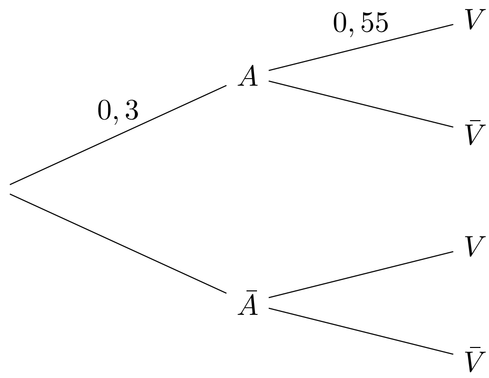
1. Sans justification, donner la valeur de $P(S)$ et $P_{\bar{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés.



3. Démontrer que $P(\bar{F} \cap S) = 0,084$. Interpréter le résultat.
4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.
5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

EXERCICE 1 — Technique - 20 MIN - 4 points

Dans cet exercice, on considère l'arbre pondéré ci-dessous et on sait que $P_{\bar{A}}(V) = 0,25$.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
2. Calculer $P(A \cap V)$. Justifier par une formule.
3. Calculer $P(V)$. Justifier par une formule.
4. Calculer $P(A \cup V)$. Justifier par une formule.
5. Calculer $P_V(A)$. Justifier par une formule.
6. Les évènements A et V sont-ils indépendants ? Justifier par une formule.
7. Les évènements A et V sont-ils incompatibles ? Justifier.

EXERCICE 2 — Feu vert - 5 MIN - 1 point

Sur un trajet pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est de $0,4$ pour le premier feu et $0,45$ pour le second feu.

On note A : « Le premier feu est vert. » et B : « Le deuxième feu est vert. »

On fait l'hypothèse que ces deux évènements sont indépendants. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter ?

EXERCICE 3 — Lancer de dés - 20 MIN - 4 points

On considère deux dés fantaisistes à 6 faces dont les faces sont équilibrées et marquées de la façon suivante :

- le premier dé : $1, 2, 2, 3, 4, 4$.
- le second dé : $1, 3, 4, 5, 6, 8$.

On lance le premier dé, puis le second.

1. a. Combien y-a-t-il d'issues dans l'univers de cette expérience aléatoire ?
   On pourra utiliser un tableau à double entrée pour modéliser cette expérience...
   b. Est-on en situation d'équiprobabilité ?
2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   A : « Les deux dés indiquent le même résultat. »
   B : « les deux dés indiquent des résultats différents. »
   C : « Le premier dé indique un numéro plus grand que le deuxième dé. »
   D : « Les deux numéros indiqués par les dés sont tous les deux pairs. »
3. a. Calculer $P_D(C)$.
   b. C et D sont-ils indépendants ? Justifier.

EXERCICE 4 — Bientôt les vacances !! - 20 MIN - 5 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité permettent de détecter les objets métalliques portés par les voyageurs. Une étude a montré que $5\,\%$ des voyageurs portent un objet métallique au moment de franchir le portique de sécurité.

De plus, $4,9\,\%$ des passagers portent un objet métallique et déclenchent la sonnerie du portique de sécurité.

Enfin lorsque le voyageur ne porte pas d'objet métallique, le portique ne sonne pas dans $99\,\%$ des cas.
On choisit un voyageur au hasard.

On note les évènements :
M : « Le voyageur porte un objet métallique. »
S : « Le portique sonne. »

1. Traduire chaque donnée numérique par une probabilité.
2. Calculer $P_M(S)$ et interpréter cette probabilité dans le cadre de cette situation.
3. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
4. Calculer la probabilité de l'évènement S.
5. Calculer la probabilité que le voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a déclenché la sonnerie.

EXERCICE 5 — Contrôle technique - 15 MIN - 2 points

1. Résoudre les équations suivantes :

   a) $1-2x=6-2(2-5x)$ b) $x^2=(2x-5)^2$ c) $x(5x-2)-(25x^2-4)=0$

   a) $5x^2-3x=0$

2. Simplifier le nombre suivant :

$$C=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}}$$

EXERCICE 6 — Tricheur - 15 MIN - 2 points

Tom le dit lui-même... « Je ne triche que très rarement, disons $5\,\%$ du temps, mais quand je triche, je gagne à coup sûr ! »

Ce soir, il joue avec 4 de ses amis à un jeu de plateau et, comme, ils sont tous de même niveau, on estime qu'ils ont tous la même probabilité de gagner (Si Tom ne triche pas, bien sûr...).

Tom gagne une partie. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

EXERCICE 7 — Recherche - 25 MIN - 2+2 points bonus

Une urne contient initialement trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $P(A)=\frac{3}{4}$?

Dans cet exercice, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.