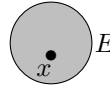


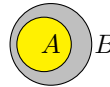
I Vocabulaire des ensembles et des applications

I-1 Ensembles

■ **Élément / appartenance** : Quand x est dans l'ensemble E , on note $x \in E$. On dit que x est un *élément* de E ou que x *appartient* à E .

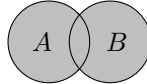


■ **Inclusion** : On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$ si tous les éléments de A sont aussi dans B . On dit également que A est un *sous ensemble* de B .



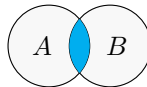
■ **Réunion** : Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E , on appelle *réunion* des ensembles A et B et on note $A \cup B$ l'ensemble contenant tous les éléments de A et B . Ainsi

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

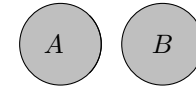


■ **Intersection** : Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E , on appelle *intersection* des ensembles A et B et on note $A \cap B$ l'ensemble ne contenant que les éléments qui sont à la fois dans A et dans B . Ainsi

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$



■ **Ensembles disjoints / incompatibles** : Si A et B sont deux sous ensembles d'un ensemble E , on dit qu'ils sont *disjoints* ou *incompatibles* si A et B n'ont aucun élément en commun. On note $A \cap B = \emptyset$.



⚠ VOCABULAIRE

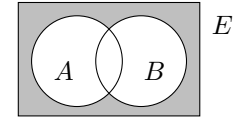
Il ne faut pas confondre "disjoints" et "distincts". (Distincts signifiant simplement $A \neq B$.)

■ **Complémentaire** : Si A est un sous ensemble d'un ensemble E , on appelle *complémentaire* de A (dans E) l'ensemble noté A^c ou $\bar{A}$, constitué de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A . Ainsi, si $x \in E$,

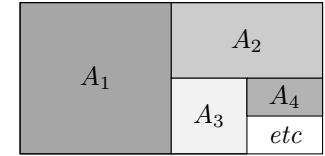
$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

S'il peut y avoir confusion d'ensembles " E ", on note plutôt $E \setminus A$ (pour E privé de A). Ainsi,

$$x \in E \setminus A \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$



■ **Partition / système complet** : Soit $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille de sous ensembles d'un ensemble E . On dit que $\mathcal{F}$ est une *partition* de E si et seulement si

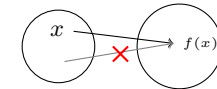
$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & \text{si } i \neq j, \text{ où } i, j \in I \\ \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{cases}$$


■ **Produit cartésien de n ensembles**. Soit $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ une famille de sous ensembles d'un ensemble E . On note $A_1 \times \dots \times A_n$ l'ensemble formé de tous les n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$.

I-2 Applications

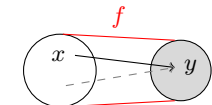
■ **Injection** : On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *injective* s'il n'existe au maximum qu'un antécédent par f pour chaque élément de F , autrement dit,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$



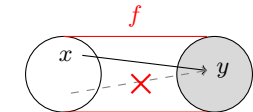
■ **Surjection** : On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *surjective* s'il existe au minimum un antécédent par f pour chaque élément de F , autrement dit,

$$y \in Y \Rightarrow \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$



■ **Bijection** : On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *bijjective* s'il existe exactement un antécédent par f pour chaque élément de F , c'est-à-dire que f est injective et surjective. autrement dit,

$$y \in Y \Rightarrow \exists! x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$



■ **Composée de deux bijections** : Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

■ **Image d'une partie** : Si $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$, on note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.

■ **Application réciproque** : Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective, on note $f^{-1} : F \rightarrow E$ l'unique application telle que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in E$$

II Dénombrement

Afin de résoudre certains cas de dénombrement sur des situations non élémentaires, on est amené à faire une **modélisation** visant à se ramener à une situation plus simple par une situation de bijection. Il faut donc connaître un certain nombre de situations basiques et savoir interpréter des mots clés dans l'énoncé.

II-1 Notion de cardinal

- **Cardinal** : On appelle *cardinal* d'un ensemble fini E le nombre d'éléments contenus dans E . On note ce nombre $\text{card } E$ ou quelquefois $|E|$.

Dénombrer des cas revient à déterminer le cardinal d'un ensemble.

- **Cardinal et bijection** : Si E est un ensemble fini et $f : E \rightarrow F$ une bijection, alors F est fini et $\text{card } E = \text{card } F$.

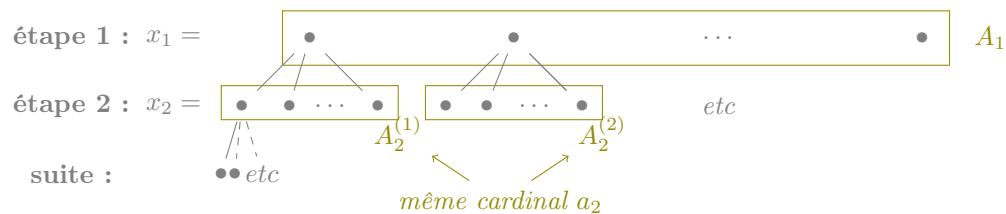
"Modéliser" une situation signifie "réaliser une bijection avec un ensemble plus simple à dénombrer".

On met ceci en valeur par l'utilisation de mots tels que “si et seulement si”, “cette situation revient à”, etc...

- *Principe multiplicatif* : Si $A = A_1 \times \dots \times A_n$, alors

$$\text{card } A = \text{card } A_1 \times \text{card } A_2 \times \dots \times \text{card } A_n$$

De manière générale, si les éléments de A peuvent se décomposer comme des n -listes $(x_1, \dots, x_n)$ liées par exemple à des étapes successives dont les possibilités $A_i^{(j)}$ pour l'étape i fixée sont en nombre identique ($\text{card}(A_i^{(1)}) = \text{card}(A_i^{(2)}) = \dots$)



Alors $\text{card } A = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

avec $a_1 = \text{card } A_1$, $a_2 = \text{card } A_2^{(1)} = \text{card } A_2^{(2)} = \dots, a_3 = \dots$.)

Outre les événements successifs, on peut également se trouver dans cette situation si on peut décrire le phénomène observé par des “et” (A_1 et A_2 et ...et A_n).

- *Cardinal de l'ensemble des parties* : Si E est un ensemble fini. On note

$$\mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$$

c'est-à-dire l'ensemble constitué de tous les sous ensembles de E . On a

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n, \quad \text{où } n = \text{card } E$$

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_E\}$$

On a $n = 3$ éléments dans E et retrouve bien $2^3 = 8$ éléments dans $\mathcal{P}(E)$.

II-2 Formules élémentaires

- **Nombre de p listes avec répétitions :** Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, on appelle *nombre de p liste avec répétition* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\{(i_1, \dots, i_p) \mid i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ \forall k = 1, \dots, p\}$$

c'est

$$n^p$$

C'est par exemple le nombre de mots de longueur p lettres que l'on peut constituer avec un stock de n lettres réutilisables.

- **Nombre de p listes sans répétitions :** Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, on appelle *nombre de p liste sans répétition* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\{ (i_1, \dots, i_p) \mid i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ \forall k = 1, \dots, p \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts} \}$$

c'est

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : le nombre de mots de longueur p lettres 2 à 2 distinctes que l'on peut constituer avec un stock de n lettres (non réutilisables).

- **Nombre de permutations :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *nombre de permutations de n éléments* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\{(i_1, \dots, i_n) \mid i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ \forall k = 1, \dots, n \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts}\}$$

c'est

$$n!$$

Exemple : le nombre de mots de longueur n lettres 2 à 2 distinctes que l'on peut constituer avec un stock de n lettres.

- **Nombre de combinaisons** : Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, on appelle *nombre de combinaisons de p nombres parmi n* le nombre d'éléments de l'ensemble

$$\{\{i_1, \dots, i_p\} \mid i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ \forall k = 1, \dots, p \text{ et où les } i_k \text{ sont deux à deux distincts}\}$$

c'est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple : le nombre de mots de résultats distinctes dans un tirage simultané de p boules dans une urne de n boules numérotées.