

Réduction et polynôme annulateur – TD₁₀

Obtenir des informations à partir d'un polynôme annulateur

Trace, déterminant, rang

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = a \times M + \text{tr}(M).I_n$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de φ .
2. Déterminer le déterminant de φ .

Réponse

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\varphi^2(M) = \varphi(a \times M + \text{tr}(M).I_n) = a.\varphi(M) + \text{tr}(M).\varphi(I_n) = a.\varphi(M) + \text{tr}(M).(a.I_n + n.I_n) = a.\varphi(M) + (a+n).\text{tr}(M).I_n.$$

Or, $\text{tr}(M).I_n = \varphi(M) - a.M$, donc,

$$\varphi^2(M) = a.\varphi(M) + (a+n).(\varphi(M) - a.M) = (2a+n).\varphi(M) - a(a+n).I_n.$$

Donc,

$$P = X^2 - (2a+n).X + a(a+n) \text{ est annulateur de } \varphi.$$

2. On a $P = (X - (a+n))(X - a)$.

Donc, φ est annulateur de φ et est scindé à racines simples, donc, φ est diagonalisable et $\text{Sp}(\varphi) \subset \{a, a+n\}$.

Donc, $\det(\varphi)$ est le produit des valeurs propres de φ comptées avec multiplicité.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\varphi(M) = a.M \iff a.M + \text{tr}(M).I_n = a.M \iff \text{tr}(M).I_n = 0.$$

Comme $I_n \neq 0$,

$$\varphi(M) = a.M \iff \text{tr}(M) = 0.$$

Le noyau de la trace n'étant pas réduit à $\{0\}$, on en déduit que a est valeur propre de φ et $E_a(\varphi) = \text{Ker}(\text{tr})$.

De plus, comme a est diagonalisable, la multiplicité de a est $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = n^2 - 1$ (tr est une forme linéaire non nulle).

Comme φ est diagonalisable, $n^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim(E_\lambda(\varphi))$.

On en déduit que φ possède une seconde valeur propre dont la dimension du sous-espace propre associé est 1.

Or, la seule autre valeur propre de φ possible est $a+n$.

Donc, $a+n$ est valeur propre de φ de multiplicité 1 (cela ne sera pas utile mais I_n est un vecteur propre pour cette valeur propre et $E_{a+n}(\varphi) = \text{Vect}(I_n)$).

Donc,

$$\det(\varphi) = a^{n^2-1} \times (a+n).$$

Exercice 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que $\det(A) > 0$.

Réponse

La matrice A est annulée par $P = X^3 - X + 1$.

La fonction $x \mapsto P(x)$ est dérivable et $P'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
$P'(x)$		$\vdots$	$\vdots$		
	$+$	0	$-$	0	$+$
P					
	$-\infty$	$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$	$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$	$+\infty$	

On en déduit que P s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en $a \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc, comme $P \in \mathbb{R}[X]$, P possède dans $\mathbb{C}$ deux racines complexes conjuguées $\omega \neq 0$ et $\bar{\omega}$.

Donc, P est scindé à racines simple dans $\mathbb{C}$.

Par théorème, A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \{a, \omega, \bar{\omega}\}$. On note m_λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A (avec la convention que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas racine de χ_A).

On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et

$$D = \text{diag}(\underbrace{a, \dots, a}_{m_a \text{ fois}}, \underbrace{\omega, \dots, \omega}_{m_\omega \text{ fois}}, \underbrace{\bar{\omega}, \dots, \bar{\omega}}_{m_{\bar{\omega}} \text{ fois}}).$$

Comme A est une matrice à coefficients réels, $m_\omega = m_{\bar{\omega}}$.

Donc,

$$\det(A) = \det(D) = a^{m_a} \times \omega^{m_\omega} \times \bar{\omega}^{m_{\bar{\omega}}} = a^{m_a} \times |\omega|^{2m_\omega} > 0.$$

Exercice 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

Montrer que le rang de A est pair et que la trace de A est un entier.

Réponse

Fait en classe.

Diagonalisabilité**Exercice 4 :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A^\top = I_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Réponse

On transpose l'égalité de l'énoncé : $(A^\top)^2 - A = I_n$. Or, $A^\top = A^2 - I_n$. Donc,

$$I_n = (A^\top)^2 - A = (A^2 - I_n)^2 - A = A^4 - 2A^2 - A + I_n.$$

On en déduit que $A^4 - 2A^2 - A = 0_n$. Donc, le polynôme $P = X^4 - 2X^2 - X = X \times (X - 1) \times \left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \times \left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

scindé à racine simple est annulateur de A .

Donc A est diagonalisable.

Exercice 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $u(M) = A \times M$.

1. Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $(P(u))(M) = P(A) \times M$.
3. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Réponse

1. ► On suppose que u est un automorphisme.

Dans ce cas, $\text{Im}(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, u est surjectif). D'où, $I_n \in \text{Im}(u)$.

On en déduit qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $u(B) = I_n$. Donc, $A \times B = I_n$. Donc, A est inversible.

► Réciproquement, on suppose A inversible. On pose, $v : M \mapsto A^{-1} \times M$. On vérifie alors que $v \circ u = u \circ v = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc, u est bijectif et est un endomorphisme. C'est donc un automorphisme.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u^n(M) = A^n \times M$.

Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $(P(u))(M) = P(A) \times M$

► On suppose A diagonalisable.

Il existe alors P un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

De plus, on a alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(P(u))(M) = P(A) \times M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc, P est annulateur de u . Comme P est scindé à racines simples, on en déduit que u est diagonalisable.

► Réciproquement, on suppose u , alors il existe P un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

De plus, on a alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(P(u))(M) = P(A) \times M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

En prenant $M = I_n$, il vient $P(A) = 0$.

Donc, P est annulateur de A . Comme P est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A).A$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Réponse

1. Dans un précédent TD, on a montré que $A = CL$ où C est une matrice colonne et L une matrice ligne.

Donc, $A^2 = CLCL$.

Or, $\text{tr}(A) = \text{tr}(CL) = \text{tr}(LC)$. Comme LC est une matrice à un seul coefficient, on peut dire que $LC \in \mathbb{R}$. Donc, $\text{tr}(A) = LC$.

Ainsi,

$$A^2 = \text{tr}(A).CL = \text{tr}(A).A$$

2. Le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(A).X = X(X - \text{tr}(A))$ est annulateur de A .

Cas 1 : $\text{tr}(A) \neq 0$. Dans ce cas, P est scindé à racines simples.

Par théorème, A est diagonalisable.

Cas 2 : $\text{tr}(A) = 0$. Dans ce cas, $P = X^2$, donc, le spectre de A est inclus dans $\{0\}$.

Par l'absurde, si A est diagonalisable, A est semblable à la matrice nulle, donc, $A = 0$.

Contradiction car A est de rang 1. Donc, A n'est pas diagonalisable.

Ainsi,

A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 7 :

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = B + C, \quad A^2 = B + 2C \quad \text{et} \quad A^3 = B + 4C.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. En déduire que B et C sont diagonalisables.

Réponse

1. On remarque que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

Donc, $P = X^3 - 3X^2 + 2X = X \times (X - 1) \times (X - 2)$.

Donc, A est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

Donc,

A est diagonalisable.

2. On remarque que $C = A^2 - A$.

De plus, il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

D'où,

$$C = (PDP^{-1})^2 - PDP^{-1} = PD^2P^{-1} - PDP^{-1} = P(D^2 - D)P^{-1}.$$

Or, $D^2 - D$ est diagonale, donc,

C est diagonalisable.

De plus,

$$B = A - C = PDP^{-1} - P(D^2 - D)P^{-1} = P(-D^2 + 2D)P^{-1}.$$

Donc,

B est diagonalisable.

Exercice 8 :

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

1. Déterminer le spectre réel de A .
2. Déterminer le spectre complexe de A .

Réponse

1. Le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de A et les racines de $X^3 - 1$ sont $1, j$ et $\bar{j}$.

Donc, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$.

De plus comme A est carrée d'ordre 3, χ_A est de degré 3.

Or, χ_A est unitaire, donc $\chi_A(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $\chi_A(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

De plus, $x \mapsto \chi_A(x)$ est continue (car polynomiale).

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A s'annule au moins un fois.

Donc, A possède une valeur propre réelle et cette valeur propre ne peut être que 1.

Donc,

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}.$$

2. Comme dans la question précédente, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, \bar{j}\}$.

De plus, $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - \bar{j})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Par l'absurde, si 1 est la seule valeur propre de A , alors A est semblable à la matrice I_3 .

Or, la seule matrice semblable à I_3 est I_3 , donc, $A = I_3$. Contradiction.

Donc, j ou $\bar{j}$ est valeur propre de A .

Comme A est à coefficient réelle, si λ est valeur propre de A , alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A (de même multiplicité).

Donc, j et $\bar{j}$ sont valeurs propres de A .

Ainsi,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, j, \bar{j}\}.$$

Remarque : comme A est carrée d'ordre 3, A est semblable à $\mathrm{diag}(1, j, \bar{j})$.

Exercice 9 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $n \geq 2$ tels que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre, montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Réponse

La polynôme $P = X^n - 1$ est annulateur de A . De plus, les racines de P sont les racines n -ème de l'unité.

Donc, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}_n$. On note m_λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A (avec la convention que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas racine de χ_A).

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} m_\omega \cdot \omega.$$

On va montrer que $m_\omega = 1$, on pourra ainsi conclure que $\mathrm{tr}(A)$ est égale à la somme des racines n -ème de l'unité et on sait que cette somme est nulle.

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Par l'absurde, on suppose que ω n'est pas valeur propre de A . Donc, $A - \omega \cdot I_n$ est inversible.

De plus, comme ω est racine de P qui est de degré n , on a $P = (X - \omega) \times Q$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est de degré $n - 1 \geq 1$.

Donc, en évaluant en A :

$$0 = (A - \omega \cdot I_n) \times Q(A).$$

D'où, en multipliant à gauche par $(A - \omega \cdot I_n)^{-1}$, on a :

$$0 = Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k.$$

Or, la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre, donc, $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$. D'où, $Q = 0$. Contradiction : Q est de degré $n - 1 \geq 1$.

Donc, ω est une valeur propre de A .

On en déduit que $m_\omega \geq 1$.

Comme χ_A est de degré n , χ_A possède au plus n racines comptées avec multiplicité.

Or, on vient de montrer que les n racines n -ème de l'unité sont racines de χ_A . Donc, χ_A est scindé à racines simples et, pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $m_\omega = 1$.

Donc,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0.$$

Puissance et inverse

Exercice 10 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 1$. On suppose que $A^{2026} = 0$.

Montrer que $A^n = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose que $f^{2026} = 0$.

Montrer que $f^n = 0$.

Réponse

On note A la matrice de f dans une base de E .
 On peut voir A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $A^{2026} = 0_n$.
 Donc, X^{2026} est un polynôme annulateur de A .
 On en déduit que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.
 Donc, la seule valeur propre possible de A est 0.
 Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et est unitaire de degré n , on a $\chi_A = X^n$.
 Donc, par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.
 Donc,

$$f^n = 0.$$

Exercice 11 :

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.
On dit que l'inverse de A est un polynôme en A .
2. Traduire le résultat de la question 1. en termes d'endomorphismes.

Réponse

1. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$.
 Or, $\chi_A(A) = A^n - \text{tr}(A).A^{n-1} + \dots + \alpha.A + (-1)^n.\det(A).I_n$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.
 Donc, $I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (A^{n-1} - \text{tr}(A).A^{n-2} + \dots + \alpha.I_n) \times A$.
 Donc, $A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (A^{n-1} - \text{tr}(A).A^{n-2} + \dots + \alpha.I_n)$ est un polynôme en A et $P = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(A)} (X^{n-1} - \text{tr}(A).X^{n-2} + \dots + \alpha)$ est de degré $n-1$.
2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**. La bijection réciproque de f est un polynôme en f .

Équations matricielles**Exercice 12 :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\text{tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$

Réponse

On considère qu'on travaille avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, dans ce cas, χ_A est scindé, donc,

- la trace de A est égal à la somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
- la somme des multiplicités des valeurs propres de A est égale à n .

La polynôme $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ est annulateur de A .
 Donc, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 1\}$.
 On note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A (avec la convention que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas racine de χ_A).
 D'où, $\text{tr}(A) = m_0 \times 0 + m_1 \times 1$.
 Or, $\text{tr}(A) = n$, donc, $m_1 = n$.
 De plus, comme χ_A est de degré n , $m_0 + m_1 = n$.
 Donc, $m_0 = 0$.
 On en déduit que 1 est la seule valeur propre de A et qu'elle est de multiplicité n .
ATTENTION! On ne peut pas dire que A est semblable à $\text{diag}(1, \dots, 1) = I_n$, en effet, on n'a pas montré que A est diagonalisable.
 On remarque que :

$$0 = A^3 - A^2 = A^2 \times (A - I_n).$$

Or, 0 n'est pas valeur propre de A , donc, $A - 0.I_n = A$ est inversible.

Donc, en multipliant par $(A^2)^{-1}$, on a :

$$0 = A - I_n.$$

Ainsi,

$$A = I_n.$$

Exercice 13 :

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = 0$.

Réponse

La matrice A est annulée par $X^2 - X = X(X - 1)$ qui est scindé à racines simples.

Donc, A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$. On note m_λ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A (avec la convention que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas racine de χ_A).

On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et

$$D = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1 \text{ fois}})$$

On en déduit que $\text{tr}(A) = \text{tr}(D) = m_1$.

Or, $\text{tr}(A) = 0$, donc, $m_1 = 0$, puis $D = \text{diag}(0, \dots, 0)$.

Donc, $A = 0$.

Exercice 14 :

- Donner un polynôme annulateur (non nul) de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Montrer que M est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de M .
- Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse

- Méthode 1 :** On remarque que $A^2 = 2A$. Donc, $X^2 - 2X = X(X - 2)$ est annulateur de A .

Méthode 2 : On $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X^2 - 2X$. Par le théorème de Cayley-Hamilton χ_A est un polynôme annulateur de A .

- On a : $A^2 = (M^2 + M)^2 = M^4 + 2M^3 + M^2$.

D'où,

$$0 = A^2 - 2A = M^4 + 2M^3 - M^2 - 2M.$$

Donc, $P = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$ est annulateur de M .

En remarquant des racines évidentes, on a :

$$P = (X + 2)(X + 1)X(X - 1).$$

Donc, M est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc, par théorème, M est diagonalisable. D'autre part, $\text{Sp}(M) \subset \{-2, -1, 0, 1\}$.

- Supposons M solution.

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable : il existe P inversible telle que $A = P \text{diag}(0, 2) P^{-1}$.

D'où,

$$\text{diag}(0, 2) = P^{-1}AP = P^{-1}(M^2 + M)P = P^{-1}M^2P + P^{-1}MP = (P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 P^{-1}MP \times \text{diag}(0, 2) &= P^{-1}MP \times ((P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP) \\
 &= (P^{-1}MP)^3 + (P^{-1}MP)^2 \\
 &= ((P^{-1}MP)^2 + P^{-1}MP) \times P^{-1}MP \\
 &= \text{diag}(0, 2) \times P^{-1}MP.
 \end{aligned}$$

Donc, $P^{-1}MP$ et $\text{diag}(0, 2)$ commutent.

D'où (exercice 2), $P^{-1}MP$ est diagonale.

On note $P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda, \mu)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit que :

$$\text{diag}(0, 2) = \text{diag}(\lambda^2 + \lambda, \mu^2 + \mu)Q^{-1}.$$

Donc, on a $\lambda^2 + \lambda = 0$ et $\mu^2 + \mu = 2$.

Donc, $M = P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

► Réciproquement, on suppose que : $M = P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

On a alors,

$$M^2 + M = (P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1})^2 + P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1} = P \text{diag}(\lambda^2 + \lambda, \mu^2 + \mu) P^{-1} = P \text{diag}(0, 2) P^{-1} = A.$$

► Ainsi, les solutions de l'équation sont les matrices $P \text{diag}(\lambda, \mu) P^{-1}$ où $\lambda \in \{-1, 0\}$ et $\mu \in \{-2, 1\}$.

Exercice 15 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

1. Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \times M = M \times B$ si, et seulement si, M est la matrice nulle.

Réponse

1. Dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

D'où,

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n).$$

Or, λ_i n'est pas valeur propre de B , donc, $\chi_B(\lambda_i) = \det(B - \lambda_i I_n) \neq 0$, donc, $B - \lambda_i I_n$ est inversible.

Donc, comme produit de matrices inversibles,

la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

2. ($\Leftarrow$) Si $M = 0$, alors $A \times M = 0 = M \times B$.

($\Rightarrow$) On suppose que $A \times M = M \times B$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \times M = M \times B^k$.

D'où en écrivant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) \times M = M \times P(B)$.

En posant $P = \chi_A$, on a :

$$\chi_A(A) \times M = M \times \chi_A(B).$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$0 = M \times \chi_A(B).$$

Donc, en multipliant par $(\chi_A(B))^{-1}$ à droite, on a : $M = 0$.

Matrices définies par blocs

Exercice 16 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé.

1. Écrire par blocs la matrice $P(M)$ à l'aide de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Réponse

1. On trouve :

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & k \cdot A^{k+1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & A^2 \times P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. **Analyse.** On suppose que M est diagonalisable.

Il existe P un polynôme annulateur de M scindé à racines simples.

Par la question précédente,

$$0 = \begin{pmatrix} P(A) & A^2 \times P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

Donc, $P(A) = 0$ et $A^2 \times P'(A) = 0$.

On en déduit que P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Par théorème,

A est diagonalisable.

Montrons que $P'(A)$ est inversible.

Quitte à changer de polynôme annulateur scindé à racines simples, on peut supposer que $\deg(P) \geq 2$. Cela permet de scinder P' dans $\mathbb{C}$.

$$P'(A) = b \times (A - \mu_1 \cdot I_n) \times \cdots \times (A - \mu_\ell \cdot I_n).$$

Remarque : Pour éviter de se placer dans $\mathbb{C}$, on pouvait aussi montrer à l'aide du théorème de Rolle que P' est scindé à racines simples.

De plus, $\det(A - \mu_i \cdot I_n) = (-1)^n \det(\mu_i \cdot I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\mu_i)$.

Par l'absurde, si $\chi_A(\mu_i) = 0$, alors μ_i appartient au spectre de A . Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur P . On a donc, μ_i racine de P et P' , ce qui contredit que P est scindé à racines simples.

Donc, $\chi_A(\mu_i) \neq 0$.

Donc,

$$\det(P'(A)) = b^n \det(A - \mu_1 \cdot I_n) \times \cdots \times \det(A - \mu_\ell \cdot I_n) \neq 0.$$

Donc,

$P'(A)$ est inversible.

En multipliant $A^2 \times P'(A) = 0$ par l'inverse de $P'(A)$ à droite, on a $A^2 = 0$.

Or, A est diagonalisable, donc est semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc, $D^2 = 0$.

On en déduit que $\lambda_1^2 = \cdots = \lambda_n^2 = 0$, puis que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, $D = 0$, puis

$A = 0$.

Synthèse.

Si $A = 0$, alors $M = 0$ et M est bien diagonalisable.

Ainsi,

M est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

Exercice 17 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 18 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Réponse

► On commence par traiter le cas $n = 1$. On s'intéresse à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_B = X^2 - 2X - 3 = (X - 3) \times (X + 1)$. Le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable et après calculs des sous-espaces propres, on trouve que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} \times B \times P$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

► On s'inspire du cas $n = 1$ pour traiter le cas général. On pose $P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$

On vérifie en faisant les calculs par blocs que $P \times Q = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

De plus, toujours en effectuant les calculs par blocs, on a :

$$P^{-1} \times M \times P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2A & 6A \\ A & 3A \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4A & 0_n \\ 0_n & 12A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$$

► Supposons la matrice M diagonalisable. On sait qu'il existe $R = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ un polynôme scindé à racine simple annulateur de M .

$$\text{D'où, } R(P^{-1} \times M \times P) = \sum_{k=0}^N a_k (P^{-1} \times M \times P)^k = \sum_{k=0}^N a_k P^{-1} \times M^k \times P = P^{-1} \times \left(\sum_{k=0}^N a_k M^k \right) \times P = P^{-1} \times R(M) \times P = 0_{2n}.$$

$$\text{D'un autre côté, on a : } R(P^{-1} \times M \times P) = \sum_{k=0}^N a_k \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^N a_k \begin{pmatrix} (-A)^k & 0_n \\ 0_n & (3A)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-A) & 0_n \\ 0_n & R(3A) \end{pmatrix}.$$

Donc, $R(-A) = 0_n$ et $R(3A) = 0_n$. Il existe donc un polynôme annulateur de $-A$ scindé à racines simples, donc $-A$ est diagonalisable. Donc, A est diagonalisable.

Remarque : en effet si $-A$ est semblable à D une matrice diagonale, alors A est semblable à la matrice diagonale $-D$.

Donc, si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose A diagonalisable. Il existe alors $P_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = P_1 \times D \times P_1^{-1}$.

De plus, on a

$$\begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \times D \times P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & 3P_1 \times D \times P_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On vérifie sans peine que } \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}. \text{ Donc, } \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$M = P \times \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}^{-1} \times P^{-1} = Q_1 \times \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \times Q_1^{-1}$$

où $Q_1 = P \times \begin{pmatrix} P_1 & 0_n \\ 0_n & P_1 \end{pmatrix}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

La matrice M est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Donc, M est inversible.

Donc, si A est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

Ainsi,

M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 19 :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Trigonalisation

Exercice 20 :

- Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- En déduire les puissances de A .

Réponse

1. On trouve : $A = PBP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $B = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \geq 3$, $N^n = 0$.

De plus, Comme I_3 et N commutent, par la formule du binôme de Newton,

$$B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=3}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}}_{=0} = I_3 + n \cdot N + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}.$$

Il reste à calculer P^{-1} . On trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

On a alors, après calculs,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3n^2-3n+2}{2} & \frac{3n(3n-5)}{2} & -(3n(3n-4)) \\ \frac{(n-5)n}{2} & \frac{3n^2-17n+2}{2} & -(n(3n-16)) \\ \frac{(n-3)n}{2} & \frac{n(3n-11)}{2} & -(3n^2-10n-1) \end{pmatrix}$$

Exercice 21 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
- Justifier que la matrice A est trigonalisable et montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse

1. On trouve que $\chi_A = (X - 1)^3$. Donc, $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

Par l'absurde, si A est diagonalisable, il existe P inversible telle que : $A = P I_3 P^{-1} = I_3$. Contradiction.

Donc,

A n'est pas diagonalisable.

2. Soit $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

On sait que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On commence par déterminer la dimension de $E_1(A)$, pour déterminer a, b, c .

On a :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc, $\text{Im}(A - I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, (C_1, C_2) est libre.

Donc, (C_1, C_2) est une base de $\text{Im}(A - I_3)$. Donc, $\text{rg}(A - I_3) = 2$.

Par théorème du rang, $\dim(E_1(1)) = 1$.

Donc, on cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = e_1 + e_2 \\ Ae_3 = e_2 + e_3. \end{cases} \iff \begin{cases} (A - I_3)e_1 = 0 \\ (A - I_3)e_2 = e_1 \\ (A - I_3)e_3 = e_2. \end{cases}$$

On a $(A - I_3)^3 \cdot e_3 = 0$. De plus,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 20 & -10 & -10 \\ 20 & -10 & -10 \\ 20 & -10 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_3)^3 = 0.$$

On pose $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où,

$$e_2 = (A - I_3) \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_1 = (A - I_3) \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{vmatrix} -10 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \\ -10 & 4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$f(e_1) = A \cdot e_1 = e_1, \quad f(e_2) = A \cdot e_2 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = A \cdot e_3 = e_2 + e_3.$$

$$\text{Donc, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}$$

Exercice 22 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer que u est trigonalisable.

Réponse

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1 > 0$.

Donc, 0 est valeur propre de u de multiplicité au moins $n - 1$.

Donc, $\chi_u = X^{n-1} \times Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Or, on sait que le polynôme caractéristique est unitaire et de degré n , donc, $Q = X - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Donc, $\chi_u = X^{n-1}(X - \lambda)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Par théorème,

u est trigonalisable.

Exercice 23 :

Soit u et v deux endomorphismes de E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. On suppose que u et v commutent.

1. Justifier que u et v sont trigonalisables.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires supérieures.

Réponse

1. On sait que χ_u et χ_v sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, donc sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Par théorème,

u et v sont trigonalisables.

2. On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$. Pour cela, on note $\mathcal{P}_n$: « si E est un espace de dimension n et si u et v deux endomorphismes de E qui commutent, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires supérieures. »

Initialisation. $n = 1$. Dans ce cas, dans toute base de E , les matrices de u et v sont des matrices à 1 coefficient, donc sont triangulaires supérieures.

Donc, $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$, et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

On commence par montrer que u et v possède un vecteur propre commun.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

Comme $u - \lambda \cdot \text{id}_E$ et v commutent, on sait que, $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id}_E)$ est stable par v .

On peut définir v_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par v .

Comme $\chi_{v_\lambda} \in \mathbb{C}[X]$ (et est de degré $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$), χ_{v_λ} est scindé, donc possède une racine μ .

Il existe donc $x \in E_\lambda(u)$ tel que $v_\lambda(x) = \mu \cdot x$.

D'où, $v(x) = \mu \cdot x$.

Comme $x \in E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda \cdot x$. Donc,

x est un vecteur propre commun à u et v .

Comme x est un vecteur propre, $x \neq 0$.

Donc, (x) est une famille libre de E . On la complète en $\mathcal{C} = (x, e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

En écrivant les matrices par blocs, on a :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \mu & L_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

où L_1 et L_2 sont des matrices lignes, et A_1 et A_2 sont des matrices carrées d'ordre n .

Comme A et B commutent, la calcul par blocs de $AB = BA$ donne, $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note f_i l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A_i .

Les endomorphismes f_1 et f_2 commutent et $\dim(\mathbb{C}^n) = n$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T_1 = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f_1)$ et $T_2 = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f_2)$ sont triangulaires supérieures.

En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à $\mathcal{C}$, on a :

$$A_1 = PT_1P^{-1} \quad \text{et} \quad A_2 = PT_2P^{-1}.$$

D'où,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & L_1 \\ 0 & PT_1P^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_{=Q} \begin{pmatrix} \lambda & L_1P \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \mu & L_2 \\ 0 & PT_2P^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_{=Q} \begin{pmatrix} \lambda & L_2P \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+1}$, donc, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ est inversible et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

- La matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est semblable à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} \lambda & L_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$
- La matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$ est semblable à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} \lambda & L_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$.
- La matrice de passage est la même pour A et B .

Donc, $\begin{pmatrix} \lambda & L_1P \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E , et $\begin{pmatrix} \lambda & L_2P \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ est la matrice de v dans cette même base $\mathcal{B}$ de E .

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.