

TD EM4

Équations de MAXWELL

A. Équations locales de l'électrostatique • ○ ○

Une boule non conductrice de centre O et de rayon a , porte une charge répartie uniformément en volume avec une densité ρ . Le champ électrostatique créé en un point $M(r, \theta, \varphi)$ et le potentiel électrique sont donnés par :

	A l'intérieur de la boule	A l'extérieur de la boule
Champ $\vec{E}$	$\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$	$\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$
Potentiel V	$\frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2)$	$\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$

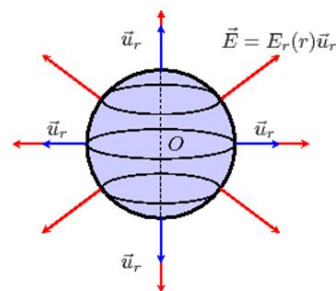


FIGURE 1 – Sphère chargée ρ

Calculer dans les deux zones $\text{div } \vec{E}$, $\vec{\text{rot}} \vec{E}$ et ΔV . Commenter les équations locales correspondantes (en donnant leur nom).

B. Champs statiques • • ○

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan $z = \text{cste}$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme : $\vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{u}_x + a_y(x, y)\vec{u}_y$ ou de la forme $\vec{a}(r, \theta) = a_r(r, \theta)\vec{u}_r + a_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$.

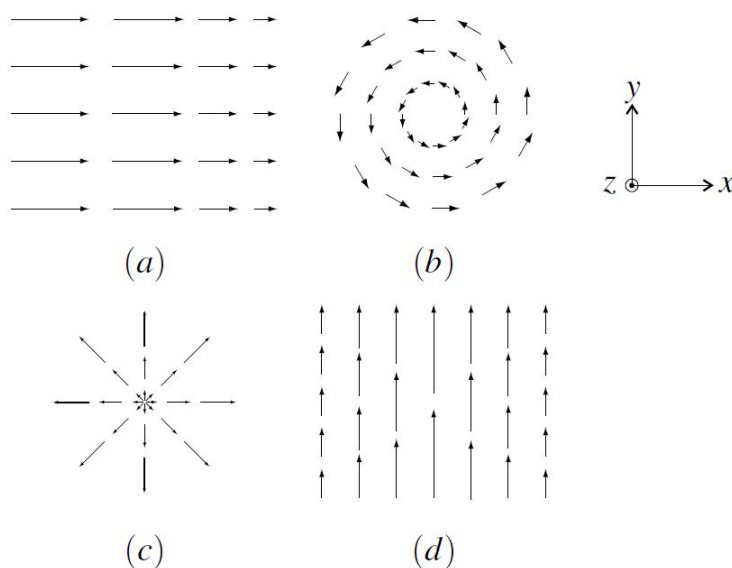


FIGURE 2 – Cartes de champs statiques

Chaque champ est de la forme $\vec{a} = a_\alpha(\beta)\vec{u}_\alpha$ où α et β sont deux coordonnées (éventuellement identiques) d'un repère de l'espace adapté. Dans chaque cas, préciser le signe de $\text{div } \vec{a}$ et la direction de $\vec{\text{rot}} \vec{a}$; indiquer si le champ $\vec{a}$ peut être un champ électrostatique et/ou un champ magnétostatique. On utilisera le formulaire d'analyse vectorielle.

C. Détermination d'un champ électrique.....

Une bobine est formée de N spires circulaires, mais le rayon de ces spires n'est pas uniforme. Quand elle est parcourue par un courant électrique haute fréquence d'intensité $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, le champ magnétique créé en un point M du vide de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est :

$$\vec{B} = K(r - a)z^2 i(t) \vec{e}_z - K \left(\frac{2}{3} r^2 - ar \right) zi(t) \vec{e}_r$$

Où K est une constante qui dépend de la forme des spires : $K = \frac{\mu_0 N}{az_0^2}$

1. Avec l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, déterminer le champ électrique variable correspondant en M .
2. Vérifier l'équation de MAXWELL-FLUX.
3. Vérifier l'équation de MAXWELL-GAUSS.

D. Champ magnétique au voisinage de l'axe.....

Un circuit (bobine plate, solénoïde...) crée un champ magnétique à symétrie de révolution autour d'un axe). En utilisant une équation de MAXWELL, montrer que, en un point proche de cet axe, le champ magnétique admet une composante radiale B_r qui est liée à la composante axiale B_z par :

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

E. Sphère chargée uniformément en volume.....

Retrouver les expressions du champ électrostatique en tout point en utilisant une équation de MAXWELL.

F. Sphère au champ intérieur uniforme.....

Une sphère de rayon a porte une densité volumique de charge telle que, à l'intérieur de la boule, la norme du champ électrostatique radial est uniforme et vaut E_0 .

1. Déterminer la densité de charge à l'intérieur.
2. Déterminer le champ à l'extérieur de la boule.

G. Diode à vide.....

Une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques planes parallèles (C) et (A), orthogonales à un axe (Ox), de même surface S et distantes de d , entre lesquelles a été fait le vide. La cathode (C) est maintenue au potentiel 0. Elle émet des électrons de vitesse négligeable qui se dirigent vers l'anode (A) qui est portée au potentiel $U > 0$. On admet pour simplifier que les trajectoires des électrons sont rectilignes perpendiculaires aux plaques. On se place en régime permanent. L'intensité passant de (A) à (C) est appelée I . On note $V(x)$ le potentiel électrostatique, $\rho(x)$ la densité volumique de charge et $v(x)$ la vitesse des électrons entre les plaques à la distance x de (C).

1. En appliquant un théorème énergétique, trouver l'expression de $v(x)$ en fonction de $V(x)$ et des caractéristiques d'un électron (masse m , charge $-e$).
2. Montrer que $\rho(x)v(x) = \text{constante}$ et exprimer la constante en fonction de I et S .
3. Exprimer $\rho(x)$ en fonction de $V(x)$, $\alpha = \frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$ et ϵ_0 .
4. Écrire une équation différentielle vérifiée par $V(x)$.
5. On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$. Intégrer l'équation précédente après l'avoir multipliée par $\frac{dV}{dx}$ pour obtenir $\frac{dV}{dx}$ en fonction de $V(x)$.
6. En déduire I en fonction de U , pour $U > 0$. Que dire de I si $U < 0$?