

Variables aléatoires finies

Table des matières

1	Variable aléatoire réelle finie	2
1.1	Définition	2
1.2	Loi d'une variable aléatoire finie	3
1.3	Transformation d'une variable aléatoire finie	4
1.4	Moments d'une variable aléatoire finie	4
1.4.1	Espérance	4
1.4.2	Variance	6
2	Lois usuelles finies	8
2.1	Loi certaine	8
2.2	Loi uniforme	9
2.3	Loi de Bernoulli	10
2.4	Loi binomiale	10
2.5	Simulation des lois usuelles	12

On suppose dans ce chapitre que Ω est fini.

1 Variable aléatoire réelle finie

1.1 Définition

Définition 1.1 : Variable aléatoire

On appelle **variable aléatoire** toute application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Définition 1.2 : Support d'une variable aléatoire

L'ensemble des valeurs prises par X est noté

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \text{ avec } \omega \in \Omega\}.$$

$X(\Omega)$ est appelé le **support de X** ou l'**univers image de X** .

Comme $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.

Exemple 1. Si on lance deux dés à 6 faces, l'univers est constitué des événements élémentaires suivants :

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2.$$

La somme des numéros obtenus sur les deux dés se modélise par la variable aléatoire finie X définie par

$$\begin{aligned} X : \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) &\mapsto i + j \end{aligned}$$

Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X sont :

$$X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket.$$

Proposition 1.3 : Événements liés aux variables aléatoires

Si X est une variable aléatoire et $x \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des événements.

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\},$$

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}.$$

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble suivant est un événement.

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 2. On reprend l'exemple précédent. X est la somme des numéros obtenus sur les deux dés. L'événement " X prend la valeur 4" est donc

$$[X = 4] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 4\} = \{(1, 3); (2, 2); (3, 1)\}.$$

L'événement " X prend une valeur inférieure ou égale à 3" est donc

$$[X \leq 3] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq 3\} = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1)\}.$$

Exemple 3. Si X est une variable aléatoire et $x \in \mathbb{R}$, définissez les ensembles $[X \geq x]$, $[X \neq x]$, $[X < x]$ et $[X > x]$.

Solution.

Proposition 1.4 : Opérations sur les variables aléatoires finies

Si X, Y sont deux variables aléatoires finies et λ un réel, alors $\lambda X, X^2, e^X, X + Y, X \times Y, \max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.

Démonstration. Ceci découle directement des résultats usuels sur les applications réelles. $\square$

1.2 Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 1.5 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **loi de probabilité** de X l'application $\mathcal{L}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

Méthode 1.6 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

Afin de pouvoir déterminer la loi d'une variable aléatoire finie, il faudra donc déterminer d'abord son support $X(\Omega)$, puis, pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x)$.

On prendra garde à ne pas confondre X (variable aléatoire), $[X = x]$ (événement) et $\mathbb{P}(X = x)$ (réel).

Théorème 1.7 : Système complet associé à une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme une partition de Ω . Par conséquent,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Cette famille est appelée **système complet d'événements associé à la variable aléatoire X** .

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. Par définition d'une application, l'image de ω par X , $X(\omega)$, est définie de manière unique dans $X(\Omega)$. Ainsi

$$\exists! x \in X(\Omega), \quad \omega \in [X = x].$$

ω appartient à un unique ensemble de la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. On en déduit que $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est une partition de Ω . D'après la propriété sur une famille d'événements deux à deux incompatibles du chapitre précédent,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x]\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

$\square$

Exemple 4. On lance une pièce trois fois. Soit X le "nombre de piles". L'expérience aléatoire considérée a 8 éventualités équiprobables :

$$\Omega = \{P, F\}^3.$$

ω	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

On voit que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et on détermine les événements $[X = x]$ pour $x \in X(\Omega)$:

$$[X = 0] = \{FFF\} \quad [X = 1] = \{PFF, FPF, FFP\}$$

$$[X = 2] = \{PPF, PFP, FPP\} \quad [X = 3] = \{PPP\}$$

La loi de probabilité de X est alors :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

La famille d'événements $([X = 0], [X = 1], [X = 2], [X = 3])$ forme un système complet d'événements.

1.3 Transformation d'une variable aléatoire finie

Définition 1.8 : Transformation d'une variable aléatoire finie

Soient X une variable aléatoire finie et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $g(X)$ l'application définie par

$$\begin{aligned} g(X) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto Y(\omega) = g(X(\omega)). \end{aligned}$$

Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire finie.

Soient a et b deux réels. Si X est une variable aléatoire finie, alors $aX + b$ est aussi une variable aléatoire finie. Il en est de même pour $X^2, e^X \dots$

Exemple 5. Reprenons l'exemple 4. Soit $g : x \mapsto 2x + 1$ et posons $Y = g(X)$. Déterminer la loi de probabilité de Y .

Solution.

1.4 Moments d'une variable aléatoire finie

1.4.1 Espérance

Définition 1.9 : Espérance d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie. L'**espérance** de X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par X , pondérée par les probabilités de chacune de ces valeurs.

Exemple 6. Reprenons l'exemple 4. Calculer l'espérance de X .

Solution.

Théorème 1.10 : Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire finie et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 7. Reprenons l'exemple 4. Soit $g : x \mapsto 2x + 1$ et posons $Y = g(X)$.

- (i) Calculer l'espérance de Y à l'aide du théorème de transfert.
- (ii) Retrouver l'espérance de Y à l'aide de la loi de Y calculée à l'exemple 6.

Solution.

Lemme 1.11 : Réécriture de l'espérance (hors programme)

Si X est une variable aléatoire définie sur Ω fini, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Démonstration. On reprend la définition 1.9 de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{\omega \in [X=x]} \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \quad \text{par union disjointe} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in [X=x]} x \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in [X=x]} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \text{car la famille } ([X = x])_{x \in X(\Omega)} \text{ forme une partition de } \Omega \end{aligned}$$

□

Propriété 1.12 : Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies et a, b des réels, alors :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \mathbb{E}(X) + b \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. On utilise le lemme 1.11 précédent pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned} a \mathbb{E}(X) + b \mathbb{E}(Y) &= a \left(\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) + b \left(\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + bY(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \mathbb{E}(aX + bY) \end{aligned}$$

□

Propriété 1.13 : Croissance de l'espérance

Si X est une variable aléatoire finie prenant des valeurs positives (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors :

$$\mathbb{E}(X) \geq 0.$$

Démonstration. Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, si $x \in X(\Omega)$, alors $x \geq 0$. De plus, $\mathbb{P}(X = x) \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \geq 0.$$

□

Propriété 1.14 : Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega),$$

alors :

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. Comme la variable aléatoire $Y - X$ prend des valeurs positives, d'après la propriété 1.13 précédente et par linéarité de l'espérance,

$$0 \leq \mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(Y) \geq \mathbb{E}(X).$$

□

Définition 1.15 : Variable aléatoire centrée

On dit que X est une **variable aléatoire centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

Si X une variable aléatoire finie, alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

1.4.2 Variance**Définition 1.16 : Moments d'ordre r**

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **moment d'ordre r** de X le réel

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Définition 1.17 : Variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **variance** de X le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right),$$

et **écart-type** de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)},$$

La variance d'une variable aléatoire est donc son moment centré d'ordre 2. Elle mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Propriété 1.18 : Positivité de la variance

Si X est une variable aléatoire finie, alors :

$$\mathbb{V}(X) \geq 0$$

Démonstration. Comme $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est une variable aléatoire prenant des valeurs positives, d'après la propriété 1.13,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right) \geq 0.$$

□

Propriété 1.19 : Variance nulle

Si X est une variable aléatoire finie, alors :

$$\mathbb{V}(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1.$$

Dans ce cas, on dit que X est presque sûrement égale à $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration. On a

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x) = 0$$

Puisque chaque terme est positif, pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$(x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x) = 0$$

On voit alors que si $x \neq \mathbb{E}(X)$ alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Pour $x = \mathbb{E}(X)$, on a donc $\mathbb{P}(X = x) = 1$.

□

Théorème 1.20 : Formule de Koenig-Huygens

Si X est une variable aléatoire finie, alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x^2 - 2x \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \mathbb{P}(X = x) \\ &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) \right) - 2 \mathbb{E}(X) \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \right) + \mathbb{E}(X)^2 \left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \end{aligned}$$

□

Exemple 8. Reprenons l'exemple 4. Calculer la variance de X .

Solution.

Propriété 1.21 : Variance

Si X est une variable aléatoire finie et a, b des réels, alors :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Démonstration. À faire en exercice à l'aide de la formule de Koenig-Huygens et du théorème de transfert. $\square$

Définition 1.22 : Variable aléatoire réduite

On dit que X est une **variable aléatoire réduite** lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$.

Propriété 1.23 : Variable aléatoire centrée réduite associée

Soit X une variable aléatoire finie. Si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors on note

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

La variable aléatoire X^* est appelée **variable aléatoire centrée réduite associée** à X .

En effet, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}(X) - \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}(X) = 0.$$

De plus, d'après la propriété 1.21,

$$\mathbb{V}(X^*) = \mathbb{V}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2}\mathbb{V}(X) = 1.$$

2 Lois usuelles finies

2.1 Loi certaine

Définition 2.1 : Loi certaine

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi certaine de paramètre a** lorsque

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$

Il n'y a pas de notation usuelle pour cette loi.

Proposition 2.2 : Espérance et variance

Si X suit une loi certaine de paramètre a , alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

Démonstration. Pour l'espérance, c'est immédiat. Pour la variance, il suffit d'appliquer la propriété 1.19 de variance nulle. $\square$

2.2 Loi uniforme

Définition 2.3 : Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Proposition 2.4 : Espérance et variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Pour calculer la variance, il nous faut calculer $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= (n+1) \frac{2(2n+1) - 3(n+1)}{12} = (n+1) \frac{n-1}{12} = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

□

Méthode 2.5 : Situation caractéristique

Toutes les éventualités sont équiprobables.

Exemple 9. Lors d'une partie de dés, le prix d'entrée est de 4 euros et le gain est égal au résultat du lancer. Le jeu est-il favorable ?

Solution.

Exemple 10. Soient a et b deux entiers tels que $a \leq b$. On définit de même les lois uniformes sur les intervalles entiers $\llbracket a, b \rrbracket$. Quelle en est l'espérance et la variance ?

Solution.

2.3 Loi de Bernoulli

Définition 2.6 : Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On a bien sûr $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Proposition 2.7 : Espérance et variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(X) = 0 \mathbb{P}(X = 0) + 1 \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (0^2 \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \mathbb{P}(X = 1)) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

□

Méthode 2.8 : Situation caractéristique

Expérience ayant deux issues possibles : succès de probabilité p ou échec.

Définition 2.9 : Variable indicatrice d'un événement

Soit A un événement. On appelle **variable indicatrice de l'événement A** la variable

$$\begin{aligned} 1_A : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

La variable aléatoire 1_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

2.4 Loi binomiale

Définition 2.10 : Loi binomiale

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Une loi de Bernoulli est une loi binomiale de paramètres 1 et p . Qui plus est, une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p permet de modéliser les résultats cumulés de n itérations d'une expérience aléatoire dont les résultats sont modélisés par une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .

Proposition 2.11 : Espérance et variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On effectue le changement d'indice $i = k - 1$:

$$\mathbb{E}(X) = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{n-1-i} = np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i}.$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$\mathbb{E}(X) = np (p + 1 - p)^{n-1} = np.$$

Pour calculer la variance, il nous faut calculer $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert. De même que précédemment,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \\ &= np \left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} i \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \right) \right) \\ &= np \left(\left((n-1)p \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{n-2-j} \right) + 1 \right) \text{ avec } j = i - 1 \\ &= np((n-1)p + 1). \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = np((n-1)p + 1) - (np)^2 = np(1-p).$$

□

Méthode 2.12 : Situation caractéristique

X est le nombre de succès lors de n épreuves identiques et indépendantes. La probabilité du succès à chaque épreuve étant p .

Exemple 11. On considère une urne de $a + b$ boules avec a boules blanches et b boules noires. Les boules blanches sont gagnantes et rapportent un euro, les boules noires ne rapportent rien.

- (i) On tire une boule. Comment peut-on modéliser les gains obtenus ?
- (ii) Même question si on effectue n tirages successifs avec remise.
- (iii) En déduire une démonstration de la formule du binôme de Newton.

Solution.

2.5 Simulation des lois usuelles

Informatique 2.13 : Python : simulation des lois usuelles

Pour une implémentation en Python, on commence par

```
import numpy.random as rd
```

- On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ a été implémenté préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut utiliser la fonction

```
X=rd.randint(1,n)
```

- On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ ont été implémentés préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p , on peut utiliser la fonction

```
X=rd.binomial(n,p)
```

Pour une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p , il suffit de prendre $n = 1$ et p .

Exemple 12. On peut simuler 40 fois une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ de paramètre $n = 15$. On stocke les résultats dans la liste A .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=15
A=np.zeros(40)
for k in range(0,40):
    A[k]=rd.randint(1,n) #on modifie le k-ème terme de la liste A
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

```
[1.3.10.7.6.14.12.10.1.3.13.9.9.13.9.4.12.3.10.14.2.9.9.11.4.6.2.2.2.3.13.7.1.8.4.9.7.7.13.10.]
```

Exemple 13. On peut simuler 10 fois une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.4$. On stocke les résultats dans la liste A .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=20
p=0.4
A=np.zeros(10)
for k in range(0,10):
    A[k]=rd.binomial(n,p)
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

[9.5.9.13.10.8.8.7.8.10.]

Exemple 14. On peut tracer le diagramme en bâtons d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.4$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n=20
p=0.4
L=np.zeros(n+1) # liste pour stocker les probabilités
C=np.zeros(n+1) # liste pour stocker les coefficients binomiaux
L[0]=(1-p)**n
C[0]=1
for k in range(1,n+1):
    C[k]=(n-k+1)/k*C[k-1] # relation de récurrence sur les coefficients binomiaux
    L[k]=C[k]*(p**k)*((1-p)**(n-k))
plt.bar(range(0,n+1),L,0.2)
plt.show()
```

