# Révisions d'algèbre linéaire

Feuille d'exercices #01

## Partie A – Calcul matriciel

⋆ **Exercice 1 —** Soit $A=\begin{bmatrix}3&1&-2\\0&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.

On se propose de calculer les puissances de $A$ de plusieurs manières.

1. *Par diagonalisation* – On pose $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$.
   a) Démontrer que $P$ est inversible puis calculer $D=P^{-1}AP$ et enfin $A^n$.
   b) Justifier l'inversibilité de $A$ et en déduire alors $A^{-n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
2. *Au moyen de la formule du binôme de Newton*
   a) Soit $B=A-2I$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $B^n$ en fonction de $B$.
   b) En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$, $A$ et $I$.
3. *Au moyen d'un polynôme annulateur*
   a) Montrer que $A^2-3A+2I=0_3$.
   b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier $n$, $A^n=a_nA+b_nI$.
   Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$ et en déduire l'expression de $A^n$.
   c) Justifier que $A$ est inversible et donner son inverse.

⋆ **Exercice 2 —** Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ et $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j}=\alpha$ si $i\neq j$, $a_{i,j}=\beta$ si $i=j$. Calculer $A^m$ pour $m\in\mathbb{N}$ puis trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha,\beta)$ pour que la matrice $A$ soit inversible ; donner alors son inverse.

⋆ **Exercice 3 —** Soient $\alpha\in\mathbb{C}$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j}=\alpha$ si $j=i$, $a_{i,j}=1$ si $j=i+1$, $a_{i,j}=0$ sinon. Déterminer les puissances successives de $A$.

⋆ **Exercice 4 —** Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB=BA$.

Calculer les puissances de $M=\begin{bmatrix}A&B\\0&A\end{bmatrix}$.

⋆ **Exercice 5 —** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A,B,C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$M=\begin{bmatrix}I_n&A&C\\0&I_n&B\\0&0&I_n\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{3n}(\mathbb{K})$$

Montrer que $M$ est inversible et calculer $M^{-1}$.

⋆⋆ **Exercice 6 —** Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer le rang et, le cas échéant, l'inverse de $M=\begin{bmatrix}A&A\\A&B\end{bmatrix}$.

⋆⋆ **Exercice 7 —** Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M+M^\top=\operatorname{Tr}(M)A$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆⋆ **Exercice 8 —** Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. Trouver les matrices $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AM=MA$.
2. a) On note $E_{i,j}$ les matrices constitutives de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer la matrice $E_{a,b}E_{c,d}$, où $a,b,c,d\in[\![1,n]\!]$.
   b) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\varphi$ l'endomorphisme défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi(M)=MA$. Montrer que $\operatorname{Tr}(\varphi)=n\operatorname{Tr}(A)$.

⋆ **Exercice 9 —** *Matrices de rang* 1
Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $U,V\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M=UV^\top$.
2. Calculer, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $M^p$.
3. Montrer que $I_n+M$ est inversible si, et seulement si, $\operatorname{Tr}(M)\neq-1$ et déterminer alors $(I_n+M)^{-1}$.

⋆⋆ **Exercice 10 —** Soient $A_1,\dots,A_p\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1+\cdots+A_p\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et, pour tous $i\neq j$, $A_i^\top A_j=0$. Montrer que $\operatorname{rg}(A_1)+\cdots+\operatorname{rg}(A_p)=n$.

⋆⋆ **Exercice 11 —** *Matrices stochastiques*
Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique ssi ses coefficients sont positifs et si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}=1$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par multiplication.
2. Trouver les matrices $A\in\mathscr{A}$ inversibles telles que $A^{-1}\in\mathscr{A}$.

⋆⋆ **Exercice 12 —** *Matrices à diagonale strictement dominante*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. En raisonnant sur l'une des coordonnées de plus grand module, montrer par l'absurde que $X = 0$. Qu'en déduire ?
2. *(5/2)* On suppose de plus que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

⋆⋆ **Exercice 13 —** *Matrices semi-magiques*
Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique si les sommes des coefficients de $M$ le long des lignes et des colonnes sont égales ; on note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que $\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $s : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbres. *On pourra calculer $MJ$ et $JM$.*
   b) Montrer que si $M \in \mathscr{M} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M^{-1} \in \mathscr{M}$.
2. Prouver que $\mathscr{M}$ est la somme directe du s.e.v. des matrices magiques symétriques et du s.e.v. des matrices magiques antisymétriques.
3. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Phi_M$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$. Soient enfin :

$$F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,\dots,x) \in \mathbb{K}^n \mid x \in \mathbb{K}\}$$

   a) Montrer que $M \in \mathscr{M}$ si et seulement si $F$ et $G$ sont stables par $\Phi_M$.
   b) En déduire $\dim(\mathscr{M})$.

⋆⋆⋆ **Exercice 14 —** *Espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes*
On note $\mathscr{N}$ le s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

1. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.
2. Montrer que $E_{ij} \in \mathscr{N}$ pour $i \neq j$, où $(E_{ij})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que $E_{ii} - E_{jj} \in \mathscr{N}$.
4. Comparer $\mathscr{N}$ et l'ensemble des matrices de trace nulle.

## Partie B – Espaces vectoriels

⋆ **Exercice 15 —** Montrer que $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

⋆⋆ **Exercice 16 —** Soit $n$ un entier naturel non nul. À l'aide d'une représentation matricielle, montrer que $((X+k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Généraliser à $(P(X+k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = n$.

⋆ **Exercice 17 —** Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ :

$$\mathscr{F} = (x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}} \ ; \quad \mathscr{G} = \left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \quad \mathscr{H} = \left(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_n x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

où les $\alpha_n$ sont des nombres complexes deux à deux distincts.

⋆⋆ **Exercice 18 —** Montrer que $(t \mapsto |t-a|)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

⋆⋆ **Exercice 19 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\quad fg - gf = \mathrm{id} \quad (*)$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $fP(g) - P(g)f = P'(g)$.
2. Montrer que $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
3. Donner un exemple pour $E = \mathbb{R}[X]$ de couple $(f,g)$ vérifiant la relation $(*)$.

⋆ **Exercice 20 —** *Somme directe dans $\mathscr{L}(E)$*
Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un e.v. $E$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.
Soit $\mathscr{F}_i = \left\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset F_i\right\}$. Montrer que $\mathscr{L}(E) = \mathscr{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{F}_n$.

⋆ **Exercice 21 —** Soit $E = \mathscr{C}([-2,2],\mathbb{R})$ et $F = \left\{f \in E \mid \forall k \in [\![-2,2]\!], f(k) = 0\right\}$.

1. Montrer que $F$ est un espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[-2,2]$ de degré au plus 4 est un supplémentaire de $F$ dans $E$.

⋆⋆⋆ **Exercice 22 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $F_1$ et $F_2$ deux s.e.v. de $E$.

1. On suppose que $F_1$ et $F_2$ admettent un supplémentaire commun.
   Montrer qu'ils sont isomorphes.
2. Étudier la réciproque. On distinguera les cas où $\dim(E) < \infty$ et $\dim(E) = \infty$.

⋆ **Exercice 23 —** Soit $\mathscr{H} = \left\{ y \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{y(0)+y(1)}{2} \right\}$.

Montrer que $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner un supplémentaire.

⋆ **Exercice 24 —** On note $E = \mathscr{C}^\infty([-1,1],\mathbb{R})$, $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n$ l'application définie sur $E$ par $\psi_n(f) = f^{(n)}(0)$.
Montrer que $\left(\psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $E^*$.

⋆ **Exercice 25 —** *Formule de quadrature*
Soient $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ distincts et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_k : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(x_k)$

1. Montrer que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
2. En déduire qu'il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$$

⋆⋆⋆ **Exercice 26 —** Soit $E$ un e.v. de dimension $n$ sur un corps de cardinal $q$. Combien $E$ possède-t-il de bases ? Quel est le cardinal de $\mathrm{GL}(E)$ ? Combien $E$ possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension $k$ ?

## Partie C – Applications linéaires, représentation matricielle

⋆ **Exercice 27 —** Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (4x+y-z, 2x+3y-z, 2x+y+z)$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ puis construire sa matrice représentative dans la base canonique.
2. Trouver deux réels distincts $\lambda$ et $\mu$ tels que $f - \lambda\mathrm{id}_E$ et $f - \mu\mathrm{id}_E$ ne soient pas des automorphismes.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{id}_E)$.
4. Donner la matrice représentative de $f$ dans une base adaptée.

⋆ **Exercice 28 —** *Formule d'inversion de Pascal*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$. On note $A$ la matrice représentative de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On se donne une famille $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels et on pose $v_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u_i$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Exprimer le vecteur $V = (v_0,\dots,v_n)^\top$ en fonction de $A$ et $U = (u_0,\dots,u_n)^\top$.
2. En déduire l'égalité $u_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k}\binom{k}{i} v_i$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

⋆ **Exercice 29 —** Prouver, de trois manières distinctes, la bijectivité de l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $f(P) = P - P'$.

⋆⋆ **Exercice 30 —** *Matrice de Vandermonde*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}^n$ distincts. On considère la matrice :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Montrer que la matrice $V$ est inversible :

1. en s'intéressant au nombre de racines d'un certain polynôme lors de la résolution de l'équation $VX = 0$ ;
2. en construisant la matrice de passage de la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique.

⋆ **Exercice 31 —** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On note $\phi$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $\phi(P) = P(X+a)$. On note $T$ la matrice de coefficients $t_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

Écrire la matrice de $\phi$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ ; en déduire l'inverse de $T$.

⋆ **Exercice 32 —** Soient $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées et l'application $\phi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathscr{B}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que $\phi$ est un endomorphisme de $\mathscr{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $\phi$.

⋆ **Exercice 33 —** Donner le noyau et l'image de $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM$, où $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

⋆ **Exercice 34 —** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^\top M + MA$.
Montrer que $f_A$ est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa trace ?

⋆⋆ **Exercice 35 —** Soient $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et l'application $u$ définie sur $E$ par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(u(f)\big)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ et déterminer son noyau ainsi que son image.

⋆ **Exercice 36 —** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, u(x))$ est libre.
2. Aboutir à une contradiction. La conclusion tient-elle si $E$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ?

⋆ **Exercice 37 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
2. Interpréter en termes de noyau et d'image l'égalité $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.
4. On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par $g$.

⋆ **Exercice 38 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \iff \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = E$

⋆⋆ **Exercice 39 —** *Inégalité de Sylvester*
Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

1. $\mathrm{rg}(f \circ g) + \dim(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(g)$.
2. $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.
3. $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

⋆ **Exercice 40 —** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Quel est le rang de $f$ ?
2. Montrer qu'il existe $(\varphi, u) \in E^* \times E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x) \cdot u$.

⋆ **Exercice 41 —** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$ de dimension finie.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
2. Donner des contre-exemples en dimension infinie.

⋆⋆ **Exercice 42 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose $\mathrm{Ker}(f)$ de dimension finie.

1. Montrer que si un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est de dimension finie, alors $f^{-1}(F)$ est de dimension finie.
2. Prouver que $\mathrm{Ker}(f^n)$ est de dimension finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆⋆ **Exercice 43 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(g) = 1$. Montrer que $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\mathrm{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

⋆⋆ **Exercice 44 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $F$ un sous-espace de dimension $p$. Calculer la dimension de $\big\{u \in \mathscr{L}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(u)\big\}$.

⋆⋆ **Exercice 45 —** Soient $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Donner la dimension de $F = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$.

⋆⋆ **Exercice 46 —** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

Montrer que $A$ est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(A)$.

⋆⋆⋆ **Exercice 47 —** Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ tel que $f^2 + af + b\mathrm{id}_E = 0$ avec $a^2 - 4b < 0$.

1. Montrer que, pour tout vecteur $x$ non nul, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est un plan.
2. Montrer que $f$ se représente par blocs par $\mathrm{diag}(A, \ldots, A)$, où $A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

⋆⋆ **Exercice 48 —** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-e.v. de dim. $3n$, $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$.

1. Déterminer le rang de $u^2$. *On pourra considérer la restriction de $u$ à* $\mathrm{Im}(u)$.
2. Prouver l'existence d'une base de $E$ dans laquelle $\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$.

⋆ **Exercice 49 —** On note $\mathscr{F}$ l'ensemble de endom. $\varphi$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M^\top) = \varphi(M)^\top$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

⋆ **Exercice 50 —** *Endomorphismes nilpotents*
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n$. On suppose que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotente, d'ordre de nilpotence $p$, c'est-à-dire que : $f^p = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ obtenue en complétant la famille $\mathscr{F}$. Quelle est la forme de la matrice de $f$ dans cette base?
3. Que peut-on dire de la suite $(\mathrm{rg}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ ?
4. On suppose que $p = n$ et soit $g \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{n-1}\right)$.

⋆ **Exercice 51 —** *Racine carrée d'un bloc de Jordan*
Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose $u$ nilpotent. Prouver que $u^n = 0$.
2. On suppose que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer que la matrice représentative de $u$ dans une certaine base est $A = (\delta_{i,j+1})$. Résoudre l'équation $X^2 = A$.

⋆ **Exercice 52 —** Soient $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $G = \{P(N), P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } P(0) = 1\}$. Montrer que $G$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

⋆⋆ **Exercice 53 —** *Composition d'endomorphismes nilpotents*
Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de $E$ qui commutent.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $u_{k+1} \circ \dots \circ u_n \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   a) Montrer que $F_k = \mathrm{Im}(u_{k+1} \circ \dots \circ u_n)$ est stable par $u_k$.
   b) On note $\tilde{u}_k$ l'endomorphisme induit par $u_k$ sur $F_k$. Prouver que $\mathrm{Ker}(\tilde{u}_k) \neq \{0_E\}$ puis que $\mathrm{rg}(u_{k+1} \circ \dots \circ u_n) \geqslant \mathrm{rg}(u_k \circ \dots \circ u_n) + 1$.
3. En déduire l'égalité $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

⋆⋆ **Exercice 54 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $u$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p$. Soit $\phi$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\phi(v) = u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathscr{L}(E)$, $\phi^n(v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u^{n-k} v u^k$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathscr{L}(E)$, il existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.
3. Montrer que $\phi$ est nilpotent et préciser son indice de nilpotence.

⋆⋆ **Exercice 55 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie et $G \subset \mathscr{L}(E)$ telle que $(G, \circ)$ soit un groupe. Montrer que tous les éléments de $G$ ont même rang et qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de tout élément de $G$ est de la forme $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

⋆⋆⋆ **Exercice 56 —** *Matrices de trace nulle*
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $u$ stabilise toutes les droites de $E$, c'est une homothétie.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est à diagonale nulle.
3. Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M$ est de trace nulle si et seulement s'il existe $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

⋆⋆ **Exercice 57 —** *Noyaux itérés d'un endomorphisme*
Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n > 0$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(u^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier $r$ tel que $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$ puis que pour tout $p \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^r) \oplus \mathrm{Ker}(u^r)$.
4. a) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(u^r)$ et $\mathrm{Ker}(u^r)$ sont stables par $u$.
   b) En déduire l'existence d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est de la forme $\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ où $G$ est inversible et $N$ nilpotente.
5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_p$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^p)$ dans $\mathrm{Ker}(u^{p+1})$.
   a) On note $v$ la restriction de $u$ à $F_p$. Montrer que $v$ est injective.
   b) Prouver que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u^p)$ puis que $\mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Ker}(u^{p-1}) \subset \mathrm{Ker}(u^p)$.
   c) En déduire que $\left[\dim(\mathrm{Ker}(u^{p+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(u^p))\right]_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

⋆⋆ **Exercice 58 —** *Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

1. a) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$ pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A = B$.
   b) En déduire que pour tout $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

⋆⋆ **Exercice 59 —** *Application transposée*
Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On note respectivement $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ des bases de $E$ et $F$, et $\mathscr{B}_1^*$ et $\mathscr{B}_2^*$ leurs bases duales respectives. On pose enfin $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u)$.

1. Prouver que l'application $v : f \in F^* \mapsto f \circ u \in E^*$ est linéaire et exprimer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2^*,\mathscr{B}_1^*}(v)$ en fonction de $A$.
2. Déterminer le noyau de $v$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

⋆⋆ **Exercice 60 —** *Endomorphisme cyclique*

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\left(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)\right)$ soit libre.

1. Prouver que $f$ est bijectif puis que la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$. Donner la forme de la matrice de $f$ dans cette base.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$ et $g \circ f(x_0) = 0$. Prouver que $g$ est nul.
3. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
   Prouver qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^k$.

⋆⋆⋆ **Exercice 61 —** *Factorisation*
Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. On considère deux applications $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,G)$. Montrer que :
$$\exists h \in \mathscr{L}(F,G) \text{ tel que } g = h \circ f \text{ si, et seulement si, } \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$$
2. On considère $n+1$ formes linéaires $\phi_1, \dots, \phi_n$ et $\varphi$ sur $E$. Montrer que :
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\phi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$$

## Partie D – Projections et symétries vectorielles

⋆ **Exercice 62 —** Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associés aux matrices :
$$M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
Montrer que $f$ est une projection vectorielle et $g$ une symétrie vectorielle ; déterminer leurs caractéristiques géométriques.

⋆ **Exercice 63 —** Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = x - y$ parallèlement à la droite $\mathscr{D}$ définie par $x = -y = z$. En déduire la matrice dans cette même base de la symétrie vectorielle par rapport à $\mathscr{P}$ et parallèlement à $\mathscr{D}$.

⋆ **Exercice 64 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $p, q$ deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, p \circ q = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p \circ q = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.

⋆⋆ **Exercice 65 —** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-e.v. , $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$.
On suppose que $f = f \circ g \circ f$ et $g = g \circ f \circ g$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

⋆ **Exercice 66 —** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Que peut-on en déduire concernant $g \circ f$ ?
3. Montrer que $f$ et $g$ sont des projecteurs.

⋆⋆ **Exercice 67 —** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère $r$ projecteurs $p_1, \dots, p_r$ tels que $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer, à l'aide de la trace, que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_r))$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_r)$.
3. Montrer que pour tout $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

⋆⋆ **Exercice 68 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $v \circ u$ soit un projecteur.

⋆⋆ **Exercice 69 —** Soient $E$ un espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer qu'il existe un projecteur $p$ vérifiant $u = p \circ u - u \circ p$ ssi $u^2 = 0$.

⋆⋆ **Exercice 70 —** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^p = I_n$ et $A = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} M^k$.

1. Montrer que $A$ est la matrice d'un projecteur.
2. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_n)) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Tr}(M^k)$.

⋆⋆ **Exercice 71 —** Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{id}_E$, $V$ un sous-espace vectoriel stable par $u$ et $p$ un projecteur sur $V$. On pose $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $q \circ u = u \circ q$, $p \circ q = q$ et que $q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un supplémentaire de $V$ dans $E$, stable par $u$.

⋆⋆ **Exercice 72 —** *Une formule de Burnside*
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $G$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal $n$.
Montrer que $p = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g \in G} g$ est un projecteur puis que $\mathrm{Tr}(p) = \dim\left(\displaystyle\bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\left(g - \mathrm{id}_E\right)\right)$.

⋆⋆⋆ **Exercice 73 —** *Idéaux à gauche de $\mathscr{L}(E)$*
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. Montrer que les seuls idéaux bilatères de $\mathscr{L}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathscr{L}(E)$.
2. a) Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que :
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{Ker}(u_i) \subset \mathrm{Ker}(v)$$
Montrer qu'il existe $f_1, \dots, f_p \in \mathscr{L}(E)$ tels que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i \circ u_i$.
   b) Montrer que les idéaux à gauche de $\mathscr{L}(E)$ sont les parties de la forme $\{u \in \mathscr{L}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(u)\}$ où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
   c) En déduire que les idéaux à gauche de $\mathscr{L}(E)$ sont exactement les parties $\mathscr{L}(E)p$ où $p$ est un projecteur.