Les suites numériques

I Les suites arithmétiques

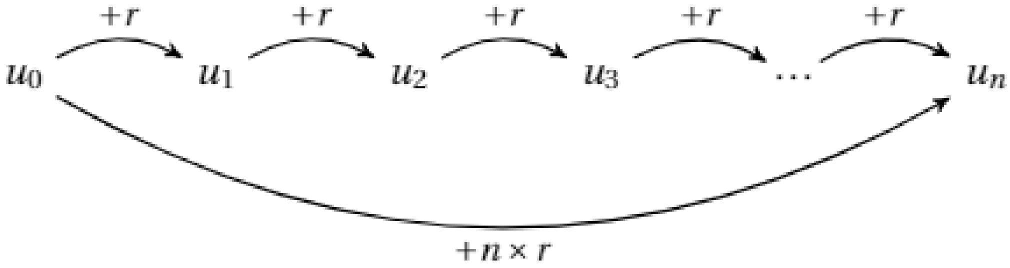
1 - Définition et propriétés

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$ (formule par récurrence)

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



Dans une suite arithmétique, on passe donc d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 0$

Propriété :

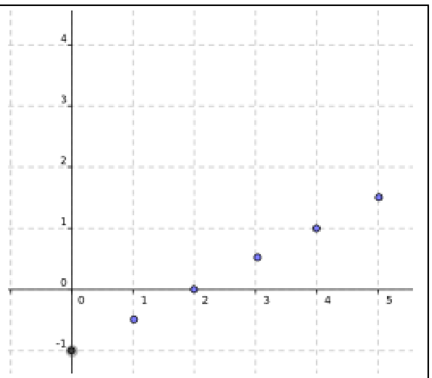
Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0,

alors $U_n = U_0 + nr$ (formule explicite)

Représentation graphique :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n\,;U_n)$.



Remarque : la représentation graphique d'une suite arithmétique est la même que celle d'une fonction affine.

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant arithmétique de raison r, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Ainsi on en déduit que $U_{n+1} - U_n = r$

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $r = 0$ alors $U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante

3- Somme des termes

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (nombre\ de\ termes) \times \frac{(Premier\ terme) + (Dernier\ terme)}{2}$$

Exemples :

- En prenant la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la somme des 10 premiers termes est :

$$S = \sum_{n=0}^{9} U_n = 10 \times \frac{U_0 + U_9}{2} = 10 \times \frac{0 + 18}{2} = 90$$

- En prenant, la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la somme des termes allant de U_5 à U_8 est :

$$S = \sum_{n=5}^{8} U_n = 4 \times \frac{8 + 14}{2} = 44$$

4- Moyenne arithmétique de deux nombres

Définition :

La **moyenne arithmétique** de plusieurs nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs. Elle est généralement notée m.

Exemple : La moyenne des 4 notes 10, 18, 5, 17 est : $m = \frac{10+18+5+17}{4} = 12{,}5$

Démonstration : Calculer la moyenne arithmétique du terme qui précède U_n et de celui qui le suit

On sait que : $U_{n+1} = U_n + r$

De la même manière : $U_n = U_{n-1} + r \Leftrightarrow U_{n-1} = U_n - r$

Donc la moyenne arithmétique du terme qui précède U_n et de celui qui le suit est :

$$m = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

$$m = \frac{U_n - r + U_n + r}{2}$$

$$m = U_n$$

Propriété :

U_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit.

Exemple : En prenant la suite arithmétique que forme les nombres pairs, la moyenne entre 6 et 10 est le terme situé entre ces deux nombres, soit 8.

Application : Exercice 1

II Les suites géométriques

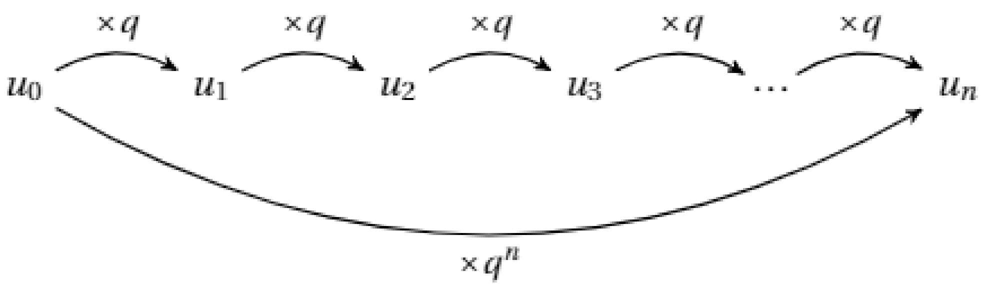
1 - Définition et représentation

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = q \times U_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :



Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q.

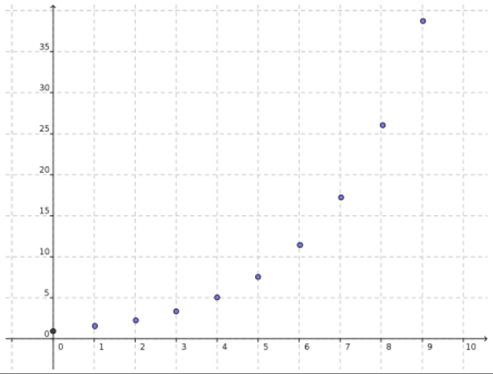
Exemple : La suite définie par $U_{n+1} = 2 \times U_n$ avec $U_0 = 1$ est une suite géométrique de raison $q = 2$. Les premiers termes de cette suite sont 1, 2, 4, 8…

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n\,;U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance (ou décroissance) exponentielle**.



2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant géométrique de raison q, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \ q \times U_n$.

Ainsi on en déduit que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \ q$

- Si $q > 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow U_n \ < U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $q = 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante.

3- Somme des termes

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Premier\ terme) \times \frac{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}$$

Exemples : On considère la suite géométrique (U_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = 2$

La somme des termes allant de U_0 à U_4 est :

$$S = \sum_{n=0}^{4} U_n = U_0 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 62$$

4- Moyenne géométrique de deux nombres

Définition :

La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est un nombre c tel que :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}$$

Propriété :

De manière générale, pour une suite géométrique chaque terme U_n est la moyenne du terme qui le précède U_{n-1} et du terme qui le suit U_{n+1} tel que :

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{U_n}{U_{n+1}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}}$$

Exemple : On considère la suite géométrique $(U_{n)}$ de premier terme $U_0 = 2$. On sait également que $U_2 = 50$.

Pour calculer U_1, on fait : $U_1 = \sqrt{U_0 \times U_2} = \sqrt{2 \times 50} = \sqrt{100} = 10$

Application : Exercice 2

Les suites numériques (Exercices)

Exercice 1

1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite arithmétique (U_n) de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = -7$

2/ Représenter graphiquement la suite (U_n)

3/ En déduire son sens de variation

4/ Calculer la somme des termes entre U_2 et U_8.

5/ Sans la calculer, que vaut la moyenne de U_{54} et U_{56} ?

Exercice 2

1/ Calculer les cinq premiers termes de la suite géométrique (V_n) de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 20$

2/ Représenter graphiquement la suite (V_n)

3/ En déduire le sens de variation de la suite (V_n)

4/ Calculer la somme des termes entre V_2 et V_4.

5/ Sans la calculer, que vaut la moyenne de V_{23} et V_{25} ?

Exercice 3

Pour chacune des trois situations suivantes, indiquer :

- La nature (arithmétique ou géométrique)
- Le premier terme (U_0)
- La raison
- Le sens de variation de la suite (U_n)
- L'expression de $U_n$en fonction de n.

Situation 1 : On injecte $8\ cm^3$ d'un produit calmant à un malade. À chaque heure, 10% du produit présent dans l'organisme est éliminé. On note U_n le volume, exprimé en cm^3, du produit calmant présent dans l'organisme du malade n heures après l'injection.

Situation 2 : Un cycliste reprend l'entraînement après une période d'interruption due à une blessure ; il prévoit d'effectuer $80\ km$ le premier jour puis de parcourir chaque jour $10\ km$ de plus que la veille. On note U_n la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste lors de son n-ième jour d'entraînement.

Situation 3 : Un salarié se voit proposer le contrat d'embauche suivant : le salaire annuel s'élève à 24000 € lors de la première année et augmentera chaque année de 3%. On note U_n le salaire annuel, en euros, que percevra le salarié lors de sa n-ième année de contrat.

Exercice 4

Un retraité ayant placé $24\ 000$ € sur un compte épargne se fait verser chaque mois 250 € depuis ce compte, sans le recréditer. On note U_n le montant restant sur son compte d'épargne au bout de n mois

1/ Donner la valeur de U_0, et de la raison

2/ Donner une expression de U_n en fonction n

3/ Au bout de combien de temps, l'argent sur son compte, aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice 5

Une personne place la somme de $10\ 000$ € sur un placement à intérêts composés lui rapportant $3\ \%$ par an. Cela signifie que chaque année, $3\ \%$ du montant du placement sont ajoutés à la somme déjà présente sur le placement. On note (U_n) le montant du placement au bout de n années.

1/ Déterminer U_0, U_n et la raison q

Pour réaliser les questions suivantes, on pourra s'aider d'un tableur :

2/ Quelle sera la somme détenue sur ce placement au bout de 2 ans ? de 5 ans ? de 10 ans ?

3/ Au bout de combien d'années le montant placé est-il doublé ?

Exercice 6

Les T STMG ont besoin de vacances ! Pour cela, ils décident de s'organiser un voyage et de profiter des tarifs de groupe. All inclusive, ils doivent avoir 1270 € par personne.

Malheureusement, ils ne possèdent pour le moment que 327 € chacun. Ils décident donc de mettre 100 € de côté par mois pour se payer rapidement le voyage.

On considère la suite (U_n) représentative de la situation exposée.

1/ Déterminer l'expression de la suite (U_n) en trouvant la raison r et le premier terme U_0

2/ Dans combien de mois, les T STMG pourront partir en voyage ?

3/ Nous sommes en septembre 2023, et la classe souhaite partir au mois de janvier. Quelle somme devront mettre de côté chaque mois les élèves à la place des 100 € initialement prévus ?

Exercice 7

On considère la suite (U_n) telle que $U_0 = 12$ et définie pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = 3U_n - 4$

Par ailleurs, on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n - 2$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison ainsi que son premier terme.

Exercice 8

Dans cette partie, on se propose de modéliser, par une suite géométrique, l'évolution de l'émission moyenne de CO_2 (exprimée en grammes de CO_2 par km) des voitures particulières neuves immatriculées chaque année en France. On considère que celle-ci diminue de 2,1 % par an à partir de 2013, sachant que cette année-là l'émission moyenne de CO_2 était de $117\ g/km$.

Pour tout entier naturel n, on note U_n l'émission moyenne de CO_2 des voitures particulières neuves immatriculées dans l'année en France pour l'année $2013 + n$. Ainsi $U_0 = 117$.

1a/ Montrer que $U_1 \approx 114{,}5$

1b/ Calculer U_2 (On arrondira le résultat au dixième).

2/ Expliquer pourquoi la suite (U_n) est une suite géométrique. Donner sa raison.

3/ Exprimer U_n en fonction de n.

4/ Selon ce modèle d'évolution, la France respectera-t-elle l'objectif européen d'émissions moyennes d'au maximum 95 grammes de CO_2 par km en 2020 pour les voitures particulières neuves ?

Exercice 9

Une famille souhaite louer une maison plus grande que celle qu'elle occupe actuellement. Dans sa recherche, elle trouve deux offres similaires en termes de prestations (nombre de chambres, surface…) mais qui comportent des différences dans le mode de location :

- Offre n°1 : le loyer initial est de 12000 € la première année avec une augmentation forfaitaire de 250 € chaque année.
- Offre n°2 : le loyer initial est de 12000 € la première année avec une augmentation forfaitaire de 2% chaque année.

On considère la suite (U_n) représentative de l'offre n°1 avec $U_1 = 12000$.

De même, la suite (V_n) est représentative de l'offre n°2 avec $V_1 = 12000$

La famille veut louer cette maison pendant 7 ans

1/ Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

2/ Calculer U_6 avec les deux offres

3/ Calculer la somme payée au bout des 7 ans d'occupation et dire quelle offre est la plus avantageuse.

Exercice 10

Le but est de comparer l'évolution de la population de deux quartiers d'une même ville : le quartier Uranus et le quartier Saturne.

En 2010, Uranus compte 2 000 habitants et Saturne en compte 2 700. On fait l'hypothèse que, chaque année, la population d'Uranus augmente de 250 habitants et celle de Saturne augmente de 4 %.

On note U_0 la population d'Uranus en 2010, U_1 sa population en 2011 et plus généralement U_n sa population en l'an $2010 + n$.

De même, on note S_0 la population de Saturne en 2010, S_1 sa population en 2011 et plus généralement S_n sa population en l'an $2010 + n$.

1/ Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Justifier.

2/ Démontrer que la suite (S_n) est géométrique de raison $1{,}04$.

3/ Afin de prévoir l'évolution de la population de ces deux quartiers, on a réalisé ci-contre une feuille de calcul. (Les valeurs ont été arrondies à l'unité).

a/ Indiquer la formule saisie en $C3$ qui, recopiée vers le bas, permet d'obtenir les termes consécutifs de la suite (S_n) dans la colonne C.

b/ Compléter les colonnes B et C.

c/ D'après cette feuille de calcul, en quelle année la population d'Uranus dépassera-t-elle pour la première fois celle de Saturne ?

	A	**B**	**C**
1	n	u_n	s_n
2	0	2 000	2 700
3	1	2 250	2 808
4	2	2 500	2 920
5	3	2 750	3 037
6	4	3 000	3 159
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		