

Commentaires :

On connaissait jusque là (en première année) le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ défini de la manière suivante par exemple si $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Son utilité était principalement (surtout dans $\mathbb{R}^2$) d'établir des égalités d'angles géométrique ou des orthogonalités entre deux vecteurs. On rappelle à cet effet qu'on avait

$$\langle X, Y \rangle = 0 \Leftrightarrow X \perp Y$$

On peut en fait généraliser cette notions à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. De plus, on (re)verra que ce produit scalaire peut également nous permettre :

- de faire des calculs de distance
- de diagonaliser certaines matrices dans des bases "intéressantes"
- d'inverser de manière immédiate certaines matrices
- de faire des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

I Généralités

Dans tout ce chapitre, on pose $n \in \mathbb{N}^*$ et notera $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Commençons par généraliser la notion de produit scalaire :

I-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on appelle *produit scalaire (usuel) de u et v* le nombre

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Commentaires :

En réalité, il existe beaucoup d'autres "produits scalaires" sur $\mathbb{R}^n$, d'où le nom ici rajouté de "usuel". (Ces autres produits scalaires sont notamment étudiés dans d'autres classes. Attention donc à ne pas s'éparpiller en allant voir inutilement les cours dans d'autres sections !)

Le produit scalaire usuel (celui que nous étudions) est celui utilisé le plus fréquemment dans les calculs géométriques "classiques". Étant donné que ce sera le seul étudié cette année, on pourra dans ce chapitre oublier le terme "usuel".

Exemple 1 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u = (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{2}_{x_4})$ et $v = (\underbrace{2}_{y_1}, \underbrace{3}_{y_2}, \underbrace{-1}_{y_3}, \underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$\langle u, v \rangle = 1 \times 2 + 0 \times 3 + (-1) \times (-1) + 2 \times 1 = 5$$



Remarque :

Avec les notations de la définition ci-avant, remarquons que la formule du produit scalaire " $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ " est également issue du **produit matriciel**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}}_{\text{une seule ligne, } n \text{ colonnes}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = \underbrace{\quad}_{\text{matrice à une ligne, une colonne}} (\langle u, v \rangle)$$

Le résultat est donc une matrice à une ligne et une colonne contenant $\langle u, v \rangle$.

Exemple 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u = (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{2}_{x_4})$ et $v = (\underbrace{2}_{y_1}, \underbrace{3}_{y_2}, \underbrace{-1}_{y_3}, \underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 2 + 0 \times 3 + (-1) \times (-1) + 2 \times 1) = (5)$$



Remarque :

Le résultat du produit matriciel ne contenant qu'un seul élément, on fait l'amalgame entre "matrice" et "nombre" (et donc l'abus de notation) suivant :

$$(\langle u, v \rangle) = \langle u, v \rangle$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \langle u, v \rangle$$

En notant $U = M_{\mathcal{B}_0}(u)$, $V = M_{\mathcal{B}_0}(v)$, la formule devient donc :

$${}^t U V = \langle u, v \rangle$$

où ${}^t U$ est le vecteur "transposé" de U : ${}^t U = (x_1 \dots x_n)$. (voir ex. ci-dessous)

■ Exemple 3 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u = (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{2}_{x_4})$ et $v = (\underbrace{2}_{y_1}, \underbrace{3}_{y_2}, \underbrace{-1}_{y_3}, \underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\langle u, v \rangle = {}^tUV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

? Exercice 1

Pour $u = (0, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$, calculer $\langle u, v \rangle$ en passant par l'écriture matricielle.

Solution

$$\text{On a } \langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

Commentaires :

Voyons maintenant les quelques propriétés principales du produit scalaire, qui vont nous servir tout au long du chapitre. Elles sont donc à maîtriser.

Proposition 1

Le produit scalaire est :

- bilinéaire ; au sens où, pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\langle u + \alpha v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle$$

et

$$\langle u, v + \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle.$$

- symétrique ; au sens où

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

- défini positif ; au sens où

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Démonstration :

- Montrons que le produit scalaire est bilinéaire :

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On notera les coordonnées de la même manière que dans la définition. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \langle u + \alpha v, w \rangle &= {}^t(U + \alpha V) \cdot W \\ &= ({}^tU + \alpha {}^tV) \cdot W \\ &= {}^tU \cdot W + \alpha {}^tV \cdot W = \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

De même pour la deuxième égalité.

- Montrons que le produit scalaire est symétrique :

Clairement, si on échange u et v dans la formule de la définition on trouve exactement le même résultat. C'est donc bien symétrique.

- Montrons que le produit scalaire est défini positif :

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

De plus,

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

Or, comme le terme de gauche est une somme de nombres positifs, la seule manière d'obtenir 0 est que chaque terme soit nul. Autrement dit,

$$x_1 = \dots = x_n = 0$$

et donc

$$\square \quad u = 0$$



Remarque :

Le terme bilinéaire vient du fait que le produit scalaire est linéaire par-rapport à chaque variable. Le comportement est celui d'un développement de parenthèses dans un produit.

? Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^n$, sachant que $\|u\|^2 = 1$, $\langle u, v \rangle = 1$, $\langle v, w \rangle = -1$ et $\langle u, w \rangle = -1$, vérifier que $\langle u + w, 2v \rangle = 0$ ainsi que $\langle u + w, u + v \rangle = 0$.

Solution

$$\begin{aligned} \langle u + w, 2v \rangle &= \langle u, 2v \rangle + \langle w, 2v \rangle = 2\langle u, v \rangle + 2\langle w, v \rangle = 2 - 2 = 0 \\ \langle u + w, u + v \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$



Définition

On appelle *norme euclidienne* d'un vecteur u le nombre

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$



Remarque :

Dans la base canonique, la formule correspond à

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

où $u = (x_1, \dots, x_n)$

Commentaires :

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on sait déjà que ceci correspond en fait à la longueur du vecteur u . C'est le même principe dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les propriétés déjà vraies dans $\mathbb{R}^2$ vont se généraliser dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$||u|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

Théorème 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| ||v||$$

avec

$$|\langle u, v \rangle| = ||u|| ||v|| \quad \Leftrightarrow \quad (u, v) \text{ proportionnels}$$

Démonstration :

Si $v = 0$, alors l'inégalité est triviale (et c'est même une égalité) :

$$\langle u, v \rangle = 0 = ||u|| \times 0 = ||u|| ||v||$$

Si $v \neq 0$, on pose $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 0 \leq ||u + tv||^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= ||u||^2 + 2t \langle u, v \rangle + ||v||^2 t^2 \end{aligned}$$

L'expression obtenue est donc un polynôme en t , toujours positif, de coefficient dominant positif. Ainsi, ce polynôme n'a d'autre choix que d'avoir un discriminant négatif.

$$\begin{aligned} \text{Or,} \quad 0 \geq \Delta &= (2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 ||u||^2 ||v||^2 \\ &= 4 (\langle u, v \rangle^2 - ||u||^2 ||v||^2) \end{aligned}$$

On en déduit $\langle u, v \rangle^2 \leq ||u||^2 ||v||^2$ et donc

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| ||v||$$

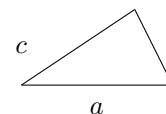
En remontant le raisonnement, on a de plus,

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| = ||u|| ||v|| &\Leftrightarrow \Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } ||u||^2 + 2t_0 \langle u, v \rangle + ||v||^2 t_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } ||u + t_0 v||^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } u = -t_0 v \end{aligned}$$

□

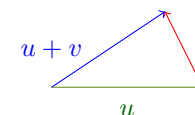
Commentaires :

L'inégalité suivante prise dans $\mathbb{R}^2$ traduit (et justifie) en particulier le fait que dans un triangle, la somme des longueurs de deux des côtés est nécessairement supérieure à la longueur du troisième :



$$c \leq a + b \text{ ou encore } a \leq b + c \text{ etc...}$$

sachant qu'en terme de vecteur, on a



avec alors

$$||u|| = a, \quad ||v|| = b, \quad ||u + v|| = c$$

De manière générale :

Théorème 4 : Inégalité triangulaire

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

avec égalité si et seulement si u et v sont proportionnels dans le même sens.

Démonstration :

Étant donné que les deux côtés de l'inégalité sont positifs on peut passer au carré :

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2 \langle u, v \rangle \\ &= (||u|| + ||v||)^2 - 2||u|| \cdot ||v|| + 2 \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

— Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ —

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que

$$| \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

d'où

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

$\|u + v\|$ et $\|u\| + \|v\|$ étant positifs, on en déduit l'inégalité triangulaire.

On a de plus égalité si et seulement si $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\|$.

Ainsi, d'après CS, on a u et v proportionnels. Si u et v sont dans le sens opposé (et non nuls), le calcul montre que

$$\langle u, v \rangle < 0 \quad \text{et donc} \quad \langle u, v \rangle \neq \|u\| \cdot \|v\|$$

□

Commentaires :

De la démonstration du théorème précédent, on tire également que la norme de la somme de deux vecteurs peut se calculer de la manière suivante :

Propriété 5

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

Cette propriété peut également (dans de rares cas, si on connaît la longueur des trois côtés,) servir à calculer un produit scalaire sans disposer des coordonnées :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

? Exercice 3

Soit dans $\mathbb{R}^2$ un triangle ABC rectangle en A tel que $\|AC\| = 2$, $\|AB\| = 1$. Calculer $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle$.

(On remarquera que l'on sait déterminer la longueur de $\overrightarrow{CB}$. On prendra soin de choisir correctement ses vecteurs " u, v " afin de pouvoir appliquer la formule précédente !)

Vous devez trouver le résultat $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 4$.

Solution

On a $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = - \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\frac{1}{2} \left(\|\underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{AB}}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2 \right)$ avec,

d'après la formule de Pythagore : $\|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$

D'où $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\frac{1}{2} (-2\|\overrightarrow{AC}\|^2) = 4$

I-2 Changement de base

Commentaires :

Et si les vecteurs u et v ne sont pas donnés dans la base canonique mais dans une base autre $\mathcal{B}$, comment calculer $\langle u, v \rangle$? A-t-on encore le droit d'utiliser la même formule ?

i.e. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, comment calculer $\langle u, v \rangle$?

? Exercice 4

On se donne une base $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 2)}_{v_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$ ainsi que u, v exprimés dans

la base $\mathcal{B}$ tels que $u = (-1, 1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a, b)_{\mathcal{B}}$. Se ramener à la base canonique pour calculer $\langle u, v \rangle$

(Vérifiez que vous trouvez $\langle u, v \rangle = 4b - a$ et non $-a + b$).

Solution

Option 1 : Une possibilité est d'exprimer u, v dans la base canonique grâce à la décomposition dans la base :

On a $u = -v_1 + v_2 = (-2, 1)$ ainsi que $v = av_1 + bv_2 = (a - b, a + 2b)$. Maintenant que les vecteurs sont exprimés dans la base canonique, on peut calculer $\langle u, v \rangle = -2 \times (a - b) + 1 \times (a + 2b) = -a + 4b$.

Option 2 : une autre possibilité est d'utiliser les matrices de passage :

La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est $P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi,

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a + 2b \end{pmatrix}$$

D'où

$$\langle u, v \rangle = -2 \times (a - b) + 1 \times (a + 2b) = 4b - a$$

Commentaires :

On constate que la formule $\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$ n'est donc pas forcément valide pour calculer le produit scalaire quand on change de base pour exprimer les coordonnées ! Oups ... Cherchons alors, une formule valable dans toutes les bases !

Commençons par observer tout ceci de manière matricielle :

Si les vecteurs sont donnés dans une base nommée $\mathcal{B}$, on peut se ramener à la base canonique grâce à la formule classique de changement de base :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v)$$

Avec les vecteurs obtenus dans la base canonique, on fait le calcul. De plus, $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est en général une matrice facilement identifiable : on n'a pas à inverser.

■ Exemple 4 :

Dans l'exercice ci-dessus : on aurait $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

et on aurait alors

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix}$$

et donc

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Notons que pour ceci, on peut également utiliser la bilinéarité du produit scalaire :

Par exemple, dans l'exercice ci-dessus : $u = -v_1 + v_2$, $v = av_1 + bv_2$
alors

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle -v_1 + v_2, av_1 + bv_2 \rangle \\ &= -\langle v_1, av_1 + bv_2 \rangle + \langle v_2, av_1 + bv_2 \rangle \quad (\text{linéarité à gauche}) \\ &= -(a\langle v_1, v_1 \rangle + b\langle v_1, v_2 \rangle) + (a\langle v_2, v_1 \rangle + b\langle v_2, v_2 \rangle) \quad (\text{lin. à droite}) \\ &= -a\underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=2} + (-b+a)\underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{=1} + b\underbrace{\langle v_2, v_2 \rangle}_{=5} \\ &= -2a + (a-b) + 5b = 4b - a \end{aligned}$$

? Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donnés

dans la base canonique. Calculer $\langle u, v \rangle$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à

l'aide de la bilinéarité du produit scalaire.

(Vous devez trouver $\langle u, v \rangle = 0$.)

Solution

En écrivant

$$u = V_1 - V_2 + 2V_3 \quad \text{et} \quad v = -V_1 + V_3$$

on trouve, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle V_1 - V_2 + 2V_3, v \rangle \\ &= \langle V_1, v \rangle - \langle V_2, v \rangle + 2\langle V_3, v \rangle \quad (\text{linéarité à gauche}) \\ &= (-\langle V_1, V_1 \rangle + \langle V_1, V_3 \rangle) \quad (\text{linéarité à droite avec } v = -V_1 + V_3) \\ &\quad - (-\langle V_2, V_1 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle) \\ &\quad + 2(-\langle V_3, V_1 \rangle + \langle V_3, V_3 \rangle) \end{aligned}$$

En calculant les produits scalaires deux à deux des vecteurs de la base, on peut conclure.

On a :

$$\begin{cases} \langle V_1, V_1 \rangle = 6 \\ \langle V_1, V_2 \rangle = -3 \\ \langle V_1, V_3 \rangle = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \langle V_2, V_3 \rangle = -2 \\ \langle V_3, V_3 \rangle = 6 \end{cases}$$

D'où

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Commentaires :

Ces deux méthodes permettront toutes deux d'arriver à même une formule générale utilisant une matrice que nous allons d'abord étudier à part.



Définition

Étant donné une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice de Gram de la base $\mathcal{B}$* , la matrice des "produits scalaires de $\mathcal{B}$ " ci-dessous

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

■ Exemple 5 :

Pour la base de l'exemple précédent $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 2)}_{v_2})$ on vu dans les calculs que

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

? Exercice 6

Calculer la matrice de Gram dans l'exercice précédent pour $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Solution

Des calculs de l'exercice précédent, on tire :

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

où il resterait à calculer $\langle v_2, v_2 \rangle$ (qui vaut $\langle v_2, v_2 \rangle = 2$). On peut donc compléter :

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Commentaires :

Reprenons l'exemple précédent et voyons grâce à la bilinéarité à quoi peut bien servir cette matrice, mis à part à faire un beau tableau résumé des données !

Revenons à notre changement de base en méthode matricielle :

Pour des vecteurs donnés dans une base $\mathcal{B}$, on avait revu les formules :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v)$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = M_{\mathcal{B}_0}(u), \quad U = M_{\mathcal{B}}(u)$$

les coordonnées respectives de u dans les bases canoniques et la base $\mathcal{B}$, (de même pour v), puis

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \quad \text{la matrice de passage}$$

Les formules deviennent

$$U_0 = PU, \quad V_0 = PV$$

Rappelons maintenant la formule matricielle du produit scalaire dans la base canonique :

$$\langle u, v \rangle = {}^tU_0V_0$$

Combinons maintenant les deux en remplaçant $U_0 = PU$ et $V_0 = PV$ dans la ligne ci-dessus :

$$\langle u, v \rangle = {}^t(PU)PV = {}^tU{}^tPPV$$

En posant $G = {}^tPP$, on obtient donc une formule sous forme de produit matriciel

$$\langle u, v \rangle = {}^t(PU)PV = {}^tUGV$$

que nous allons tester sur un exemple !

■ Exemple 6 :

Dans l'exemple déjà évoqué dans cette section, avec $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 2)}_{v_2})$, ainsi que $u = (-1, 1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a, b)_{\mathcal{B}}$. Pour $\langle u, v \rangle$, on peut donc procéder de la manière suivante : On pose la matrice de changement de base

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de transposée :

$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$G = {}^tP.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a donc

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} . G . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Commentaires :

Mais quel est donc le rapport avec la matrice de Gram $G_{\mathcal{B}}$ évoquée précédemment ?? Et bien, (les notations sont bien faites !!) c'est la même :

$$G_{\mathcal{B}} = {}^tPP$$

Voyons ça :

En effet, si on note V_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de P , on sait par définition que

$$V_i = M_{\mathcal{B}_0}(v_i) \quad \text{coordonnées dans la base canonique de } v_i$$

On peut donc d'une part calculer matriciellement $\langle v_i, v_j \rangle$ avec

$$\langle v_i, v_j \rangle = {}^tV_iV_j$$

mais si on calcule le produit tPP , par formule de calcul sur les produits de matrice, tV_iV_j est exactement le coefficient dans la ligne i , colonne j de la matrice tPP . On tombe donc bien sur ${}^tPP = G_{\mathcal{B}}$

Commentaires :

| Tout ceci donne donc lieu en général à la formule suivante :

Proposition 6

Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, en notant G la matrice de Gram d'une base $\mathcal{B}$, alors

$$\langle u, v \rangle = {}^tM_{\mathcal{B}}(u) G_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(v)$$

? Exercice 7

Reprenons la base de l'exercice précédent : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Calculer $\langle u, v \rangle$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode matricielle en retrouvant la matrice de Gram à l'aide du calcul $G_{\mathcal{B}} = {}^t P P$.

Solution

On a $\langle u, v \rangle = {}^t M_{\mathcal{B}}(u) G_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(v)$
avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad {}^t P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$G_{\mathcal{B}} = {}^t P P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\langle u, v \rangle = (1 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Remarquons que tout ceci se retrouve par bilinéarité sur un exemple :

■ Exemple 7 :

On avait $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 2)}_{v_2})$ ainsi que $M_{\mathcal{B}}(u) = (-1, 1)$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = (a, b)$, c'est-à-dire :

$$u = -v_1 + v_2, \quad v = av_1 + bv_2$$

avec $\langle u, v \rangle = \langle -v_1 + v_2, v \rangle$
 $= -\langle v_1, v \rangle + \langle v_2, v \rangle$ (linéarité à gauche)

Matriciellement on observe alors que c'est le même calcul que

$$\langle u, v \rangle = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \langle v_2, v \rangle \end{pmatrix}$$

Maintenant, par linéarité à droite sur chaque terme :

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \langle v_2, v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, av_1 + bv_2 \rangle \\ \langle v_2, av_1 + bv_2 \rangle \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a \langle v_1, v_1 \rangle + b \langle v_1, v_2 \rangle \\ a \langle v_2, v_1 \rangle + b \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Mis bout à bout, cela donne : $\langle u, v \rangle = (-1 \quad 1) G \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

II Orthogonalité

II-1 Définitions et propriétés élémentaires

🌿 Définition

Deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$. On note $u \perp v$

Théorème 7 de Pythagore :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Démonstration :

Da la somme de deux vecteurs, on tire l'égalité :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u \perp v &\iff \langle u, v \rangle = 0 \\ &\iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

□

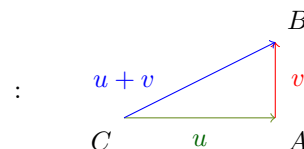
⚠ Remarque :

Ce théorème peut se traduire également de la manière bien connue suivante : Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

C'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$



🌿 Définition

Une famille $(v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^n$ est appelée *base orthogonale* de l'e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$ si :

- $(v_1, \dots, v_s)$ est une base de F
- les vecteurs $v_1, \dots, v_s$ sont deux à deux orthogonaux

■ Exemple 8 :

| La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale.

? Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On admet que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Solution

On note u, v, w respectivement, dans l'ordre cité ci-dessus les vecteurs de $\mathcal{B}$. On observe que $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle u, w \rangle = 0$. la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est ainsi orthogonale.

🌿 Définition

Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^n$ est appelée *base orthonormale* (ou *base orthonormée*) de l'e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$ si :

- $(u_1, \dots, u_s)$ est une base de F
- les vecteurs $u_1, \dots, u_s$ sont deux à deux orthogonaux Dans ce cas, on dit que
- les vecteurs $u_1, \dots, u_s$ sont tous de norme 1.

la matrice $P = \mathcal{M}_{B_0}(\mathcal{F})$ est une *matrice orthogonale*.

? Exercice 9

Dans l'exercice précédent, montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthonormée.

Solution

Avec les notations de l'exercice précédent, il suffit par exemple de constater que $\|u\|^2 = 3 \neq 1^2$. Ainsi, la base n'est pas orthonormée.



Remarque :

Pour transformer une base orthogonale en une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme.

■ Exemple 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on a vu que la famille $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$ était une base orthogonale,

ainsi la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée car

$$\|v_1\| = \sqrt{3}, \|v_2\| = \sqrt{2}, \|v_3\| = \sqrt{6}$$

et donc

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \|v_1\| = 1$$

de même

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \right\| = 1, \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{6}} v_3 \right\| = 1$$

? Exercice 10

Soit la base orthogonale (admis pour l'instant) de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la base orthonormée issue de $\mathcal{B}$.

Solution

$$\text{On a } \mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Commentaires :

Notons que dans l'exemple précédent, la matrice de Gram de la base orthogonale (v_1, v_2, v_3) en question était

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale car, comme la base est orthogonale, tous les produits scalaires $\langle v_i, v_j \rangle$ sont nuls sauf les $\langle v_i, v_i \rangle$ qui sont égaux à $\|v_i\|^2$. De la même manière, la matrice de Gram de la base orthonormée $(\frac{1}{\sqrt{3}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, \frac{1}{\sqrt{6}}v_3)$ est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces principes restent vrais quelquesoit la famille orthogonale ou la famille orthonormée de n éléments au sens de la remarque qui va suivre :



Remarque :

Une famille de n vecteurs est orthogonale ssi sa matrice de Gram est diagonale.
 Une famille de n vecteurs est orthonormée ssi sa matrice de Gram est égale à la matrice identité.

Commentaires :

| Les deux exemples ci-dessous montrent comment utiliser la remarque dans le sens $\Leftarrow$:

■ Exemple 10 :

Pour la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
 la matrice de Gram est

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c'est donc une famille orthogonale.

■ Exemple 11 :

Pour la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice de Gram est

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est donc une famille orthonormée.

Commentaires :

Le sens $\Rightarrow$ de la deuxième équivalence citée dans la remarque précédente :
 "Une famille de n vecteurs est orthonormée ssi sa matrice de Gram est égale à la matrice identité." implique notamment que, si $u, v \in \mathbb{R}^n$ et qu'on dispose d'une base $\mathcal{B}$ orthonormée, la formule

$$\langle u, v \rangle = {}^tM_{\mathcal{B}}(u) \cdot \underbrace{G_{\mathcal{B}}}_{Id} \cdot M_{\mathcal{B}}(v) = {}^tM_{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(v)$$

Autrement dit, si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

Ceci signifie que la formule est la même que si on était dans la base canonique :

Propriété 8

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_0$ la base canonique. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\underbrace{\langle u, v \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n}_{\text{formule de définition}} = \underbrace{\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n}_{\text{formule du commentaire précédent}}$$

ainsi que par suite :

$$\|u\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$$

Commentaires :

Cette propriété signifie que la formule du produit scalaire est applicable quelquesoit la base **orthonormée** dans laquelle on se trouve, et pas seulement dans la base canonique. Ceci permet même de ne pas connaître la base $\mathcal{B}$ en détail !

■ Exemple 12 :

Supposons que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. Calculer le produit scalaire de $u = (1, 0, -2, 1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (0, 2, 1, 1)_{\mathcal{B}}$.

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on a

$$\langle u, v \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 = -1$$

Commentaires :

Cette propriété permet ainsi de démontrer très facilement le rapport entre angle et produit scalaire :

Corollaire

Dans $\mathbb{R}^2$, si θ est l'angle (géométrique) entre les vecteurs u et v , on a bien

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

Démonstration :

On note $u = (a, b)$ dans la base canonique et on pose $w = (-b, a)$. Les deux vecteurs u, w étant orthogonaux et non colinéaires, on observe qu'ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\mathcal{B} = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|} \right)$ une base orthonormée, dans laquelle

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (\|u\|, 0)$$

On pose $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

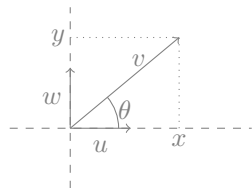
$$M_{\mathcal{B}}(v) = (x, y)$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on sait que

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \times x + 0 \times y$$

Or, par propriété "classique" des angles

$$x = \|v\| \cos \theta, \quad y = \|v\| \sin \theta$$



et donc

$$\square \quad \langle u, v \rangle = \|u\| \times \|v\| \cos \theta + 0 \times \|v\| \sin \theta = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

Commentaires :

Si on observe deux vecteurs non nuls orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$, graphiquement, on voit bien qu'ils sont non colinéaires et donc forment une famille libre. Dans ce cas, dire qu'une famille est constituée de deux éléments orthogonaux suffirait à justifier que c'est une base. Nous allons voir que ce principe se généralise à $\mathbb{R}^n$:

Théorème 9

Si $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, alors c'est une famille libre.

Démonstration :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r}_v = 0$$

Prenons ce vecteur et appliquons lui le produit scalaire par v_1 . Par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle v, v_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \lambda_r \langle v_r, v_1 \rangle$$

Or, les vecteurs étant 2 à 2 orthogonaux, les produits scalaires sont tous nuls sauf $\langle v_1, v_1 \rangle$ qui vaut $\|v_1\|^2$. Ainsi,

$$\langle v, v_1 \rangle = \lambda_1 \|v_1\|^2$$

Or, le vecteur v étant nul, on a de plus

$$\langle v, v_1 \rangle = \langle \vec{0}, v_1 \rangle = 0$$

et donc

$$0 = \lambda_1 \|v_1\|^2.$$

Le vecteur v_1 étant non nul, on obtient alors

$$\lambda_1 = 0$$

En poursuivant de proche en proche avec $\langle v, v_2 \rangle$, puis $\langle v, v_3 \rangle$, on finit par montrer que tous les λ_i sont nuls. Ainsi, la famille $(v_1, \dots, v_r)$ est libre. $\square$

Corollaire

Si $(v_1, \dots, v_s)$ est une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\dim F = s$, alors c'est une base de F .

Démonstration :

D'après le théorème précédent, la famille est libre. Comme elle est de cardinal s dans F de dimension s , c'est bien une base de F . $\square$

■ Exemple 13 :

Reprenons la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On demande de montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons P la matrice de coordonnées de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice de Gram de P : ${}^t P P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

La matrice est diagonale. On en déduit que c'est une famille orthogonale, de plus on a trois éléments dans $\mathcal{B}$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

? Exercice 11

Montrer que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Solution

En posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on a ${}^t P P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$

La matrice est diagonale, donc la base est orthogonale.

Commentaires :

Une conséquence de tout ceci est qu'il existe certaines matrices pour lesquelles l'inversibilité est immédiate et pour lesquelles le calcul de l'inverse n'est qu'une formalité :

Corollaire

On se donne P une matrice carrée.

- Si les vecteurs colonnes de P forment une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux (i.e. tPP est diagonale), alors :
 P est inversible
- Si de surcroît les vecteurs sont orthonormés (i.e. ${}^tPP = Id$), alors
 P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$

■ Exemple 14 :

Montrons que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

La matrice de Gram des vecteurs colonnes est

$$G = {}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, on en déduit que les vecteurs de P forment une famille libre et que P est inversible. (Mais ATTENTION, on n'a pas l'inverse pour autant!) L'inverse de P est en fait

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

■ Exemple 15 :

Montrons que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ est inversible.

C'est une base orthonormée, donc P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$

II-2 Traduction des formules de changement de base dans une base orthonormée

Commentaires :

Si on se donne une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, on rappelle que la formule générale de changement de base pour un vecteur u donné dans la base $\mathcal{B}_0$ (par exemple la base canonique) est

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)M_{\mathcal{B}_0}(u)$$

où l'on sait que

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})}_{\text{notée } P}^{-1} = P^{-1}$$

Nous avons vu que si la base était orthonormée, alors

$$P^{-1} = {}^tP$$

La formule se transforme donc en

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^tPM_{\mathcal{B}_0}(u)$$

? Exercice 12

Soit $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Déterminer dans cette base orthonormée les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$ à l'aide de la remarque précédente.

Solution

Vous devez trouver $u = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, -2\sqrt{2})_{\mathcal{B}}$.

Commentaires :

Il existe également une autre manière de procéder directement avec les produits scalaires, qui va nous permettre un peu plus tard dans le chapitre de faire des projections orthogonales :

Propriété 10

Si $(u_1, \dots, u_s)$ est une base orthonormée de $F \subset \mathbb{R}^n$, alors, pour tout $u \in F$, on a

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_s \rangle u_s$$

Démonstration :

Comme $(u_1, \dots, u_s)$ est une base, il existe forcément des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tels que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$$

Or, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle u, u_1 \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_s \underbrace{\langle u_s, u_1 \rangle}_{=0} = \alpha_1$$

de même, en calculant $\langle u, u_2 \rangle, \dots, \langle u, u_n \rangle$, on trouve

$$\alpha_i = \langle u, u_i \rangle \quad \forall i = 1 \dots, n$$

□

Commentaires :

Ceci signifie qu'on a "directement" $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_n \rangle \end{pmatrix}$
où on a noté $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

■ Exemple 16 :

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$ à l'aide de la propriété précédente.

On sait déjà que la base est orthonormée. On peut donc appliquer la formule de la propriété précédente, sous réserve de calculer les 3 produits scalaires en question. Si on note U, U_i les vecteurs représentant respectivement u, u_i dans la base canonique, on a

$$\langle u, u_1 \rangle = {}^t U \cdot U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et

$$\langle u, u_2 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle u, u_3 \rangle = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

En conclusion,

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_1 - 2\sqrt{2}u_3)$$

? Exercice 13

Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, déterminer les coordonnées de $u = (1, 1, 1)$.

Solution

Vous devez trouver $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, 0 \right)_{\mathcal{B}}$



Remarque :

Les trois produits scalaires de l'exemple précédent ont été obtenus en calculant ${}^t U \cdot U_i$. Rappelons que le produit scalaire est symétrique et ainsi que

$${}^t U \cdot U_i = \langle u, u_i \rangle = \langle u_i, u \rangle = {}^t U_i \cdot U$$

Les trois lignes du vecteur colonne $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \langle u, u_3 \rangle \end{pmatrix}$ sont donc issues du calcul

de ${}^t U_i \cdot U$. C'est exactement la même chose que de dire que la colonne précédente a été obtenue en une seule fois par le calcul

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^t P \cdot U$$

ce qui revient donc exactement au même que de dire que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = {}^t P M_{\mathcal{B}_0}(u)$$

ce qui était la formule annoncée au début du paragraphe. (Ouf!!)

Moralité : pour ce calcul là, on peut choisir indifféremment l'une ou l'autre technique, il n'y a pas de différence de temps de calcul.

Commentaires :

Que faire maintenant si la base n'est pas orthonormée, mais "simplement" orthogonale. On a vu précédemment que toute base orthogonale pouvait donner lieu à une autre base orthonormée en divisant chaque vecteur par sa norme. Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est alors une base orthogonale, ceci signifie que $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$ est une base orthonormée. On peut facilement passer de l'une à l'autre de la façon suivante : Si on note $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, la propriété précédente nous dit que la formule de décomposition dans la base $(u_1, \dots, u_n)$ donne :

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n$$

Or, on a $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, d'où, en remplaçant dans la formule ci-dessus :

$$u = \langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

mais les $\|v_i\|$ ne sont que des scalaires, ils peuvent donc être sortis du produit scalaire :

$$u = \langle u, v_1 \rangle \frac{1}{\|v_1\|} \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \langle u, v_n \rangle \frac{1}{\|v_n\|} \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

ce qui, en simplifié, donne

$$u = \underbrace{\frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}}_{\alpha_1} v_1 + \dots + \underbrace{\frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}}_{\alpha_n} v_n$$

Ainsi, les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les coefficients de u dans la base $(v_1, \dots, v_n)$, alors que les $\langle u, u_i \rangle$ sont les coefficients de u dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. Nous venons en fait de faire la démonstration du corollaire ci-dessous :

Corollaire

Si $(v_1, \dots, v_s)$ est une base orthogonale de $F \subset \mathbb{R}^n$, alors, pour tout $u \in F$, on a

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_s \rangle}{\|v_s\|^2} v_s$$

Démonstration :

cf. commentaires ci-dessus. $\square$

■ Exemple 17 :

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (v_1, v_2, v_3)$.

Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, -1, 1)$

Ayant déjà fait le calcul, on sait que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale. Ainsi,

$$u = \langle u, v_1 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + \langle u, v_2 \rangle \frac{v_2}{\|v_2\|^2} + \langle u, v_3 \rangle \frac{v_3}{\|v_3\|^2}$$

$$\text{Or, } \langle u, v_1 \rangle = {}^t M_{\mathcal{B}_0}(u) \cdot M_{\mathcal{B}_0}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

puis de la même manière

$$\langle u, v_2 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle u, v_3 \rangle = -4$$

En conclusion,

$$u = \frac{v_1}{3} - 4 \cdot \frac{v_3}{6} = \frac{1}{3}(v_1 - 2v_3)$$



Remarque :

Pour cette base là, on ne PEUT PAS appliquer de formule du type ${}^t P U$ car dans la formule du changement de base, la matrice P n'est PAS d'inverse ${}^t P$.

? Exercice 14

Dans la base orthogonale $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, déterminer les coordonnées de $u = (1, 1, 1)$.

Solution

Vous devez trouver $u = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)_{\mathcal{B}}$

II-3 Diagonalisation dans une base orthonormée

Commentaires :

Cette partie va concerner la diagonalisation de matrice. Nous allons voir que dans certains cas de matrices, on peut systématiquement obtenir une matrice diagonale, de surcroît dans une base très pratique.

Théorème 11 spectral

Toute matrice A **symétrique réelle** est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres au sens suivant : il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice P de vecteurs propres orthonormés et deux à deux orthogonaux telle que

$$A = P D P^{-1} \quad \text{avec } P^{-1} = {}^t P$$

■ Exemple 18 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sans faire de calcul, on voit que cette matrice est symétrique et RÉELLE, on sait alors que cette matrice est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres. (Mais en revanche, on ne sait pas lesquels)

On peut le vérifier par calcul :

$$Sp(M) = \{2, \sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$$

et les espaces propres sont :

$$E_2 = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad ; \quad E_{\sqrt{7}} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} \\ \sqrt{7} - 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad ; \quad E_{-\sqrt{7}} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} - 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Les trois vecteurs sont bien 2 à 2 orthogonaux.

Corollaire

Les espaces propres d'une matrice **symétrique réelle** sont deux à deux orthogonaux.



IMPORTANCE DES HYPOTHÈSES !

Les matrices diagonalisables qui ne sont pas symétriques ou non réelles, ne sont pas nécessairement diagonalisables dans une base orthonormée (ni même orthogonale.)

■ Contre-Exemple(s) :

La matrice réelle $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ **non symétrique** est diagonalisable de valeur propre 0, -4, 4 dans une base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(Faire le calcul pour s'entraîner)

Mais cette base n'est pas du tout orthogonale et il n'existe pas d'autre base de vecteurs propres pouvant être diagonale. (à méditer)...



ET SI LA MATRICE N'EST PAS RÉELLE ?

De la même façon, l'hypothèse "matrice réelle" est importante également :

■ Contre-Exemple(s) :

Prenons la matrice **non réelle** mais **symétrique** $M = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et cherchons des valeurs propres :

(Petite astuce au passage :) Comme il s'agit d'une matrice d'ordre 2, on peut utiliser le déterminant de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vap} &\Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda Id) < 2 \\ &\Leftrightarrow M - \lambda Id \text{ non inversible} \Leftrightarrow \det(M - \lambda Id) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une seule valeur propre, c'est 1. Or, on a déjà vu lors d'un exercice précédent que ce type de configuration ne pouvait donner lieu à une matrice diagonalisable.

En conclusion, M est une matrice symétrique mais non diagonalisable...

III Distance et projections orthogonales

Commentaires :

Cette dernière partie du cours va nous donner des formules qui permettent de calculer des coordonnées de projections ainsi que des distances dans des espaces $\mathbb{R}^n$ de manière immédiate grâce à des produits scalaires.



Définition

On appelle **distance** entre les deux vecteurs (ou points) $u, v \in \mathbb{R}^n$ le nombre $\|u - v\|$.



Définition et Proposition

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $M \in \mathbb{R}^n$. Il existe un nombre d tel que

$$\{\|M - a\| \mid a \in A\} \quad \text{soit minimal}$$

On appelle alors **distance de M à A** le nombre

$$d(M, A) = \inf\{\|M - a\| \mid a \in A\}$$

Démonstration :

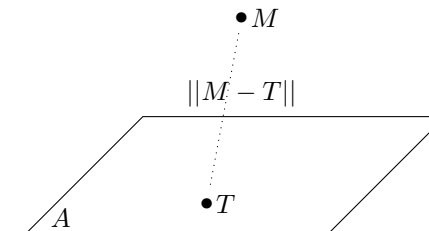
Cette démonstration repose simplement sur le fait que

$$\emptyset \neq \{\|M - a\| \mid a \in A\} \subset [0; +\infty[$$

Or, tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. $\square$

Explications sur un exemple :

Prenons par exemple un plan A dans $\mathbb{R}^3$, M un point de $\mathbb{R}^3$ non compris dans A . On regarde toutes les distances $\|M - T\|$ avec T qui varie dans A :



On prend ensuite la plus petite de ces valeurs, et on affirme alors que c'est la distance entre M et le plan A .

Commentaires :

Voyons dans la suite comment obtenir des formules pour cette distance si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Pour commencer, on va la caractériser par des projections orthogonales. Il faut donc commencer par définir ce qu'est une "projection orthogonale".



Définition

Un vecteur u est *orthogonal à un espace* F si u est orthogonal à tout vecteur de F .
On note $u \perp F$.



Définition

Pour tout sev $F \subset \mathbb{R}^n$, on note $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp F\}$, i.e. $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v \forall v \in F\}$. On appelle cet espace *l'orthogonal de* F .



Définition

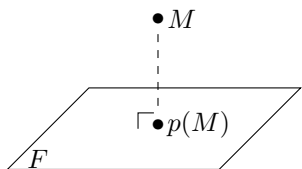
On appelle *projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel* F de $\mathbb{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \bullet & p(u) \in F & \forall u \in \mathbb{R}^n \\ \bullet & p(u) - u \perp F & \forall u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $p(u) - u \perp F$ signifie que $p(u) - u \perp v$ pour tout $v \in F$.

Explications sur un exemple :

Reprenons par exemple un plan F dans $\mathbb{R}^3$, M un point de $\mathbb{R}^3$ non compris dans F . Graphiquement, la projection orthogonale se présente comme suit :



$p(M) \in F$ et l'angle droit signifie que $(p(M) - M) \perp F$.

Théorème 12

Si F est un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique projection orthogonale sur F .

Démonstration : admise. $\square$



Remarque :

Si $u \in F$, alors $p(u) = u$:

Graphiquement, sur le schéma précédent, on peut bien observer ce phénomène : si M est dans le plan A , alors $p(M)$ est confondu avec M .

De manière générale : si $u \in F$, alors $\langle u - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in F$, d'où $u - u \perp F$.

Les conditions sont donc remplies pour que $u = p(u)$ par définition de la projection et par unicité de la projection.

Corollaire

Pour tout sev $F \subset \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique décomposition $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ telle que

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

(x_F est la projection orthogonale de x sur F .)

Démonstration :

c'est la traduction immédiate de la définition et du théorème d'unicité précédent.

$\square$



Remarque :

Si un vecteur u est exprimé dans une base orthogonale relative à l'espace F sur lequel on projette, alors l'expression de la projection est triviale :

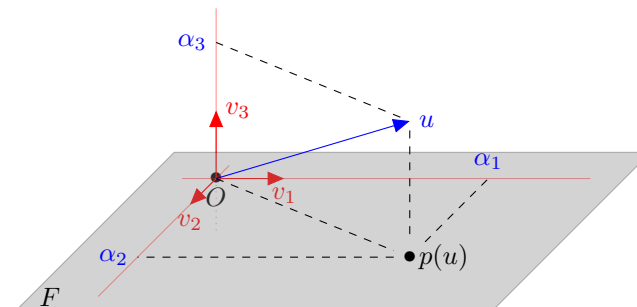
Propriété 13

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_s)$.

Si p est une projection orthogonale sur F et que $M_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors

$$p(u) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s, \quad \text{i.e.} \quad M_{\mathcal{B}}(p(u)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, 0, \dots, 0).$$

Explications sur un exemple : Reprenons par exemple sev de dimension 2 F dans $\mathbb{R}^3$, u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non compris dans F . Graphiquement, dans le repère orthogonal (v_1, v_2, v_3) , où $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$, la projection orthogonale se présente comme suit :



où on observe bien que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

et ensuite que sa projection est

$$p(u) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

on a donc simplement retiré la partie en v_3 pour obtenir $p(u)$ à partir de u .

Démonstration :

Par hypothèse, on a

$$u = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s}_{=H \in F} + \underbrace{\alpha_{s+1} v_{s+1} + \dots + \alpha_n v_n}_{\perp F}$$

Donc

$$H \in F \quad \text{et} \quad u - H \perp F$$

ce qui signifie bien par définition et unicité de la projection que

$$p(u) = H$$

□

Commentaires :

Ceci signifie en fait que pour trouver la projection orthogonale d'un vecteur sur F , on "garde les coordonnées" dans F et on "retire" celles qui sont orthogonales à F .

Quand le vecteur est exprimé dans une base adéquate, le projeté est donc immédiat (cf exemple ci-dessous)

■ Exemple 19 :

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ la base orthogonale (de vecteurs notés respectivement (v_1, v_2, v_3)) que nous avons étudiée lors des divers exemples de ce chapitre. On pose $A = \text{Vect}(v_1, v_2)$ (plan de $\mathbb{R}^3$). Soit

$$u = (2, -1, 3)_{\mathcal{B}} = 2v_1 - v_2 + 3v_3$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthogonale, alors la projection de u sur le plan A est

$$p(u) = (2, -1, 0)_{\mathcal{B}} = 2v_1 - v_2$$

Commentaires :

| Mais qu'advient-il si u n'est pas exprimé dans une telle base ?

Théorème 14

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ et que $(u_1, \dots, u_s)$ est une base orthonormée de F , alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_s \rangle u_s$$

Démonstration :

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $H = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_s \rangle u_s$. On veut montrer que $H = p(u)$, c'est-à-dire que

$$H \in F \quad \text{et} \quad H - u \perp F.$$

On a, par définition,

$$H \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_s) = F$$

La première condition est donc vérifiée.

Vérifions maintenant que $u - H \perp F$, i.e. $\langle u - H, v \rangle = 0 \quad \forall v \in F$.

Comme $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_s)$, par bilinéarité du produit scalaire, ceci revient à montrer que

$$\langle u - H, u_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \langle u - H, u_i \rangle &= \langle u, u_i \rangle - \langle H, u_i \rangle \\ &= \langle u, u_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^s \langle u, u_j \rangle u_j, u_i \right\rangle \\ &= \langle u, u_i \rangle - \sum_{j=1}^s \langle u, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_i \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j} \\ &= \langle u, u_i \rangle - \langle u, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$H - u \perp F$$

Par condition d'unicité sur la projection orthogonale, les conditions étant remplies, on a bien

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_s \rangle u_s = H = p(u)$$

□

Corollaire

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ et que $(v_1, \dots, v_s)$ est une base orthonormée de F . Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_s \rangle}{\|v_s\|^2} v_s$$

■ Exemple 20 :

Soit $F = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminons les coordonnées de la projection orthogonale de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur F .

La base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ de F donnée ci-dessus étant orthogonale, on utilise simplement la formule

$$p(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

i.e.

$$p(u) = \frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

et donc

$$p(u) = \frac{1}{6} (5, 2, -1)$$

Commentaires :

| Voici ci-dessous quelques propriétés des projections que nous expliquerons juste après

Propriété 15

Si p est une projection orthogonale sur un sev F de $\mathbb{R}^n$, alors

$$p \circ p = p \quad ; \quad \mathfrak{Im} p = F \quad ; \quad p(u) = \vec{0} \quad \forall u \perp F$$

Démonstration :

- Montrons que $p \circ p = p$:

On pose $H = p(u) \in F$.

Nous avons vu précédemment que, comme $H \in F$, on a $p(H) = H$, ce qui signifie que $p \circ p(u) = p(u)$!

- Montrons que $\mathfrak{Im} p = F$:

On sait par définition que $\mathfrak{Im} p \subset F$. Il reste à montrer que $F \subset \mathfrak{Im} p$.

Soit donc $f \in F$. On sait que $p(f) = f$. Donc $f \in \mathfrak{Im} p$!

- Montrons que $p(u) = \vec{0} \quad \forall u \perp F$:

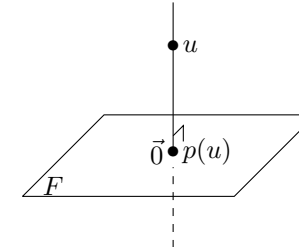
$\vec{0} \in F$ et $u - \vec{0} \perp F$, donc $p(u) = \vec{0}$ par unicité. $\square$

Commentaires :

- $p \circ p = p$ signifie que si on projette et qu'on recommence la projection, on ne bouge pas. En effet, $H = p(M)$ est déjà sur F , donc recommencer revient donc à dire que $p(H) = H$.

- $\mathfrak{Im} p \subset F$ car on projette sur F , mais tout élément de F peut être considéré comme une projection.

- tous les éléments orthogonaux à F seront d'image nulle :



Commentaires :

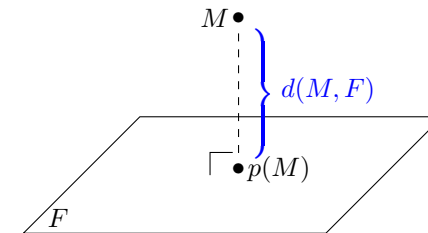
Finalement, voyons quel rapport a cette projection avec nos calculs de longueurs et comment nous allons pouvoir établir des formules de calcul. En premier lieu, la distance entre un point M et un sev F est donné grâce à la projection de M de la façon suivante :

Théorème 16

Si F est un sev de $\mathbb{R}^n$, pour tout point $M \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d(M, F) = \|M - p(M)\|$$

où p est la projection orthonormale sur F .



Démonstration :

Montrons que $\|M - p(M)\| = \inf(\|M - y\| \mid y \in F)$.

Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} \|M - y\|^2 &= \left\| \underbrace{M - p(M)}_{\perp F} + \underbrace{p(M) - y}_{\in F} \right\|^2 \\ &\stackrel{\text{Pythagore}}{=} \|M - p(M)\|^2 + \|p(M) - y\|^2 \end{aligned}$$

— Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ —

Ce ceci, on tire en particulier

$$||M - y||^2 \geq ||M - p(M)||^2$$

d'où

$$||M - y|| \geq ||M - p(M)||$$

Ainsi, $||M - p(M)||^2$ étant constant,

$$d(M, F) \geq ||M - p(M)||.$$

De plus, pour $y = p(M) \in F$, on trouve l'égalité. La borne inférieure est donc atteinte, ainsi

$$d(M, F) = ||M - p(M)||$$

□

Commentaires :

Venons en maintenant à ces fameuses formules de calcul de distance données dans deux cadres : soit on dispose d'une base orthormée de F , soit seulement d'une base orthogonale.

Corollaire

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec $(u_1, \dots, u_s)$ base de F , on a

$$d(M, F)^2 = \left\| \sum_{i=s+1}^n \langle M, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \sum_{i=s+1}^n \langle M, u_i \rangle^2$$

Démonstration :

Par formule de décomposition dans la base orthogormée $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$, on a

$$M = \langle M, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle M, u_n \rangle u_n$$

Par formule de projection :

$$p(M) = \langle M, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle M, u_s \rangle u_s$$

et donc

$$M - p(M) = \langle M, u_{s+1} \rangle u_{s+1} + \dots + \langle M, u_n \rangle u_n$$

D'où

$$\begin{aligned} d(M, F)^2 &= ||M - p(M)||^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \langle M, u_{s+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle M, u_n \rangle \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{B}}^2 \\ &= 0^2 \dots + 0^2 + \langle M, u_{s+1} \rangle^2 + \dots + \langle M, u_n \rangle^2 \\ &\quad \text{car la base } \mathcal{B} \text{ est orthonormée} \end{aligned}$$

ou alors on démontre ceci en utilisant la formule de Pythagore :

$$\begin{aligned} d(M, F)^2 &= ||M - p(M)||^2 \\ &= ||\langle M, u_{s+1} \rangle u_{s+1} + \dots + \langle M, u_n \rangle u_n||^2 \\ &= ||\langle M, u_{s+1} \rangle u_{s+1}||^2 + \dots + ||\langle M, u_n \rangle u_n||^2 \quad \text{car } \mathcal{B} \text{ est orthogonale} \\ &= \langle M, u_{s+1} \rangle^2 \underbrace{||u_{s+1}||^2}_{=1} + \dots + \langle M, u_n \rangle^2 \underbrace{||u_n||^2}_{=1} \\ &= \langle M, u_{s+1} \rangle^2 + \dots + \langle M, u_n \rangle^2 \end{aligned}$$

□

■ Exemple 21 :

Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$. Déterminer $d(M, F)$ avec $M = (2, 3, -1)$.

Les vecteurs $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ sont orthogonaux. Une base orthogonale de l'espace est par exemple $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, -1), (-1, 2, -1))$ (déjà vu précédemment) et une base

orthonormée est $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}_{u_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)}_{u_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)}_{u_3} \right)$ Ainsi,

$$d(M, F)^2 = \langle M, u_3 \rangle^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{6}} \right)^2$$

et donc

$$d(M, F) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Corollaire

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ avec $(v_1, \dots, v_s)$ base de F , on a

$$d(M, F)^2 = \left\| \sum_{i=s+1}^n \langle M, \frac{v_i}{||v_i||} \rangle \frac{v_i}{||v_i||} \right\|^2 = \sum_{i=s+1}^n \langle M, \frac{v_i}{||v_i||} \rangle^2 = \sum_{i=s+1}^n \frac{\langle M, v_i \rangle^2}{||v_i||^2}$$

■ Exemple 22 :

Soit $F = Vect((1, 1, 1), (1, 0, -1))$. Déterminer $d(M, F)$ avec $M = (2, 3, -1)$.

Les vecteurs $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ sont orthogonaux. Une base orthogonale de l'espace est par exemple $\mathcal{B} = (\underbrace{(1, 1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, 0, -1)}_{v_2}, \underbrace{(-1, 2, -1)}_{v_3})$ (déjà vu précédemment) Ainsi,

$$d(M, F)^2 = \frac{\langle M, v_3 \rangle^2}{\|v_3\|^2} = \frac{5^2}{6}$$

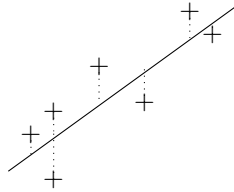
et donc

$$d(M, F) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Cas particulier : Principe des moindres carrés et projection

On considère un nuage de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$. On note $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

On rappelle que le principe des moindres carrés consiste à déterminer une droite (d'équation $y = ax + b$) se rapprochant le plus possible du nuage au sens "vertical", c'est-à-dire de trouver des coefficients a, b tels que $\sum_{k=1}^n \|y_i - ax_i - b\|^2$ soit le plus petit possible :



(i.e. on veut ici minimiser globalement les normes des parties en pointillés.)

On remarque que si on pose $U = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, pour $v = aX + bU$, on a

$$\|Y - v\|^2 = \sum_{k=1}^n \|y_i - ax_i - b\|^2$$

La problématique consiste donc en réalité à trouver le point $v \in F = Vect(X, U)$ tel que $\|Y - v\|^2$ soit le plus petit possible. D'après le théorème précédent, c'est la projection de Y sur F . Autrement dit :

La droite est optimale ssi $aX + bU = p_{Vect(X, U)}(Y)$

? Exercice 15

On considère le nuage de points associé aux données suivantes :

X	1	2	-2	1	-3
Y	0	-1	3	2	-2

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1, \dots, 1), (6, 11, -9, 6, -14)\}$, est une base orthogonale de $F = Vect(X, U)$ (où on utilise les notations de l'explication ci-dessus.)
2. Déterminer les coefficients de la droite de régression associée aux données par la méthode des moindres carrés grâce à la méthode citée ci-dessus.

Solution

Notons $V_1 = (6, 11, -9, 6, -14)$ et $X = (1, 2, -2, 1, -3)$.

1. On montre facilement que $\langle U, V_1 \rangle = 0$. On constate également que $V_1 = U + 5X \in F$ où F est de dimension 2. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est bien une base orthogonale de F .

2. On sait que a, b correspondent au vecteur

$$aX + bU = p_F(Y) = \frac{\langle Y, U \rangle}{\|U\|^2} U + \frac{\langle Y, V_1 \rangle}{\|V_1\|^2} V_1 = \frac{2}{5} U + \frac{2}{470} V_1 = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{235} \right) U + \frac{1}{235} \cdot 5X$$

Or a est le coefficient en X et b le coefficient en U , d'où

$$a = \frac{5}{235} = \frac{1}{47} \simeq 0,02, \quad b = \frac{95}{235} = \frac{19}{47} \simeq 0.4$$