

Suites de fonctions – TD₉

Exercices pratiques

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \frac{1}{n}.$$

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{n \times x}{1 + n^2 \times x^2}$.

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto n^\alpha \times x \times (1 - x)^n.$$

Discuter selon les valeurs de α de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) .

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \times \sqrt{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n \times (x - 1)}{1 - n \times \sqrt{n}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) .

Exercice 5 :

Déterminer la limite, si elle existe de la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(x \times e^{-n \times x^2}) dx$.

Exercice 6 :

On note $I = [0, 2]$ et, pour tout $t \in I$, $f_0(t) = t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$. Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2 - t) dt.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0, 1]$.
3. Montrer que f n'est pas la fonction nulle.
4. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
5. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercices théoriques

Exercice 8 :

Soient $a < b$ des réels et (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, b]$.

On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère (x_n) une suite d'éléments de $[a, b]$ qui converge vers $x \in [a, b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 9 :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I .

1. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I . Étudier le caractère borné de la fonction f .
2. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I . Étudier le caractère borné de la fonction f .

Exercice 10 :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que les fonctions f_n sont convexes.

On suppose que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I .

Montrer que f est convexe.

Exercice 11 :

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

On se place dans le cadre d'application du théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (ii) (f_n) converge simplement sur I vers f ,
- (iii) (f'_n) converge uniformément sur I vers g ,

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f .