Suites - Généralités

#1èreSpéMaths

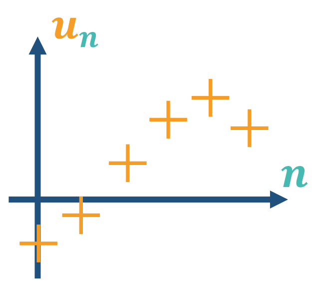
Définition :

Une suite (u_n) associe un réel u_n pour tout entier n.

u_n s'appelle le « terme » ; $u_n \in \mathbb{R}$

n s'appelle le « rang » ; $n \in \mathbb{N}$

La représentation graphique d'une suite est un nuage de points



Forme EXPLICITE :

$$u_n = f(n)$$

Ex. : $u_n = 3n + 2$

On peut calculer chaque terme u_n directement en fonction du rang n.

Forme RÉCURRENTE :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Ex. : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

$u_0 = -1$ ← Premier terme

$u_{n+1} = 3u_n + 2$ ← Relation de récurrence

On peut calculer chaque terme u_n en fonction du terme précédent.

Sens de Variation ?

u_n est	Croissante	Décroissante	Constante
Si	$u_{n+1} \geq u_n$	$u_{n+1} \leq u_n$	$u_{n+1} = u_n$
Méthode de la différence	$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$u_{n+1} - u_n = 0$
Méthode du quotient	$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$
Méthode étude de fonction	$si\ f\ est \nearrow$	$si\ f\ est \searrow$	$si\ f\ est \rightarrow$

⚠ uniquement si $u_n > 0$ (méthode du quotient)

Pour les formes explicites : $u_n = f(n)$ (méthode étude de fonction)

Exercice 1 : (3 points)

Voici les quatre premiers termes de 2 suites définies sur $\mathbb{N}$:

- $1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{8}\,;\,\ldots$
- $-1\,;\,\sqrt{3}\,;\,-3\,;\,\sqrt{27}\,;\,\ldots$

Pour chacune de ces suites :

a) Donner les deux termes suivants, de manière logique.

b) Donner le terme initial u_0 ; puis une définition de (u_n) soit par récurrence, soit de manière explicite (bonus pour les deux !).

Exercice 2 : (8 points)

Étudier le sens de variation des suites ci-dessous.

1. (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = -2n + 3$.
2. (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{n}{n+4}$.
3. (W_n) définie par $W_0 = -2$ et $W_{n+1} = W_n + 7n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{5n+2}{3^n}$.
5. (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = -\dfrac{1}{2}(n+2)^2 + 19$.

Exercice 3 : (4 points)

Chaque mois, Adam qui anime une chaîne Youtube perd simultanément un quart de ses abonnés et en gagne 400 nouveaux. Pour tout entier naturel n, on appelle (a_n) le nombre d'abonnés au bout de n mois.

1. Exprimer le nombre a_{n+1} d'abonnés le $(n+1)$-ième mois en fonction de a_n.
2. On suppose que le nombre initial d'abonnés d'Adam est de $10\,000$ (soit $a_0 = 10\,000$). Calculer a_3 et interpréter le résultat.
3. On a commencé cette feuille de tableur de manière à représenter les termes de la suite (a_n) en fonction de n. Quelle est la formule que l'on doit entrer dans la case C2 puis étirer pour remplir ce tableau ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	3	4	5	6
2	$a(n)$	10000						

Exercice 4 : (5 points)

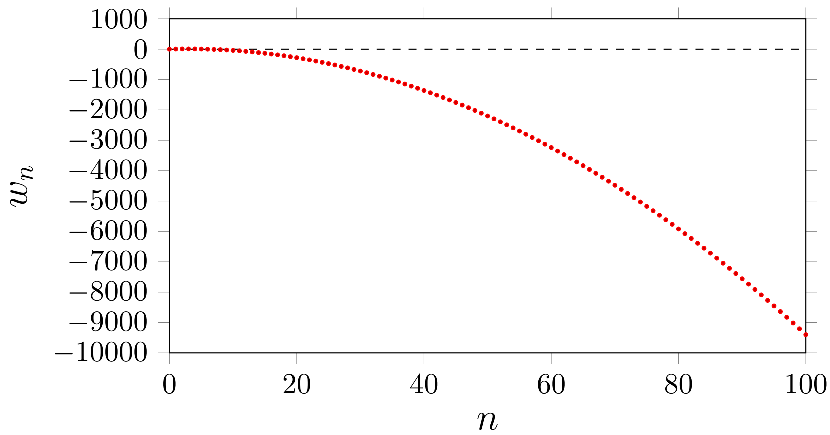
On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = -1$ et la relation $U_{n+1} = 3U_n - n + 4$ pour tout entier naturel n.

1. Donner les valeurs des 5 premiers termes de la suite.
2. Représenter graphiquement ces termes dans un repère (vous choisirez une échelle adaptée).
3. On cherche à programmer une fonction en langage Python qui donne le terme de rang n de cette suite. Recopier et compléter pour cela l'algorithme ci-dessous :

```
def terme_rang(......):
    U = .......
    for i in range(..................):
        U = ........................
    return ........
```

Exercice 1 (8 pts)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
   a. Calculer u_0, u_1, u_2 puis u_{99}.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 3^n \times n$.
   Déterminer le sens de variation de (v_n).
3. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = -n^2 + 6n$.
   a. Étudier la monotonie de cette suite.
   b. On a représenté, ci-contre, les 100 premiers termes de la suite (w_n) dans un repère. À partir de cette représentation graphique, conjecturer la limite de la suite (w_n).



Exercice 2 (3 pts)

Soit (v_n) la suite définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{v_n^2 + 3} \end{cases}$$

1. Calculer v_1 et v_2.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de v_{10} et v_{100}.
3. En déduire une conjecture sur la limite de la suite (v_n).

Exercice 3 (2 pts)

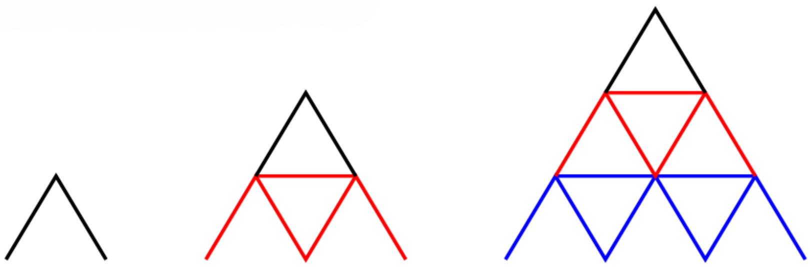
On considère le programme en langage Python ci-contre.

1. Qu'affiche cet algorithme s'il est appelé par `terme(N)` ?
2. Donner l'expression de la suite (v_n) dont les termes sont affichés par cet algorithme.

```
def terme(N):
  for i in range(0, N+1):
    v = i**2 + 2*i
    print(v)
```

Exercice 4 (2 pts)

On construit une succession de figures avec des allumettes. Voici les trois premières étapes :



Étape 1 Étape 2 Étape 3

Modéliser, à l'aide d'une suite, le nombre d'allumettes nécessaires à chaque étape.

Exercice 5 (5 pts)

Le directeur d'une réserve maritime a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au début de l'année 2017. Le classement de la zone en « réserve maritime » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année, la réserve perd 5 % de son effectif par rapport à l'année d'avant mais elle accueille aussi 80 nouveaux cétacés.

Selon ce modèle, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er janvier de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2930$.

2. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3. Compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera strictement inférieur à 2 000.

```
def seuil():
    n=0
    u=3000
    while ......................... :
        .........................
        .........................
    return (n)
```

4. À l'aide de votre calculatrice, retrouver la valeur trouvée avec l'algorithme précédent.

Exercice 1 : (4 points)

Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier. Une seule réponse est correcte.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 5$ semble :

   (A) Diverge vers $+\infty$ (B) Converge vers -5 (C) Converge vers 3 (D) Diverge vers $-\infty$

2. Le terme qui suit un terme u_n est :

   (A) $u_n + 1$ (B) u_{n+1} (C) u_1 (D) u_{2n}

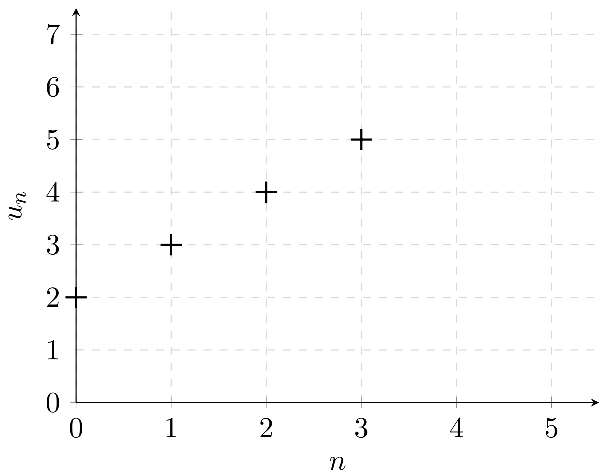
3. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(n+1)^2}$ semble :

   (A) Décroissante (B) Croissante (C) Ni croissante, ni décroissante (D) Constante

4. La fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2$ est croissante. On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 avec :

   (A) $u_n = (u_n - 1)^2$ (B) $u_n = (n-1)^2$ (C) $u_n = n^2 - 1$ (D) $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$

5. Dans un repère, on représente les premiers termes d'une suite (u_n). Une expression de cette suite est :



   (A) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1,5u_n$ (B) $u_n = n + 2$ (C) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ (D) $u_n = 1,5n$

Exercice 2 : (8,5 points)

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

a. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0,8^n$.
b. Pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2 - n$.
c. $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 5$.
d. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 4$.

Exercice 3 : (7,5 points)

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement. Une étude statistique a permis de constater que d'une année sur l'autre, 20% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 580 nouvelles personnes souscrivent un abonnement. En 2010, il y avait 2 000 abonnés à cette revue.

1. Donner une estimation du nombre d'abonnés à cette revue en 2011 puis en 2012.
2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la revue l'année $(2010 + n)$.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 580$.
   b. Compléter l'algorithme suivant qui permet d'obtenir le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2800$.

```
def seuil():
    n=0
    u= ........
    while ......................... :
        u= .........................
        n= .........................
    return n
```

   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2800$. Donner une interprétation concrète du résultat.
   d. À l'aide de la calculatrice conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation concrète.