

Mathématiques – DS₁

Les problèmes sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.
Bon travail!

1 point sera accordé aux copies qui répondent aux exigences ci-dessus.

Problème 1 : Algèbre linéaire

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et a et b sont deux nombres réels. La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X - a) \times (X - b) \times P' - n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \times P.$$

Partie 1 : Étude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on pose :

$$\varphi_1(P) = (X - a) \times (X - b) \times P' - \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \times P.$$

- Q1.** Montrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
- Q2.** Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.
- Q3.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.
- Q4.** On suppose dans cette question seulement que $a \neq b$.
- (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X - a, X - b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
 - (b) Calculer $\varphi_1(X - a)$ et $\varphi_1(X - b)$, puis en déduire $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.
 - (c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$.
Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$.
 - (d) Donner sans démonstration, une égalité reliant les matrices M , M_1 , $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$.
 - (e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question **Q4.(d)**, une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).
- Q5.** On s'intéresse dans cette question au sous-espace vectoriel

$$\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3).$$

- (a) Montrer que M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2 .
 - (b) Déterminer une base de Γ .
- Q6.** On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question **Q5.(a)**, déterminer l'application φ_1^2 . En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie B : Quelques généralités sur φ_n

Q7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. On se propose dans cette question de déterminer $\text{Ker}(\varphi_n)$.

On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.

(a) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab}$ est continue sur I .

(b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

(c) Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} y = 0.$$

(d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question **Q8.(c)** une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p})$.

(e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question **Q8.(c)** une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$ lorsque cela est possible.

On pourra discuter suivant les valeurs de a et b .

★
★ ★

Problème 2 : Intégrale généralisée

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale généralisée :

$$I_{n,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^n}{t^\alpha} dt.$$

Pour tout $t > 0$, on note : $f_{n,\alpha}(t) = \frac{(\sin(t))^n}{t^\alpha}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

De plus, dans le cas où $\alpha \leq 1$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Partie 1 : Étude du cas où $n = 1$

On s'intéresse à la convergence de $I_{1,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

Dans cette sous-partie, on suppose que $\alpha > 1$.

Q1. On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ diverge.

Q2. On suppose $1 < \alpha < 2$. Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge absolument.

Dans cette sous-partie, on suppose que $0 < \alpha \leq 1$.

Q3. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge absolument.

Q4. Soit $x \geq 1$. Montrer que :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \times \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Q5. En déduire que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ convergent.

Q6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = 2$.

Indication : Discuter selon la parité de n pour simplifier la valeur absolue.

Q7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \frac{2}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}$.

Indication : Minorer $\frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$.

Q8. En déduire que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ ne converge pas absolument.

Partie 2 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie, on prend $n = 1$ et $\alpha = 1$ et l'objectif est de calculer :

$$I_{1,1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note

$$J_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)} dt.$$

Q9. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale J_N converge.

Q10. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Q11. Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculer $J_{N+1} - J_N$.

Q12. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $J_N = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note

$$K_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2N+1) \times t)}{t} dt.$$

Q13. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale K_N converge et que $K_N = \int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Q14. En déduire que $K_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} I_{1,1}$.

On considère la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Q15. Montrer que $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{6}$ et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0. On donnera la valeur de $h(0)$.

Q16. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et que $h'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6}$.

Q17. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Q18. Soient $a < b$ des réels et $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(Nt) dt = 0$.

Indication : on pourra intégrer par parties dans $\int_a^b g(t) \sin(Nt) dt$.

Q19. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin((2N+1) \times t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Q20. En déduire que $I_{1,1} = \frac{\pi}{2}$.

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$ et $\alpha = 2$

- Q21.** Montrer que la fonction $f_{3,2}$ est intégrable sur $]2, +\infty[$.
- Q22.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Linéariser $(\sin(t))^3$.
- Q23.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
- Q24.** Montrer que, pour tout $t > 0$, $t - \frac{t^3}{3} \leq \sin(t) \leq t$.
- Q25.** En déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln(3)$, puis la valeur de $I_{3,2}$.

Partie 4 : Étude du cas où $n = \alpha$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = I_{n,n} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt$. On admet que $A_1 = \frac{\pi}{2}$.

- Q26.** Calculer pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} dt$.
- Q27.** Soit $n \geq 2$. Montrer que l'intégrale A_n converge absolument.
- Q28.** A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_2 .
- Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = (\sin(t))^n$.
- Q29.** Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe P_k une fonction polynomiale telle que : $g_n^{(k)}(t) = P_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k}$.
- Q30.** Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$ converge et vérifier que : $\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt$.
- Q31.** En déduire que : $A_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$.
- Q32.** Déterminer la valeur de A_3 .

– Fin du sujet –

