

Exercice 1 (★). Déterminer les développements limités en 0 de :

1. $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2
2. $\sin^2(x)$ à l'ordre 6
3. $\frac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4

Résultat attendu :

1. $1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
2. $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$
3. $1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - 3x^3 + \frac{85}{24}x^4 + o(x^4)$

Exercice 2 (★). Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de :

1. $u_1(x) = \frac{1}{1-2x} - e^{4x}$
2. $u_2(x) = \sqrt{1+x} \times \ln(1+3x)$
3. $u_3(x) = (1 + \tan(x))^{1/3}$
4. $u_4(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$
5. $u_5(x) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x\right)$

Résultat attendu :

1. $u_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - 4x^2 + o(x^2)$
2. $u_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x - 3x^2 + o(x^2)$
3. $u_3(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$
4. $u_4(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
5. $u_5(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Exercice 3 (★). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t}}{t}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x(1+x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Résultat attendu :

1. 2
2. $\frac{3}{2}$
3. -1
4. 0
5. $\frac{1}{6}$

Exercice 4 (★★).

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre 1 de $\tan$ en $\frac{\pi}{4}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right]^n$.

Résultat attendu :

1. $\tan(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
2. La limite vaut e^2

Exercice 5 (★).

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\frac{1}{\cos(x)}$.
2. En déduire un équivalent en 0 de $\frac{1}{\cos(x)} - 1$.

Résultat attendu :

1. $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
2. $\frac{1}{\cos(x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

Exercice 6 (★). Soit $\delta(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{4+x}-2}$.

1. Déterminer un développement limité de $\sqrt{4+x} - 2$ à l'ordre 1 en 0.
2. Déterminer un équivalent lorsque $x \rightarrow 0$ de $\delta(x)$.

Résultat attendu :

1. $\sqrt{4+x} - 2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{4} + o(x)$.
2. Un quotient d'équivalents donne $\delta(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 4x$.

Exercice 7 (★★). Donner un équivalent simple en 0 pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2 \exp(x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$
2. $g(x) = \frac{\sin(x) - \sqrt{x+1} + (1+2x)^{\frac{1}{3}}}{1 + \ln(1+x) - \exp(x)}$

Résultat attendu :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{11}{3}x^3$
2. $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{7}{6}x}{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{7}{6x}$

Exercice 8 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Résultat attendu : L'équivalent cherché est $-\frac{1}{n^2}$.

Exercice 9 (★★). Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, puis de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Résultat attendu : Les équivalents cherchés sont $2\sqrt{n}$ puis $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 10 (★). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Résultat attendu : $\frac{\sin(x)}{x} = 1 + o(x)$, donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 11 (★★). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable? De classe C^1 ?

Résultat attendu : f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et de classe C^1 . On le montre en cherchant un développement limité en 0, puis par un calcul de dérivée avant passage à la limite.

Exercice 12 (★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

- Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f . En déduire la tangente au graphe en 0 et sa position par rapport à la courbe au voisinage de 0.
- Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$.

Résultat attendu :

- $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$ donc la tangente est d'équation $y = -x$ et la courbe se trouve en dessous.
- On pose $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 (par valeurs positives), ce qui donne $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h}\sqrt{1+h^2}}{1-h}$. Un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\sqrt{1+h^2}}{1-h}$ permet alors d'obtenir la relation demandée. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$.

Exercice 13 (★). On considère les suites $(a_n)_{n \geq 3}$ et $(b_n)_{n \geq 3}$ telles que $\begin{cases} a_n \rightarrow 0^+ \\ a_n e^{-a_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_n \rightarrow +\infty \\ b_n e^{-b_n} = \frac{1}{n} \end{cases}$, dont on admet qu'elles sont bien définies (cela se montrerait en étudiant la fonction $x \mapsto xe^{-x}$).

- Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- Montrer que $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puis que $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ln(\ln(n)) + o(1)$.

Résultat attendu : Il suffit de revenir aux définitions du cours.

Exercice 14 (★★).

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n - 1 = 0$.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- En déduire un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Résultat attendu :

- On utilise le théorème de la bijection.
- La majoration découle de la question précédente, puis on compare $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$ pour montrer la croissance.
- On montre la convergence, puis passe à la limite dans une égalité bien choisie pour montrer que la limite ne peut pas être dans $[0, 1[$.
- Calculs usuels.
- $x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 15 (★★★). Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{n + v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1 : \sqrt{n-1} \leq v_n \leq 2\sqrt{n}$.
2. En déduire que $v_n = O(\sqrt{n})$.
3. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
4. Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Résultat attendu : On montre la première question par récurrence, puis on revient aux définitions du cours.

Exercice 16 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les solutions de l'équation $(E_n) : \ln(t) + t = n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \ln(t) + t$.

1. Existence des solutions de (E_n)

- (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution, notée x_n .
- (c) Que vaut x_1 ?
- (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Encadrement et limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- (a) Montrer que $\forall t > 0, \ln(t) \leq t$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$. *Indication : montrer séparément les deux inégalités.*
- (c) Quelle est la limite de x_n quand $n \rightarrow +\infty$?

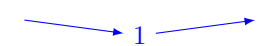
3. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- (a) Justifier que $x_n \sim n$.
- (b) En déduire que $x_n = n - \ln(n) + o(1)$.
- (c) En déduire la limite de $x_{n+1} - x_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (d) Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Résultat attendu :

- 1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par somme de fonctions dérivables) et $\forall t > 0, g'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0$. Donc g croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$. Or g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par théorème de la bijection, g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $g(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, g est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \in \mathbb{R}$, n admet un unique antécédent $g^{-1}(n)$ par g , que l'on note x_n .
- (c) x_1 est l'unique solution de l'équation $g(t) = 1$. Or $g(1) = 1 + \ln(1) = 1$. L'unicité donne donc $x_1 = 1$.
- (d) Par théorème de la bijection, la fonction g^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Donc la suite (explicite) $(g^{-1}(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- 2. (a) Soit $\varphi : t \mapsto t - \ln(t)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable, et $\forall t > 0, \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t}$. On en déduit les variations. Donc $\forall t > 0, \varphi(t) \geq 1 \geq 0$, ce qui donne $t \geq \ln(t)$.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	—	0	+
$\varphi(x)$			

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question 2a. donne $\ln(x_n) \leq x_n$, donc $\ln(x_n) + x_n \leq 2x_n$. Or $\ln(x_n) + x_n = n$ (par définition de x_n), donc $n \leq 2x_n$.
D'autre part, par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer $x_n \leq n$ équivaut à montrer $g(x_n) \leq g(n)$, c'est-à-dire $n \leq g(n)$. Or $g(n) = \ln(n) + n$. Comme $n \geq 1$, on a $\ln(n) \geq 0$, donc $g(n) \geq n$, donc $x_n \leq n$.
Variante : x est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq x_1 = 1$. Donc $\ln(x_n) \geq 0$, donc $x_n \leq n$.
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc par théorème de comparaison, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
- 3. (a) $\frac{n}{x_n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + 1 = 1$, par croissances comparées (car $x_n \rightarrow +\infty$). Donc $x_n \sim n$.
- (b) $x_n \sim n$, donc $x_n = n + o(n)$. Or $\ln(x_n) + x_n = n$, ce qui donne :

$$x_n = n - \ln(n + o(n)) = n - \ln(n(1 + o(1))) = n - \ln(n) - \ln(1 + o(1)) = n - \ln(n) + o(1).$$

La dernière égalité s'obtient car $o(1)$ tend vers 0, donc par composition $\ln(1 + o(1))$ tend vers $\ln(1) = 0$.

- (c) La question précédente donne $x_{n+1} - x_n = ((n+1) - \ln(n+1) + o(1)) - (n - \ln(n) + o(1))$, donc $x_{n+1} - x_n = 1 - \ln(n+1) + \ln(n) + o(1) = 1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + o(1)$. Or $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$. Donc $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

- (d) On repart des relations $\ln(x_n) + x_n = n$ et $x_n = n - \ln(n) + o(1)$:

$$x_n = n - \ln(n - \ln(n) + o(1)) = n - \ln\left[n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = n - \ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Or $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ et $-\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par composition à droite :

$$\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right), \text{ puisque } \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Donc } x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$