Cinématique du point – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Pour chacun des cas suivants on donne les équations horaires avec $t \geq 0$ d'un point M :

cas A : $\begin{cases} x = t+3 \\ y = \sqrt{3}t+2 \end{cases}$ cas B : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2+2 \end{cases}$ cas C : $\begin{cases} x = 2\cos(t)-2 \\ y = 2\sin(t)+1 \end{cases}$

Dans une base cartésienne locale adaptée que l'on précisera, déterminer :

1. une représentation graphique de la trajectoire
2. les coordonnées cartésiennes, la norme du vecteur position, vitesse et accélération ainsi que l'équation de la trajectoire
3. les coordonnées polaires, la norme du vecteur position, vitesse et accélération
4. la nature du mouvement

Exercice 2 **corrigé disponible**

Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe Oz ; on le repère par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\begin{cases} r = 5 \\ \theta = 10 \cdot t \\ z = 3(1-10 \cdot t) \end{cases}$$

On lâche le mobile à $t=0$ et il effectue 2 tours avant d'atteindre le plan $z=0$

1. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile dans la base $(\vec{e}_r ; \vec{e}_\theta ; \vec{e}_z)$
2. Exprimer la norme v du vecteur vitesse
3. On nomme ds la longeur élémentaire parcourue par le mobile pendant la durée dt . Calculer la distance parcourue par le mobile
4. Exprimer le vecteur accélaration $\vec{a}$ du mobile dans la base $(\vec{e}_r ; \vec{e}_\theta ; \vec{e}_z)$. Conclure

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soient les équations horaires suivantes pour $t \geq 0$ d'un point M :

$$\begin{cases} x = 4\cos(t)+1 \\ y = 3\sin(t)-1 \end{cases}$$

Dans une base cartésienne locale adaptée que l'on précisera, déterminer :

1. une représentation graphique de la trajectoire
2. les coordonnées cartésiennes du vecteur position, vitesse et accélération ainsi que l'équation de la trajectoire
3. les coordonnées polaires du vecteur vitesse

Exercice 4

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point P possède à l'instant t les coordonnées : $x = ct^2$ et $y = bt$, où c et b sont des constantes positives.

1. Former l'équation cartésienne du support de la trajectoire et le représenter.

2. **a)** Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$.

   b) Calculer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$. Que peut-on dire de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$?

   c) Sur la figure de la question **1.**, rajouter les vecteurs $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.

3. **a)** Calculer $\|\vec{v}_{P/\mathcal{R}}\|$. Le mouvement est-il accéléré, retardé ou uniforme ?

   b) Déterminer la composante tangentielle a_t de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.

   c) En déduire la composante normale a_n de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.

4. Calculer $\cos\alpha$, sachant que $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v}_{P/\mathcal{R}})$.

Exercice 5

Un mobile subit un mouvement circulaire de rayon R_0 et d'équation $\boldsymbol{\theta(t) = a\, t^2}$ où $\boldsymbol{a} = \mathrm{C^{te}}$.

Trouver sa vitesse et son accélération.

Exercice 6

Dans le repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un point P se déplace dans le plan (xOy). Ses coordonnées polaires sont ρ et φ, et ses coordonnées cartésiennes x et y à l'instant t, sont telles que : $x(t) = \rho\, cos(\omega t)$ et $y(t) = \rho\, sin(\omega t)$.

1. Exprimer les coordonnées cylindriques ρ et φ en fonction de x et y.
2. Sur un dessin, représenter le repère cartésien, le point P et la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$
3. Calculer $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right]_\mathcal{R}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right]_\mathcal{R}$ en projection dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ liée à $\mathcal{R}$.
4. En déduire les expressions de ces dérivées vectorielles dans la base cylindrique $\mathcal{B}_{cyl}$.
5. φ étant fonction du temps, calculer à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t}\right]_\mathcal{R}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}\right]_\mathcal{R}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.
6. Grâce aux questions précédentes, retrouver les expressions du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ et du vecteur accélération $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$ dans la base polaire en fonction du temps. En déduire la nature du mouvement.
7. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Montrer que celle-ci est un cercle.
8. Déduire de l'expression de $\|\vec{a}_{P/\mathcal{R}}\|$ **en fonction de v et R**
9. Pourquoi $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}} = \vec{0}$?
10. Calculer $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ en projection sur $\mathcal{B}_{cyl}$, puis en projection sur $\mathcal{B}$.

Exercice 7

Une voiture accélère sur une route rectiligne (direction $+\vec{e}_x$) de façon constante à partir du repos jusqu'à la vitesse $v_0 = 30\ \mathrm{ms^{-1}}$ en $t = 10$ s. Elle roule ensuite à vitesse constante dans la même direction. On assimile la voiture à un point matériel M. On observe son mouvement par rapport au référentiel lié à la route.

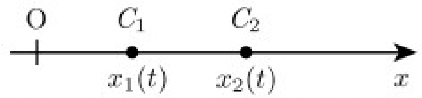
1. On note a_0 l'accélération de la voiture. Déterminer et tracer l'évolution de la vitesse $\vec{v}(t)$. En déduire la valeur de a_0.
2. Calculer $x(t)$ puis déterminer la distance que parcourt la voiture pendant la phase d'accélération. Tracer $x(t)$.
3. Déterminer la distance parcourue pendant que sa vitesse passe de $v = 20\ \mathrm{ms^{-1}}$ à v_0.

Exercice 8

En vue d'un semi-marathon, deux coureurs s'entraînent ensemble. Le coureur 1 est en retard pour l'entrainement et doit rattraper le coureur 2 durant un laps de temps qu'il faut déterminer.

On note C_1 le coureur 1 et C_2 le coureur 2 (voir figure ci-dessous). C_1 voulant rattraper C_2, il court avec une accélération constante $\vec{a}_1 = a_1\vec{e}_x$ telle que a_1= 0,01m.s^{-2}. Le coureur C_2, lui, court à une vitesse constante de 4 m.s^{-1} dans le sens $\vec{e}_x$.

A l'instant initial, le coureur C_1 part de l'origine du repère d'espace avec une vitesse de 5 m.s^{-1}, sachant qu'au même instant le coureur C_2 a déjà parcouru 500 m. On repère la position de C_1 sur la ligne droite par $x_1(t)$ et la position de C_2 par $x_2(t)$.



1. Comment qualifiez-vous le mouvement de C_1 et celui de C_2 ?
2. Déterminer l'abscisse $x_1(t)$ du coureur 1.
3. Déterminer l'abscisse $x_2(t)$ du coureur 2.
4. Déterminer le temps mis par C_1 pour rattraper C_2.
5. En déduire l'abscisse du point de rencontre.

Exercice 9

Un « disque vynile 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

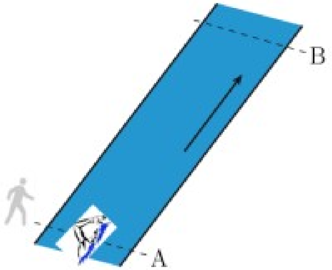
1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;

2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon $R = 15\,cm$).

Exercice 10

On considère un nageur et un marcheur. Les deux sont supposés se déplacer à la même vitesse : le nageur nage à 2 $m.s^{-1}$ par rapport à l'eau et le marcheur se déplace à 2 $m.s^{-1}$ par rapport au sol.

Ces deux personnages font l'aller-retour en ligne droite et sans s'arrêter d'un point A à un point B, puis retour en A. La distance entre A et B est de 6 m. La rivière coule à une vitesse de 1 $m.s^{-1}$ de A vers B.



Quel personnage revient en premier en A ? Justifiez votre réponse par le calcul.