Nombre complexe et trigonométrie

1 Formules de trigonométrie

Propriété : formules d'addition

Soient a et b deux nombres réels.

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

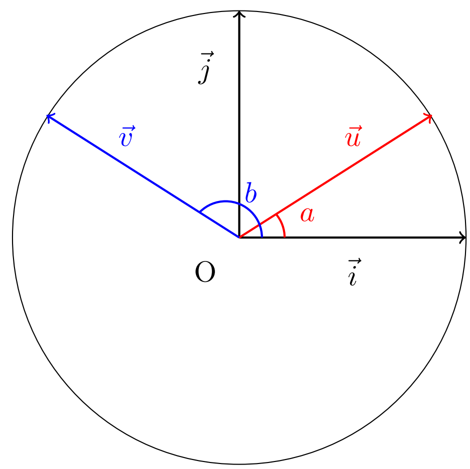
Démonstration

On se place dans le cercle trigonométrique de centre O.
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 tels que $(\vec{i});\vec{u} = a$ et $(\vec{i};\vec{v}) = b$.

De ce fait, $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$.

On a d'une part, $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
On a d'autre part : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$.

Ainsi, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.



Pour la seconde formule, $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Pour la troisième formule,
$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Pour la dernière formule, $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Propriété : formules de duplication

Soit a un nombre réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

2 Formule exponentielle d'un nombre complexe

Remarque

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= \cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta') + i\sin(\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\sin(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= f(\theta)f(\theta'). \end{aligned}$$

Les seules fonctions solutions sont celles de la forme $f(x) = e^{kx}$. Si on étend la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on peut alors poser $f(\theta) = e^{k\theta}$ avec $k \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Or $f'(\theta) = if(\theta)$ donc $k = i$.

On a donc finalement $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelé la **forme exponentielle** du nombre complexe de z où :

$$r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z)\ (2\pi)$$

Exemple

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$.

On a $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Puis $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

On a donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Propriété

$$e^{i\pi} = -1$$

Démonstration

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \times 0 = -1$

Remarque

C'est à Leonard Euler que l'on doit l'expression $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Propriétés

Soient deux réels θ et θ'.

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

3 Formule de Moivre et formules d'Euler

Propriété : formule de Moivre

Soit θ un réel et soit n un entier naturel.

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^{na} = (e^a)^n$.

Propriété : formules d'Euler

Soit θ un nombre réel.

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration

- $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{2} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$
- $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)}{2i} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$

Exercices sur les nombres complexes (3)

> Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement

Exercice n°1 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = 3e^{i\pi}$ **b.** $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **c.** $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Exercice n°2 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z = 5$ **b.** $z = -3$ **c.** $z = -3i$

d. $z = -3 + 3i$ **e.** $z = -2\sqrt{3} - 2i$ **f.** $z = \sqrt{3} - 3i$

Exercice n°3 On considère le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la forme exponentielle des nombres $\bar{z}$ et $-z$.
2. Montrer que $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. En déduire la forme exponentielle du nombre $2e^{-i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

> Choisir une forme adaptée pour résoudre un problème

Exercice n°4

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $z_C = z_1 + z_B$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z_A et z_B.
2. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$.
3. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

Exercice n°5 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1.
2. Préciser un argument de z_2.
3. Ecrire le produit z_1z_2 sous forme algébrique.
4. En utilisant la notation exponentielle, écrire le produit z_1z_2 sous forme trigonométrique.
5. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

> Utiliser les formules de Moivre et d'Euler

Exercice n°6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x)$.

1. Linéariser l'expression $f(x)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant la formule de Moivre, montrer que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.
2. Montrer que $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ et que $\sin(3\theta) - 4\sin^3(\theta)$.
3. Montrer que $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$ et que $\sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$.

Correction des exercices sur les nombres complexes (3)

> Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement

Exercice n°1

a. $z = 3e^{i\pi} = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3(-1 + i \times 0)$=-3.

b. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$

c. $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) = 3 - i\sqrt{3}.$

Exercice n°2

a. $z = 5 = 5(\cos(0) + i\sin(0)) = 5e^{i0}.$

b. $-3 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3e^{i\pi}.$

c. $-3i = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

d. $|z = |\sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Donc $z = 3\sqrt{2}\left(\frac{-3}{3\sqrt{2}} + i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Finalement, $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

e. $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$. Donc $z = 4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{4} - i\frac{2}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right).$

Finalement, $z = 4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

f. $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$. Donc $z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

Finalement, $z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice n°3

1. $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \bar{r} \times \overline{e^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et $-z = -(re^{i\theta}) = e^{i\pi} \times re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$.

2. $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = (-e^{i\pi})\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $2e^{-i\frac{\pi}{3}} + 3e^{e\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

> Choisir une forme adaptée pour résoudre une problème

Exercice n°4

1. $|z_A| = \sqrt{3^3 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$ et $z_A = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

   Ainsi, $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   De la même façon, on montre que $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \alpha = \frac{\pi}{6}(2\pi)$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

   Or $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

3. L'égalité $z_C = z_A + z_B$ traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, c'est à dire que OACB est un parallélogramme. D'après la question n°2, OAB est rectangle en O.
   De plus, $\mathrm{OA} = |z_A| = 2\sqrt{3} = |z_B| = \mathrm{OB}$. Cela montre que le triangle OAB est aussi isocèle. Finalement, OACB est un carré de côté $2\sqrt{3}$.

Exercice n°5

1. $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Notons α_1 l'argument de z_1. On a $\cos(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ donc $z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Un argument de z_2 est donc $-\frac{\pi}{4}$.

3. $z_2 = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$.

   Donc $z_1z_2 = (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i + 3\sqrt{6}i + 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + i(3\sqrt{6} - 3\sqrt{2})$.

4. $z_1z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 6e^{-i\frac{\pi}{4}} = 12e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   Donc $z_1z_2 = 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

5. D'après les deux questions précédentes, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

> Utiliser les formules de Moivre et d'Euler

Exercice n°6

1. $$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \quad \text{D'après la formule d'Euler.}\\ &= \frac{1}{8}\left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right) \quad \text{en utilisant la formule du binôme de Newton}\\ &= \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix})\\ &= \frac{1}{8}(\cos(3x) + i\sin(3x) + 3\cos(x) + 3i\sin(x) + 3\cos(x) - 3i\sin(x) + \cos(3x) - i\sin(3x))\\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x))\\ &= \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)).\end{aligned}$$

2. Une primitive de $\cos^3(x)$ est également une primitive de $\frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{12}\sin\left(3\times\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{12}\sin(0) - \frac{3}{4}\sin(0)\\ &= \frac{-2+9\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

Exercice n°7

1. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta).$$

D'autre part,

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2 = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta).$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta) = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$$

Soit par identification,

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) \text{ et } \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

2. D'après la formule de Moivre on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a également :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)i\sin(\theta) + 3\cos(\theta)(i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3$$

Ce qui revient après simplification à

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta))$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta))$$

Soit par identification :

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) \text{ et } \cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

3. D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a également :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)i\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta)$$

Par identification, on obtient donc :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \text{ et } \sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$$

En simplifiant les expressions :

$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$
On rappelle que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Ce qui donne finalement $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$.