

M4.2 - Mouvement des particules chargées

Table des matières

1 Force de Lorentz	1
1.1 Caractéristiques de la force de Lorentz	1
1.2 Puissance de la force de Lorentz	2
2 Particule chargée dans un champ électrique uniforme et stationnaire	2
3 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme stationnaire	4

1 Force de Lorentz

1.1 Caractéristiques de la force de Lorentz

Définition : la force de Lorentz

La force électromagnétique $\vec{f}_L$, dite force de Lorentz ^a, subie par une particule de **masse** m et de **charge** q_0 , se trouvant, à la date t , au point M du référentiel galiléen $\mathcal{R}$, en présence d'un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et d'un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M, t)$, est donnée par :

$$\vec{f}_L = q_0 \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \right)$$

a. Hendrik Antoon Lorentz (18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas - 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien néerlandais. Il est co-lauréat avec Pieter Zeeman du prix Nobel de physique de 1902. Il a reçu en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918.

Dans le cas de **champs uniformes et stationnaires** nous avons :

$$\vec{f}_L = q_0 \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On remarque que la force de Lorentz est la somme de la **force électrostatique** :

$$\vec{f}_{\text{el}} = q_0 \vec{E}$$

et de la **force magnétique** :

$$\vec{f}_{\text{mag}} = q_0 \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Compte tenu des ordres de grandeurs, le poids $m\vec{g}$ de la particule pourra toujours être **négligé** devant la force de Lorentz. On négligera, à priori, toute force de frottements, sauf si cela est précisé.

1.2 Puissance de la force de Lorentz

Calculons la puissance de la force de Lorentz subie par la particule de charge q_0 :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_L) = q_0 \vec{E} \cdot \vec{v} + q_0 \underbrace{\left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ 0}}$$

On voit que la force magnétique ne travaille pas puisque sa puissance est nulle. Au final :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_L) = q_0 \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Propriété : La force magnétique ne travaille pas

Un champ électrique peut fournir un travail moteur ou résistant à une charge, et donc modifier son énergie cinétique.

En revanche, le travail de la force magnétique sur une charge est forcément nul. L'action d'un champ magnétique sur une charge sera en général de courber la trajectoire de la charge sans lui fournir d'énergie.

2 Particule chargée dans un champ électrique uniforme et stationnaire

Pour obtenir un champ électrique uniforme parallèle à l'axe (Ox) , il faut créer un potentiel qui varie linéairement selon l'axe (Ox) . Pour cela, il suffit d'appliquer une différence de potentiel (ou tension) $U = V_1 - V_2$ entre deux grilles métalliques (ou électrodes) planes perpendiculaires à l'axe (Ox) (et donc parallèles entre elles) et distantes de d . **On admet que le champ créé entre les deux électrodes est alors uniforme.**

On note $V_1 = V(x = 0)$ le potentiel de la grille situé en $x = 0$ et $V_2 = V(x = d)$ le potentiel de la grille situé en $x = d$.

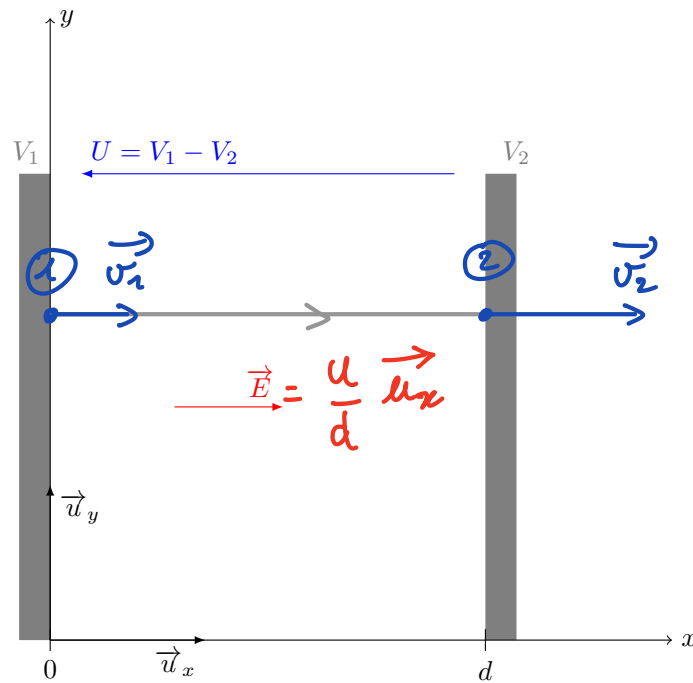


Figure 1 – Création d'un champ électrique uniforme

Compte-tenu du caractère uniforme du champ et des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = d$, on obtient :

$$V(x) = -Ex + V_1 = -\frac{U}{d}x + V_1 \text{ et } \vec{E} = E \vec{u}_x = \frac{U}{d} \vec{u}_x$$

Démonstration : cf démo des chap. 4.1.

Lorsqu'une particule de charge $q > 0$ est placée dans ce champ au niveau de la grille au potentiel V_1 avec une vitesse de norme v_1 pour être accélérée et arriver ensuite au niveau de la

grille au potentiel V_2 avec une vitesse de norme v_2 , son énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ se conserve en l'absence de forces non conservatives (frottements négligés), on aura donc :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1}_{\text{position ①}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2}_{\text{position ②}}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2 \frac{q}{m} (V_1 - V_2)$$

Dans le cas général, la particule pourra donc être accélérée en choisissant positif le signe de $q(V_1 - V_2) = qU$ qui est homogène à une énergie que l'on peut exprimer en électron-volts ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule M de masse m et de charge q injectée au niveau de la plaque 1 nous donne :

$$m \vec{a} = qE \vec{u}_x \Rightarrow \vec{a} = \frac{qE}{m} \vec{u}_x$$

Il s'agit donc d'un mouvement à vecteur accélération constant ¹ dont on peut trouver les équations horaires du mouvement par deux intégrations successives connaissant la vitesse initiale $\vec{v}_1$ et la position initiale, comme nous l'avons déjà fait pour un mouvement de chute libre d'un point matériel de masse m .

Si $\vec{v}_1$ est colinéaire à $\vec{E}$, le mouvement est rectiligne.

Si $\vec{v}_1$ n'est pas colinéaire à $\vec{E}$, le mouvement est parabolique et sa concavité est tournée vers la direction de $q\vec{E}$.

3 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme stationnaire

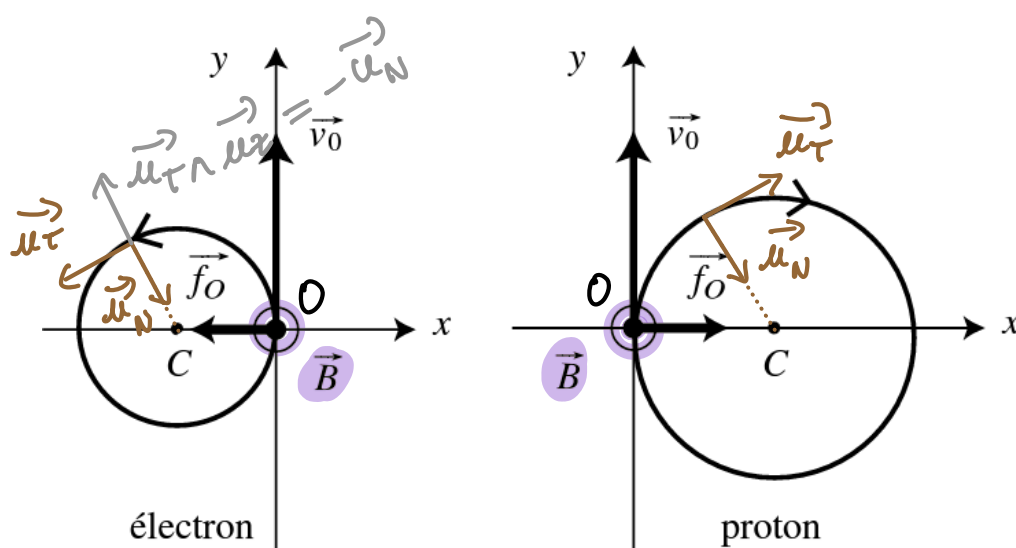
On considère une particule de masse m et de charge q qui pénètre en O à l'instant initial avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un **champ magnétique uniforme et indépendant du temps** $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$.

On peut noter que la puissance de cette force magnétique est nulle donc d'après le théorème de l'énergie cinétique, le mouvement est uniforme :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{mag}}) = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \text{cst} = v_0$$

Expérimentalement, on constate que la trajectoire des particules est circulaire dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$. Le sens de parcours et la position du centre de la trajectoire dépendent de la masse de la particule et de sa charge.

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/q_dans_E1.php

Figure 2 – Mouvement d'une particule dans $\vec{B}$ perpendiculaire à la vitesse initiale

On peut étudier cette trajectoire à l'aide du repère de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ défini dans le chapitre M1 de cinématique du point. On a montré que le mouvement est uniforme à la vitesse v_0 donc

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

et on obtient :

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_T \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_T \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_N$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \implies m \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_N = q v_0 B \vec{u}_T \wedge \vec{u}_z$$

$$= |q| \times \text{signe}(q) \times \vec{u}_T \wedge \vec{u}_z \times v_0 B = \vec{u}_N \times v_0 B$$

En projetant de cette équation sur $\vec{u}_N$ (traiter les deux signes de q possibles), on bien en raisonnant avec les normes (plus rapide), on obtient :

$$m \frac{v_0^2}{R} = |q| v_0 B \iff R = \frac{m v_0}{|q| B} \text{ constant.}$$

$$\iff v_0 = \omega_c R$$

On identifie alors la grandeur constante $\omega_c = \frac{|q| B}{m}$ homogène à une vitesse angulaire qui s'appelle **la pulsation cyclotron**, c'est la vitesse angulaire de rotation de la particule chargée autour du centre de sa trajectoire.

On connaît donc désormais le rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ de la trajectoire, pour connaître la position du centre C de cette trajectoire circulaire uniforme, il suffit alors de regarder dans quelle direction pointe l'accélération initiale, c'est-à-dire la force magnétique initiale en O : $\vec{f}_O = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$, car elle pointe nécessairement vers C .