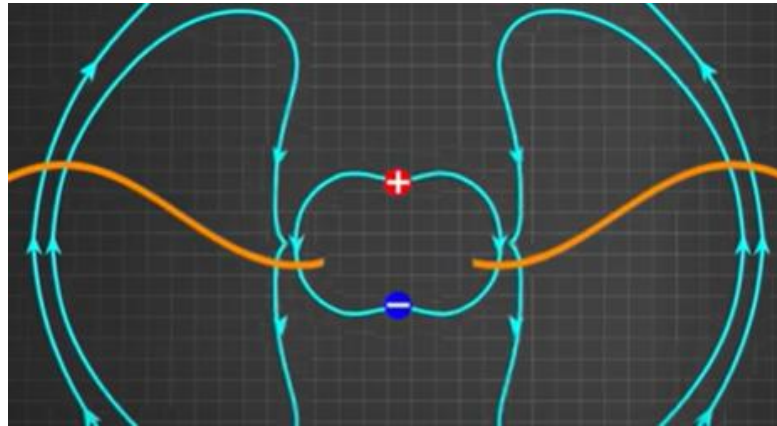


Rayonnement dipolaire

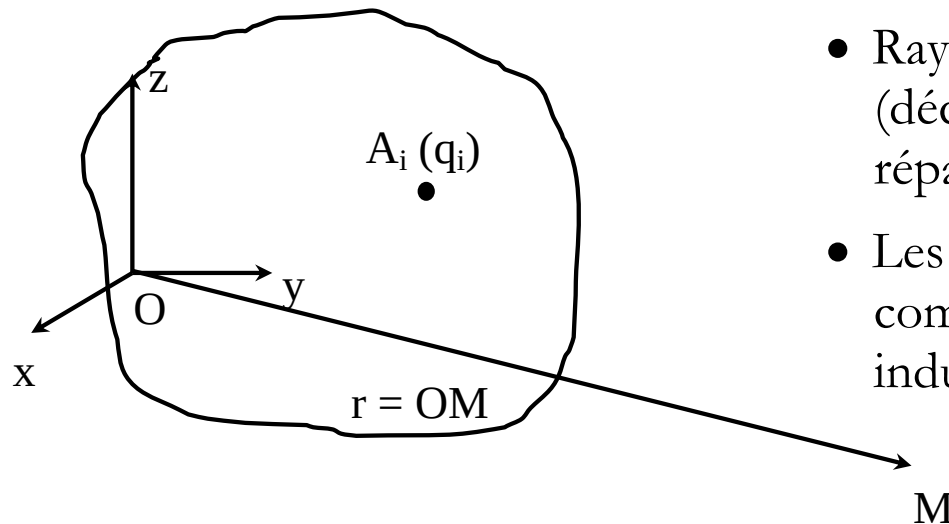


Understanding electromagnetic radiations

I) Cadre de l'étude :

On considère un ensemble de charges q_i , telles que $\sum_i q_i = 0$, mobiles au voisinage de l'origine O d'un système de coordonnées.

Le moment dipolaire de la distribution de charges est : $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$

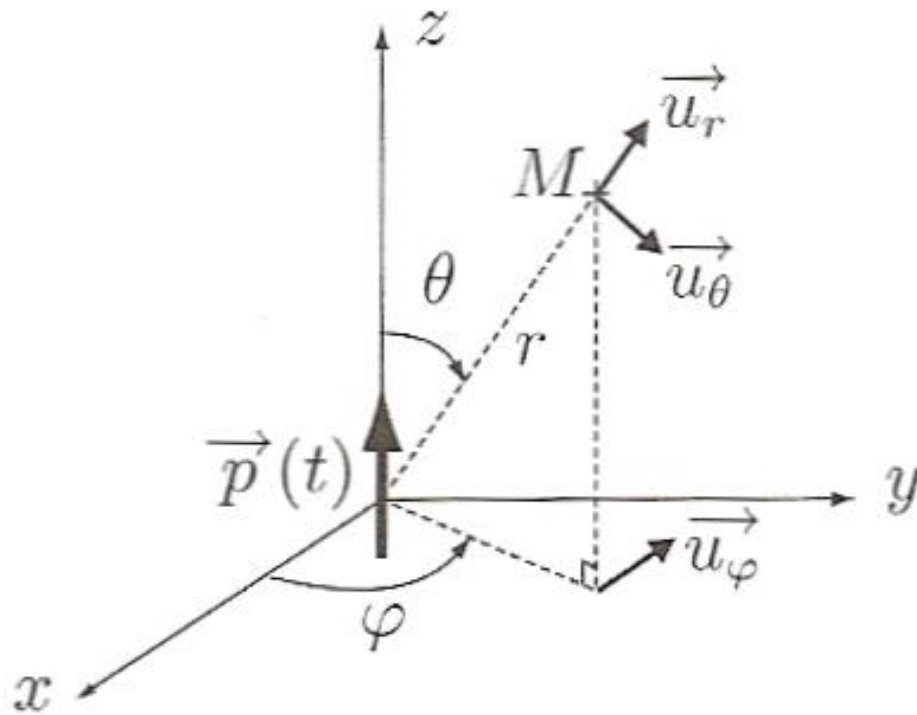


- Rayonnement émis par les atomes
- Rayonnement des antennes radios émettrices (décrit comme celui de dipôles rayonnants répartis le long de l'antenne)
- Les molécules de l'atmosphère terrestre se comportent également comme des dipôles induits par l'onde EM venant du Soleil.

On souhaite déterminer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à grande distance r de O et montrer que ce système rayonne de l'énergie (contrairement au dipôle statique).

Hypothèses simplificatrices :

- $r \gg a$: a est de l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la distribution de charges
- $v_i \ll c$: la particule q_i a une vitesse v_i non relativiste

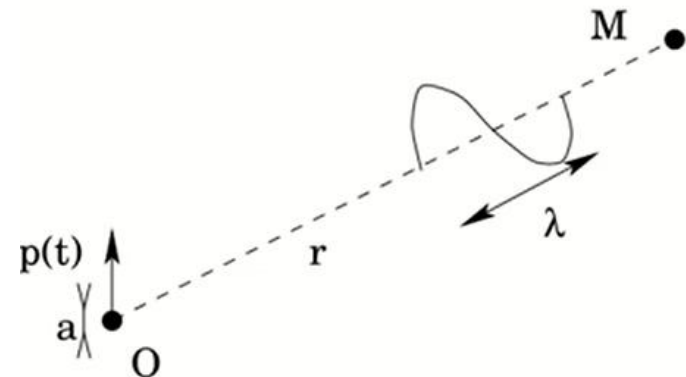


$$\vec{p} = qz \vec{u}_z$$

$$z = a \cos(\omega t) \quad ; \quad \vec{p} = qa \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

$$\frac{dz}{dt} = -a\omega \sin(\omega t)$$

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| \ll c \quad \text{donne} \quad a \ll \lambda$$



Zone de rayonnement :

L'étude du champ rayonné par ce dipôle à une distance $r \gg a$ de celui-ci conduit à distinguer trois zones dans l'espace :

- La zone statique : $a \ll r \ll \lambda$ (cas du dipôle électrostatique)
- La zone intermédiaire : $r \approx \lambda$
- La zone de rayonnement : $r \gg \lambda$

On s'intéresse aux champs EM dans la zone de rayonnement, ce qui correspond aux situations les plus répandues :

$$f = 3 \text{ MHz}$$

$$\lambda = c / f = 100 \text{ m}$$

II) Détermination des champs :

1) Expression générale :

Invariance selon φ . Les champs E et B ne dépendent que de r et de θ .

Le champ magnétique B est selon $\vec{u}_\varphi$ (étude des symétries).

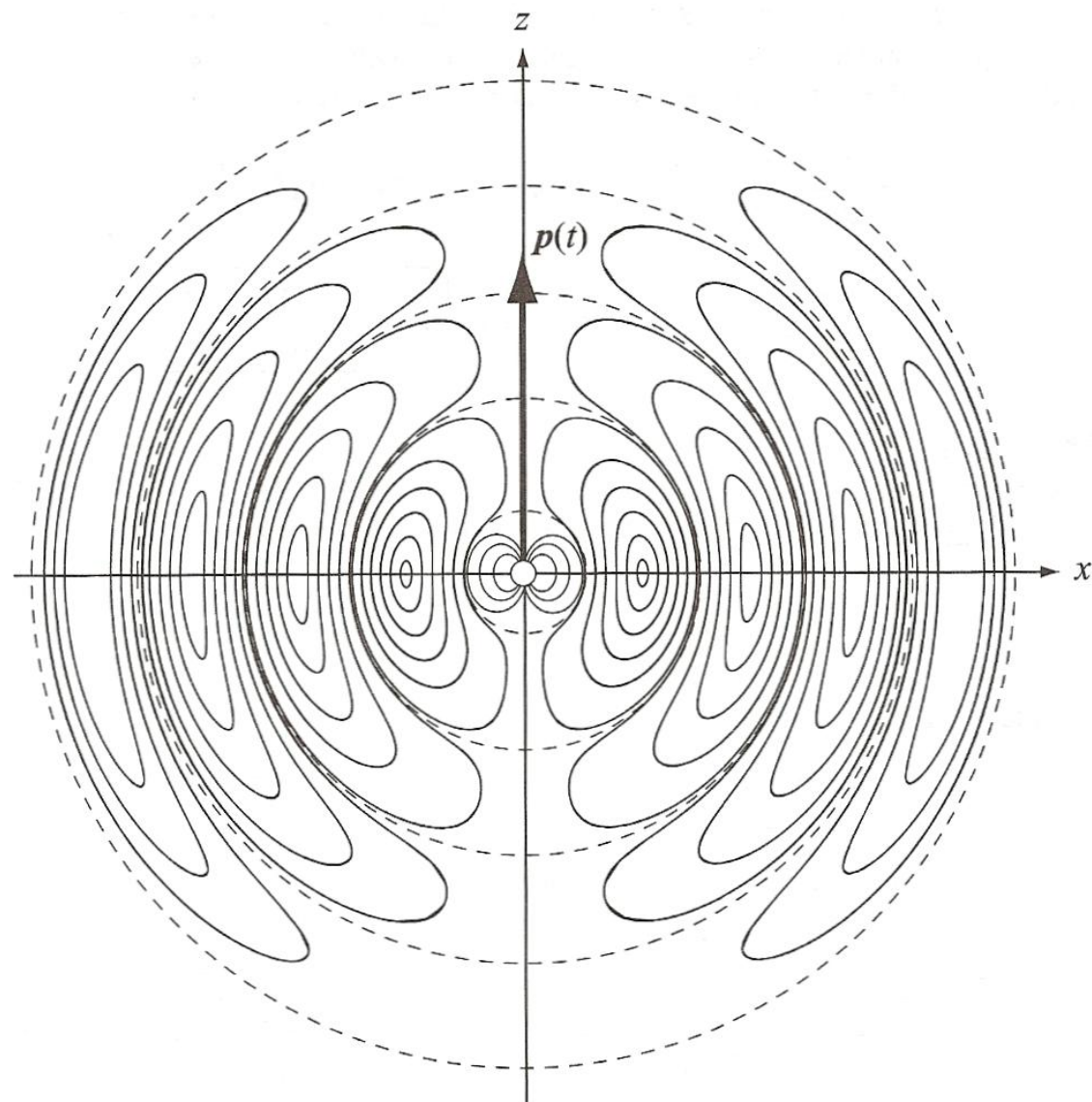
2) Expression des champs EM à grande distance de l'origine :

L'expression du champ magnétique se simplifie en : (r/c est le retard de propagation)

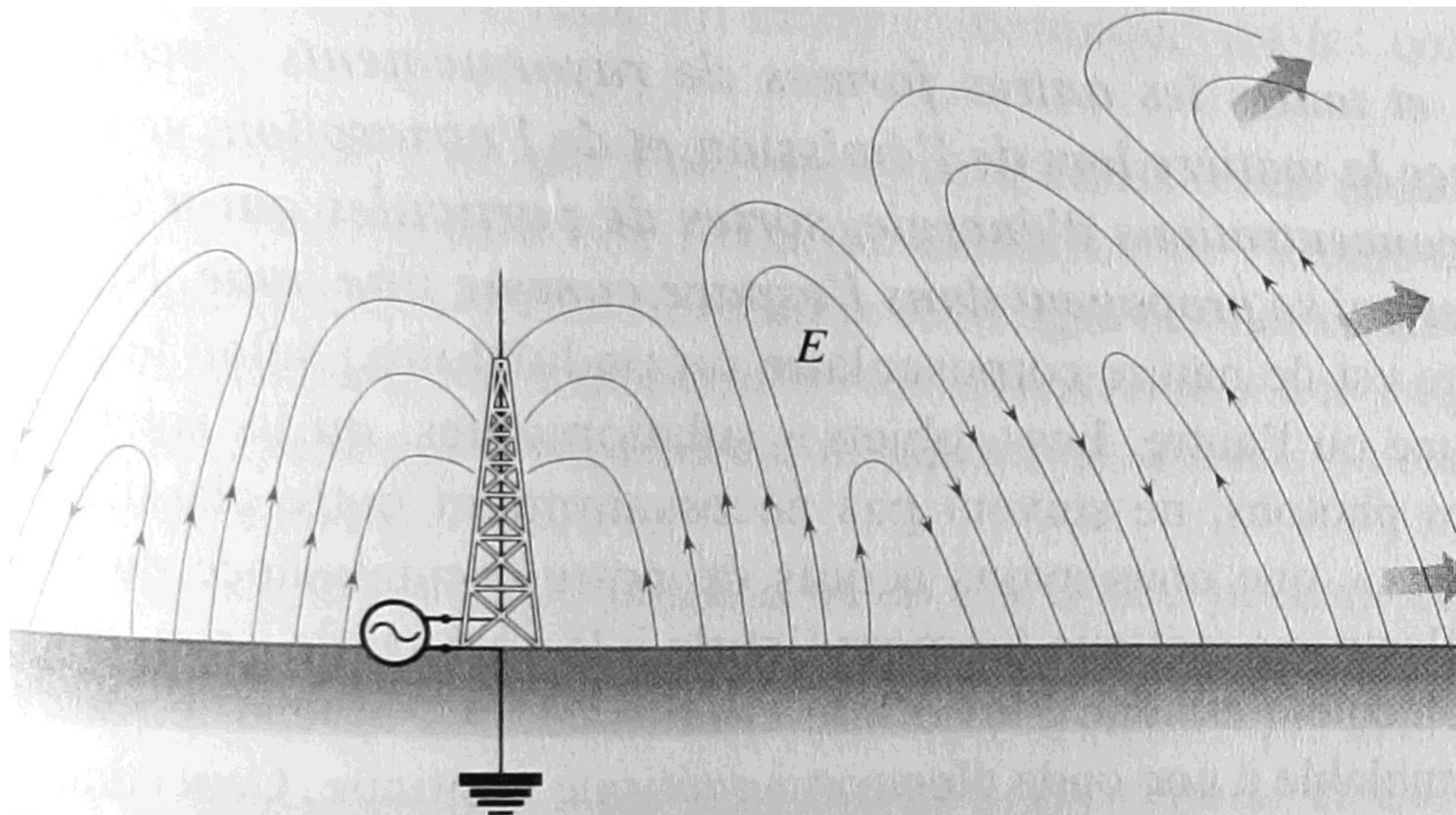
$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

En faisant à nouveau la même approximation que pour le champ magnétique, on trouve pour le champ électrique dans la zone de rayonnement : [ANIMATION](#)

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \sin \theta \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta$$



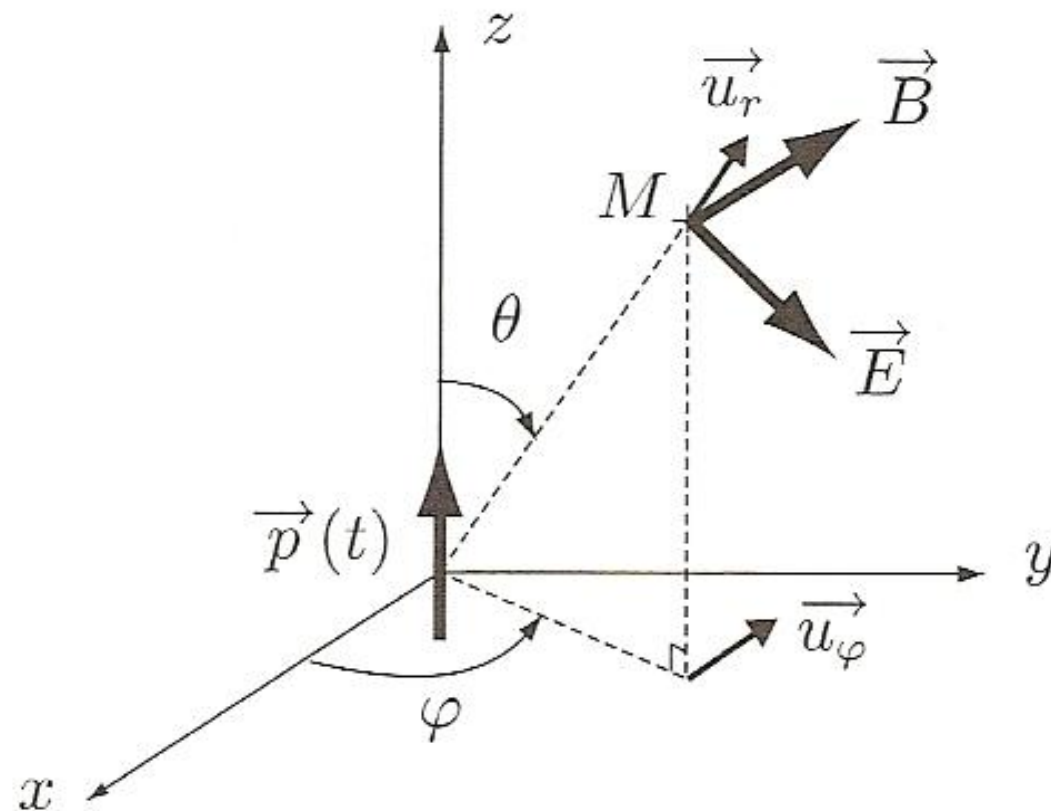
Allure des lignes de champ électrique du dipôle sinusoïdal



[Cliquer sur le lien](#)

3) Approximation locale par une onde plane :

Dans la zone de rayonnement, on constate que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires au vecteur $\vec{u}_r$ et que :



$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r}{c} \wedge \vec{E}$$

III) Aspect énergétique :

1) Puissance rayonnée par un dipôle :

On calcule le vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt^2)^2}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{e}_r$$

Rq1 : le vecteur de Poynting est donc radial et nous indique la direction locale de propagation de l'énergie.

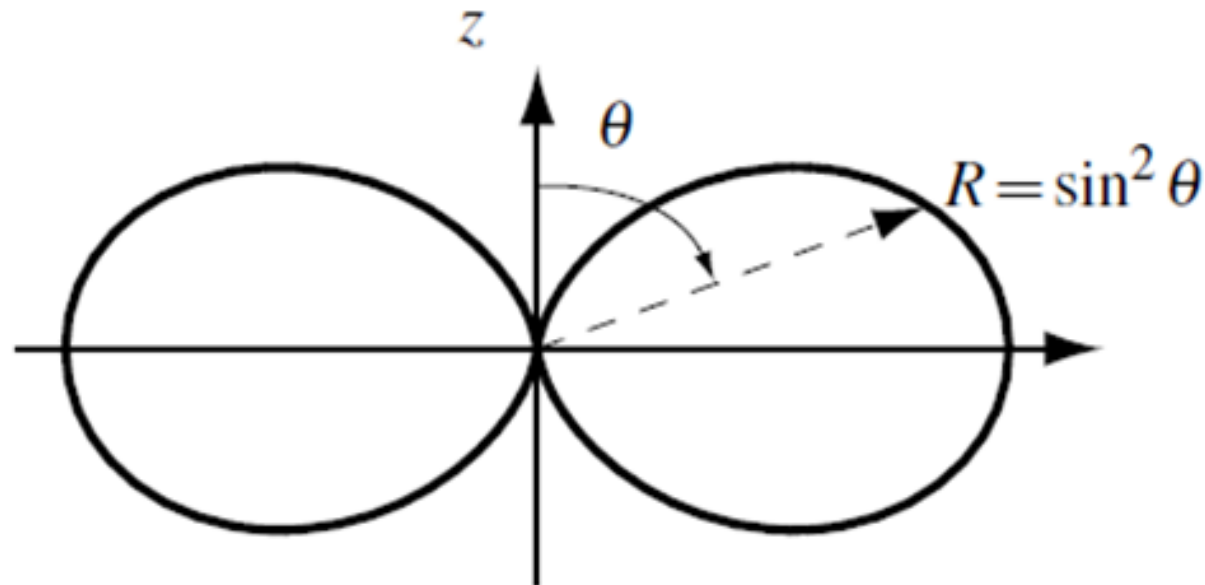
Rq2 : la dépendance en θ traduit le caractère **ANISOTROPE** de l'émission d'un dipôle ; cette émission est **DIRECTIVE** et présente un **maximum** dans la direction perpendiculaire à l'axe du dipôle, soit : $\theta = \pi / 2$

Indicatrice de rayonnement :

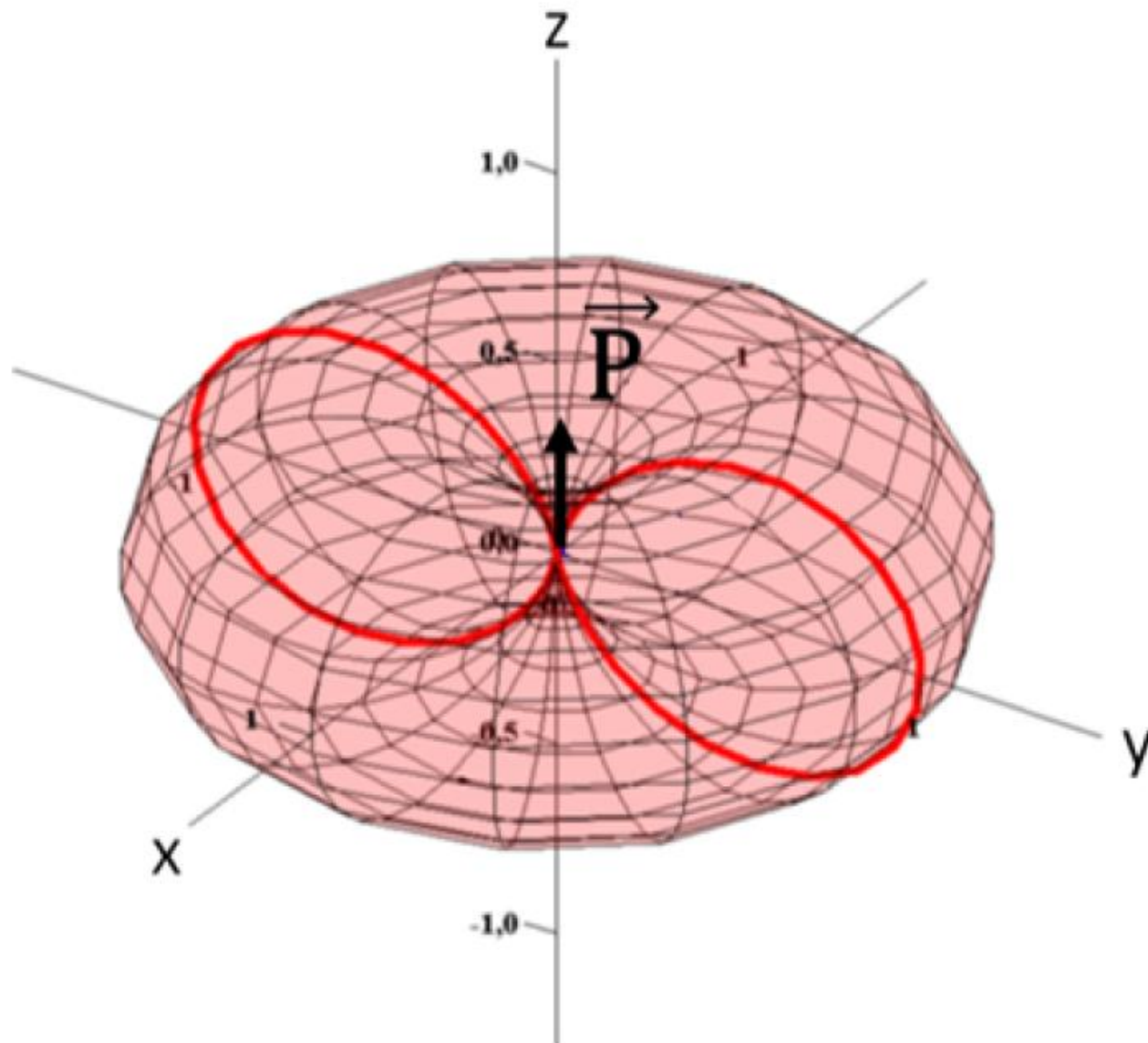
C'est la surface définie en coordonnées sphériques par :

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|(\theta, \varphi)}{\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|_{\max}} = \sin^2 \theta.$$

C'est une surface de révolution autour de (Oz) car R ne dépend pas de φ . La figure donne la coupe par un plan méridien $\varphi = \text{constante}$.



Pas d'énergie renvoyée selon (Oz) . Elle est maximale dans le plan perpendiculaire à (Oz) .



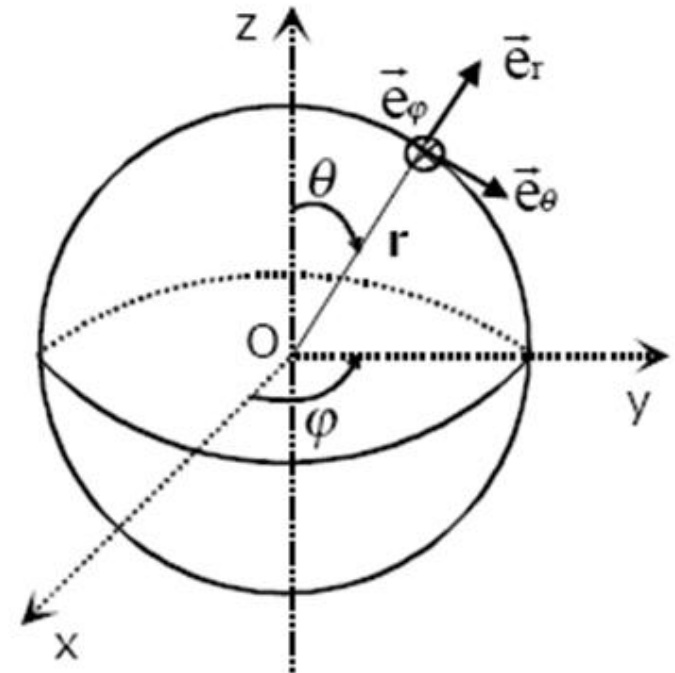
L'indicatrice de rayonnement en 3 D (une forme de donuts)

Puissance totale rayonnée :

On calcule le flux du vecteur de Poynting à travers la sphère de centre O et de rayon r (qui passe par M) :

$$P_{ray} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 (d^2 p / dt'^2)^2 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \times 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta$$

$$P_{ray} = \frac{\mu_0 (d^2 p / dt'^2)^2}{6\pi c}$$



Cette puissance rayonnée ne dépend pas de r (le milieu est non absorbant).

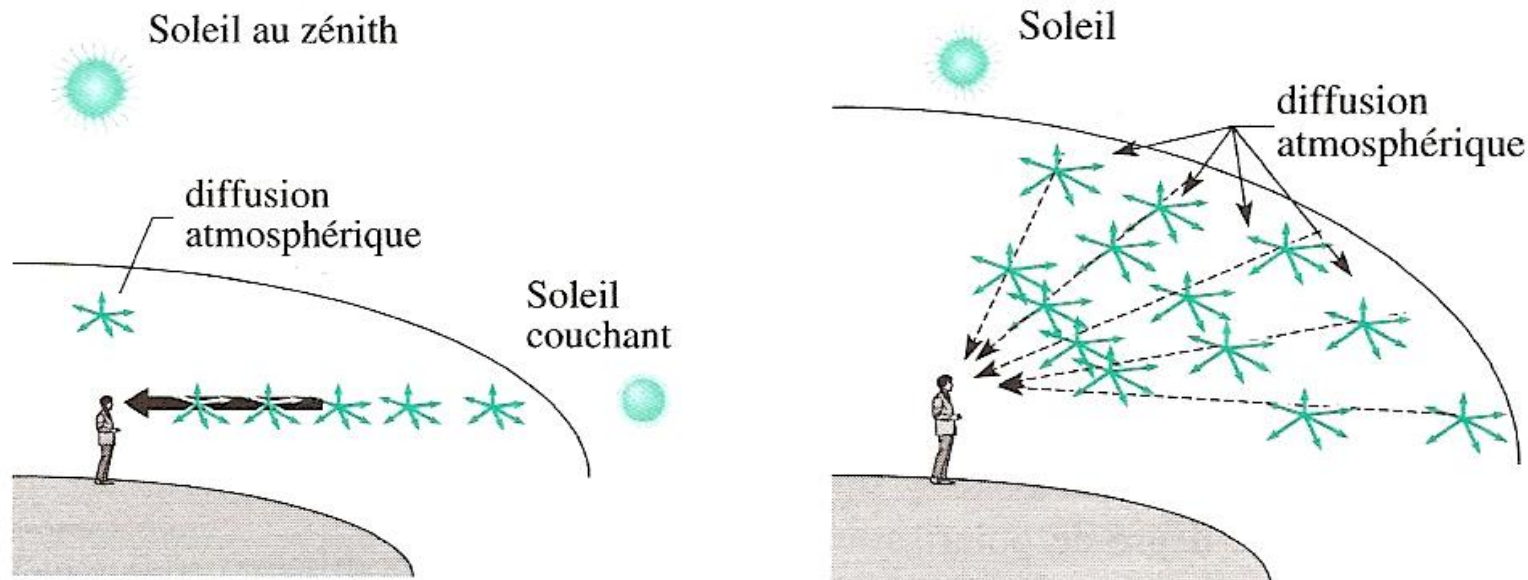
On pouvait se douter de la dépendance en $1/r$ des champs EM.

2) Cas d'un mouvement sinusoïdal :

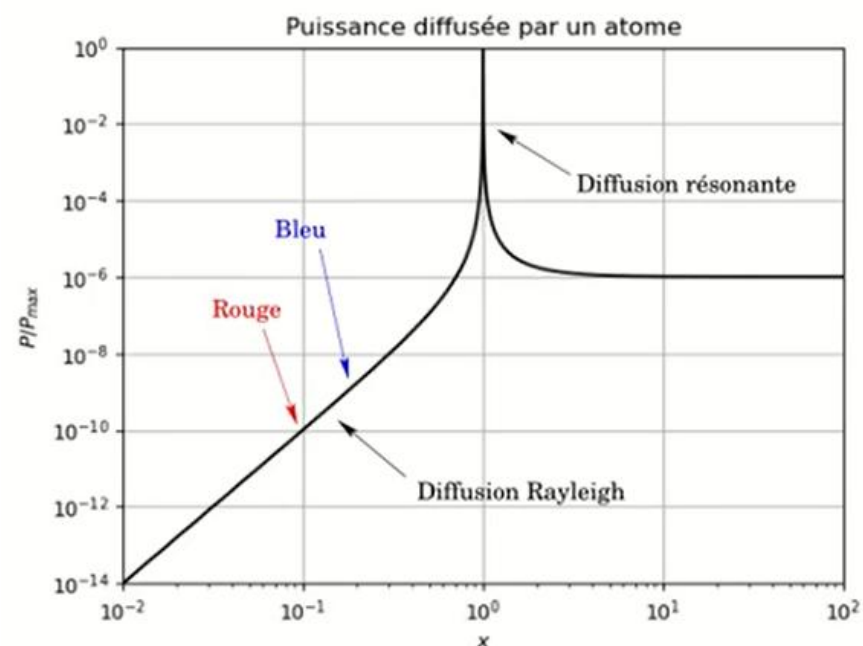
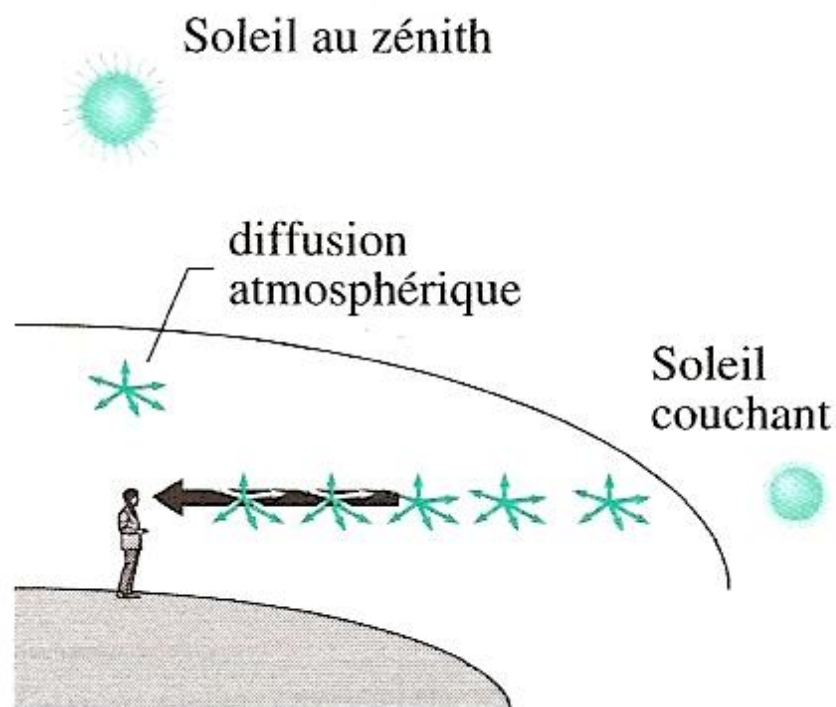
Modèle de l'électron élastiquement lié : [Enoncé](#) - [Corrigé](#)

$$\langle P_{ray} \rangle_t = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{4\pi^3 \mu_0 c^3 p_0^2}{3\lambda^4}$$

Rq1 : le rayonnement dipolaire est donc beaucoup **plus énergétique** dans les **courtes longueurs d'onde** (bleu-violet).



Ainsi, les molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles excités par le champ électromagnétique émis par le Soleil : elles vont « **diffuser** » ce rayonnement solaire et donner la **couleur bleue du « ciel »** (sauf lorsque l'on regarde dans la direction du Soleil et que l'on reçoit de la lumière « directe » dominée par le jaune).



Au Soleil couchant ou levant, la lumière directe va traverser une grande épaisseur d'atmosphère : les molécules vont diffuser ce rayonnement (toujours en privilégiant le bleu) dans **toutes les directions** (en particulier latéralement par rapport à la direction d'observation) ; nous percevons donc une lumière « **épurée** » en bleu, donc tirant de plus en plus **vers le rouge** au fur et à mesure que le Soleil descend sur l'horizon.

IV) Exemples d'application :

Rayonnement d'une particule chargée :

(Cliquer sur l'énoncé)

The electron, which has an accelerated movement around the proton, emits an electromagnetic radiation and loses energy.

Larmor's formula gives the power emitted by the electron, where a is its acceleration and c the speed of light in empty space :

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

- Suppose the electron is in its fundamental state $n = 1$.

Give the order of magnitude of the energy lost by the electron during one rotation.

In this question, the trajectory of the electron is supposed to be circular and uniform.

- $r(t)$ is the radius of the electron at instant t .

Show that it verifies the following differential equation by using an approximation which will be specified :

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r(t)^2}$$

- Estimate how much time it will take to the electron to fall on the proton. Comment this result.

Rayonnement d'une antenne demi-onde :

[Animation](#)

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz , de longueur $l = \frac{\lambda}{2}$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité :

$$I(z, t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \exp(j\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O , d'axe Oz . On se place dans la zone de rayonnement, $r \gg \lambda$.

On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\vec{B}(M, t) = i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \exp\left(i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\varphi,$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u}_r$

1. Calculer le vecteur de Poynting en M et sa valeur moyenne dans le temps. Dans quelle direction l'antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ?

2. Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r .

On donne

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22.$$

En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2$. Calculer numériquement R . Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $\mathcal{P} = 2100 \text{ kW}$ (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter à Al-louis).

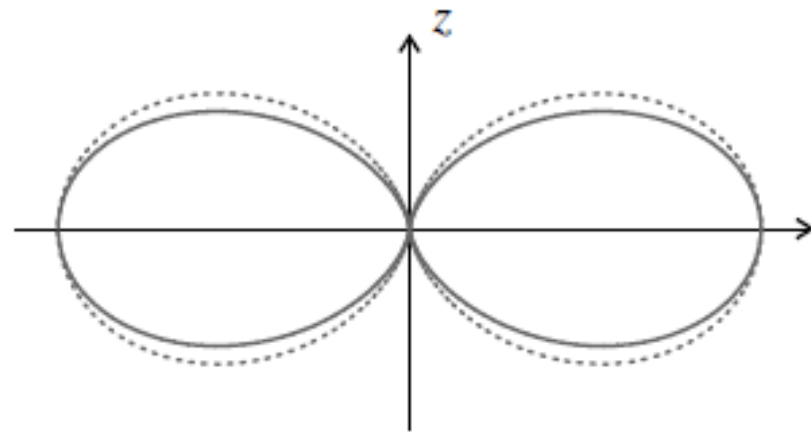
1. La relation de structure de l'onde plane donne : $\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}_r$, soit :

$$\vec{E}(M,t) = i \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta.$$

Le vecteur de Poynting moyen est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \vec{u}_r.$$

Le vecteur de Poynting est en $\frac{1}{r^2}$ donc la puissance traversant une sphère centrée sur l'origine est indépendante de son rayon. Il est nul pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et de norme maximale pour $\theta = \pi/2$: l'antenne ne rayonne pas dans sa propre direction et rayonne le maximum d'énergie dans son plan équatorial, comme le dipôle. L'indicatrice de rayonnement, tracée à l'aide d'un grapheur est représentée ci-dessous (on a tracé en pointillés l'indicatrice de rayonnement du dipôle électrique oscillant pour comparaison).



2. La puissance rayonnée à travers la sphère $\mathcal{S}(r)$ de centre O et de rayon r est :

$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}(r)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1,22 \mu_0 c I_0^2}{4\pi}.$$

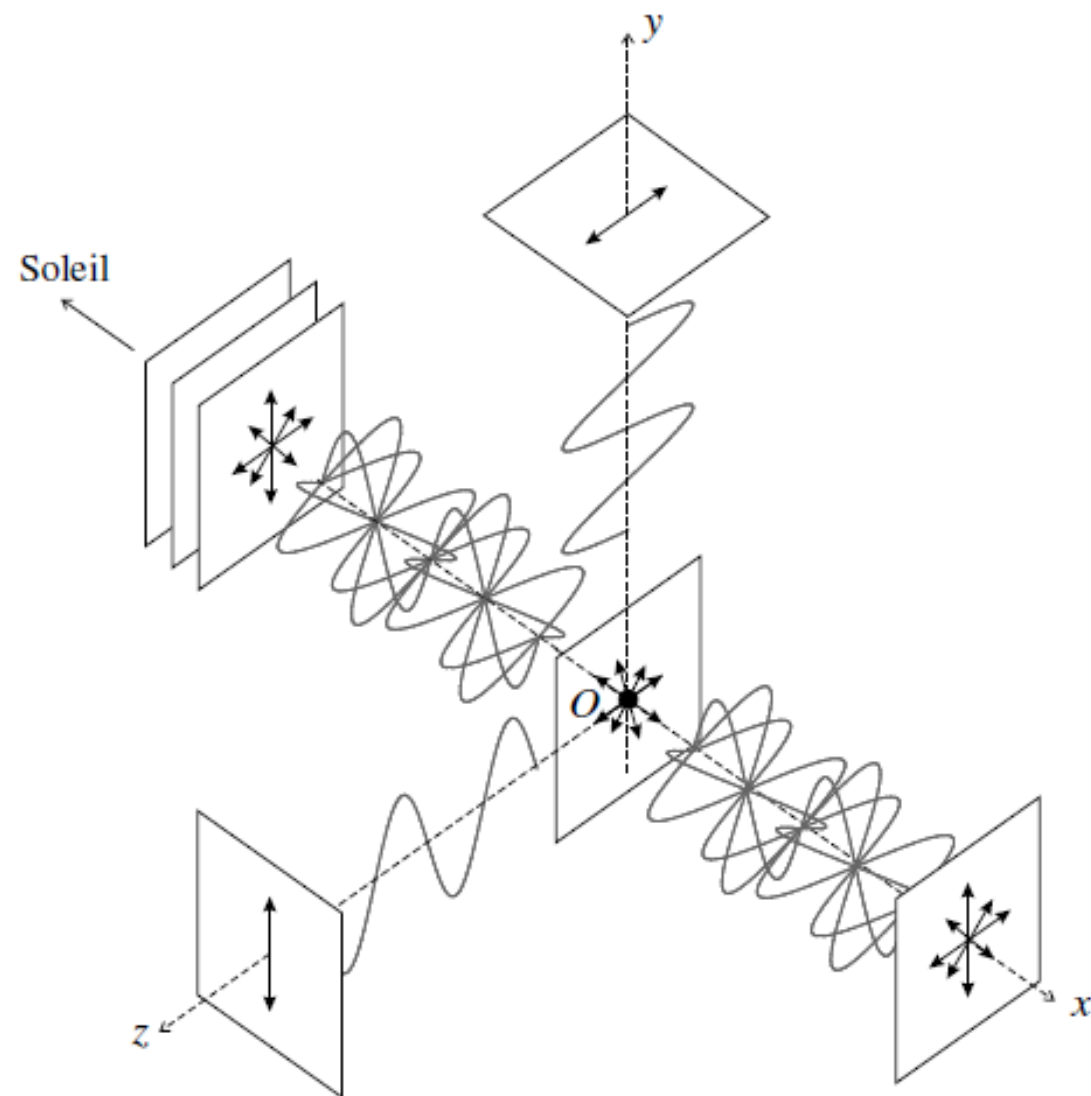
La résistance de rayonnement de l'antenne est donc égale à $R = \frac{1,22 \mu_0 c}{2\pi} = 73,2 \, \Omega$.

Complément : polarisation par diffusion



[Vidéo sur la polarisation](#)
(La physique animée)

A partir de la lumière non polarisée du Soleil, la lumière diffusée dans des directions orthogonales à la direction du Soleil est polarisée rectilignement.



Polarisation de la lumière solaire par la diffusion Rayleigh

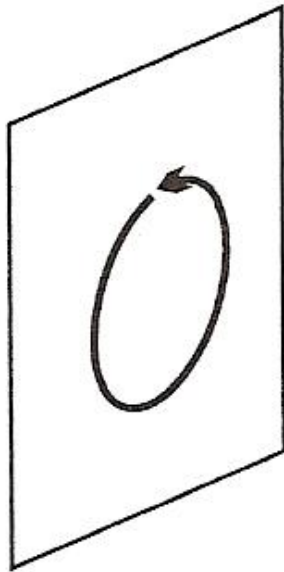
Vidéos expérimentales

Couleur et polarisation de la lumière
par diffusion

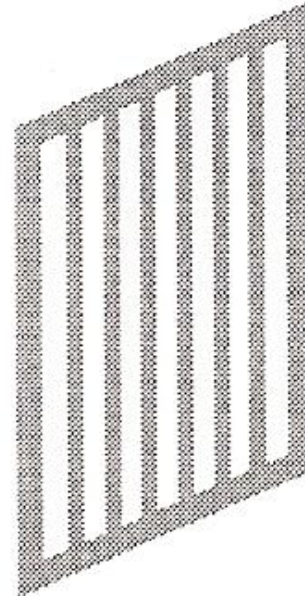
Expérience du coucher de soleil

Bleu du ciel et soleil couchant

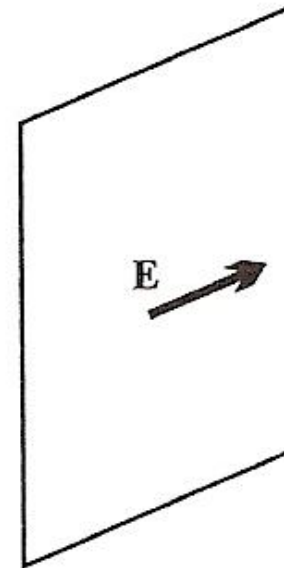
Complément ; grille polarisante : [Vidéo sur la polarisation](#) (*La physique animée*)



polarisation elliptique



grille métallique



polarisation rectiligne

Les polariseurs du laboratoire d'optique sont des « Polaroids », constitués de feuilles de plastique transparent fortement étiré dans une direction et rendu conducteur.