

M7 : Mouvement d'un solide

Table des matières

1	Mouvement d'un solide dans deux cas particuliers	2
1.1	Définition d'un solide	2
1.2	Mouvement de translation d'un solide	2
1.3	Mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide	3
2	Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points	4
2.1	Cas d'un point matériel : notion de moment d'inertie	4
2.2	Cas d'un système déformable	5
2.2.1	Moment cinétique par rapport à un axe orienté	5
2.2.2	Cas des coordonnées cylindriques	5
2.3	Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe	5
2.3.1	Moment d'inertie d'un solide	5
2.3.2	Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté (Oz)	6
2.3.3	Moments d'inertie de quelques solides homogènes	6
2.3.4	Évolution du moment d'inertie en fonction de la répartition des masses	6
3	Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation	7
3.1	Rappel sur le moment d'une force	7
3.2	Théorème scalaire du moment cinétique pour un solide	7
3.3	Cas de conservation du moment cinétique	8
4	Actions mécaniques s'exerçant sur un solide en rotation	8
4.1	Couples	8
4.1.1	Couple de deux forces	8
4.1.2	Généralisation	9
4.1.3	Couple de torsion	10
4.1.4	Couple moteur et couple de freinage	10
4.2	Liaison pivot d'axe (Oz)	11
4.2.1	Définition	11
4.3	Centre de gravité et résultante des actions de pesanteur	12
5	Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	13
5.1	Énergie cinétique d'un solide en rotation	13
5.2	Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation	13
5.3	Théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable	14
5.4	Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable	15
5.4.1	Observation préliminaire : le tabouret d'inertie	15
5.4.2	Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable	16

1 Mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

1.1 Définition d'un solide

Définition d'un solide

Un solide est système matériel dont les points restent à distance constante les uns par rapport aux autres au cours du temps.

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres au cours du temps. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.

Par exemple, un ressort peut être étiré ou comprimé et constitue donc un système déformable, alors qu'un palet de hockey sur glace est un solide (indéformable).

1.2 Mouvement de translation d'un solide

Définition d'un solide en translation

Un solide est en **translation** dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ quand les **axes du repère lié au solide gardent une direction fixe** au cours du temps par rapport à $\mathcal{R}$. Cette propriété implique la suivante qui est en conséquence souvent citée comme étant la définition de la translation d'un solide :

Un solide est en translation si, **à chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse** (qui peut varier dans le temps mais de manière identique pour tous les points).

La translation est **rectiligne** si la trajectoire de n'importe quel point du solide est une droite, **circulaire** si c'est un cercle, **curviligne** si c'est une courbe quelconque.

Exemples dans le référentiel Terrestre : Le mouvement d'une cage d'ascenseur est une translation rectiligne, celui d'une nacelle de grande roue est une translation circulaire, et enfin le mouvement du marteau figure 1 peut être qualifié de translation curviligne (représenter le repère lié au marteau).

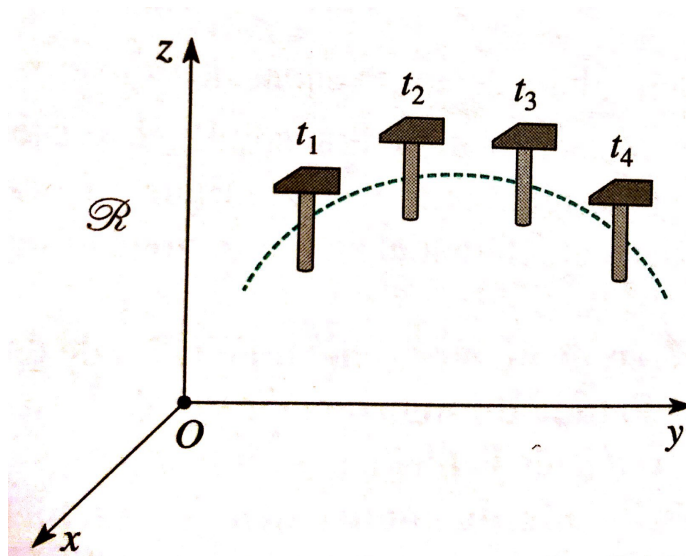


Figure 1 – Translation curviligne d'un marteau

1.3 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide

Définition d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en **rotation autour d'un axe fixe** Δ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ s'il existe une **unique droite Δ immobile à la fois par rapport au solide et au référentiel $\mathcal{R}$** . Cette propriété implique la suivante qui est en conséquence souvent citée comme étant la définition de la rotation autour d'un axe fixe d'un solide :

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si **à chaque instant, tous les points du solide décrivent un cercle autour de l'axe Δ** (le rayon de ce cercle n'étant pas nécessairement le même pour chaque point du solide).

Par commodité, on confond l'axe Δ avec l'axe (Oz) . On note $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le repère lié au référentiel Terrestre et $(O, \vec{u}_{x\mathcal{S}}, \vec{u}_{y\mathcal{S}}, \vec{u}_{z\mathcal{S}})$ le repère lié au solide $\mathcal{S}$.

Tout point M du solide peut alors être repéré par ses coordonnées cylindriques $M \begin{pmatrix} r \\ \theta + \theta_M \\ z \end{pmatrix}$,

où $\theta_M = (\vec{u}_{x\mathcal{S}}, \overrightarrow{OH})$ avec H projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy) . On remarquera que cet angle θ_M est constant dans le temps, tout comme r et z car M est lié au solide, par contre l'angle θ varie dans le temps à cause du mouvement du solide (figure 2).

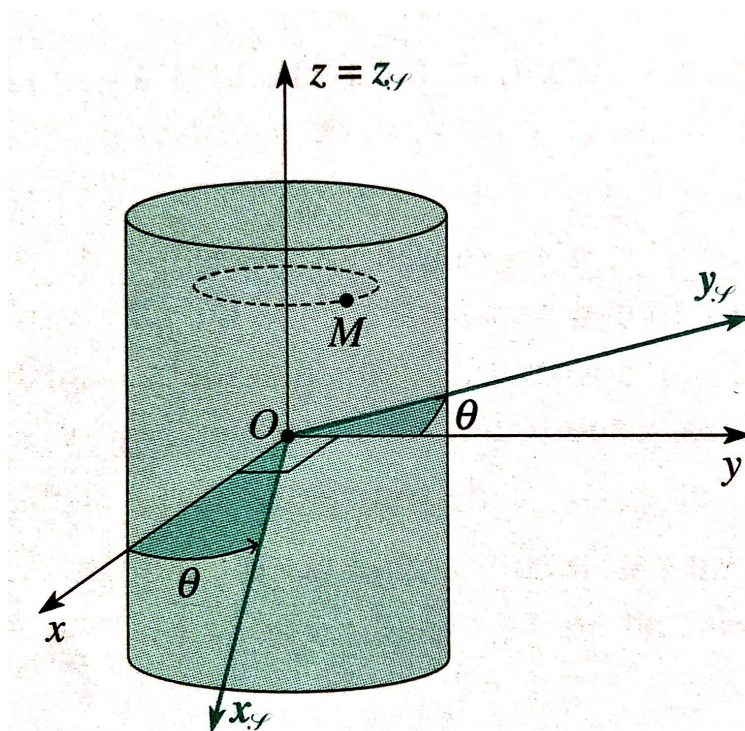


Figure 2 – Solide en rotation autour de l'axe (Oz)

La vitesse d'un point M du solide par rapport à $\mathcal{R}$ s'écrit donc dans la base cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \underbrace{\dot{r}}_0 \vec{u}_r + r \left(\dot{\theta} + \underbrace{\dot{\theta}_M}_0 \right) \vec{u}_\theta + \underbrace{\dot{z}}_0 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On voit donc que la vitesse du point M dépend de sa distance r à l'axe Δ et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de rotation du solide $\mathcal{S}$.

Propriété d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Le mouvement d'un point M lié à un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est un mouvement circulaire situé dans le plan perpendiculaire à Δ contenant M . La trajectoire est caractérisée par :

- son centre I projeté orthogonal M sur l'axe de rotation Δ
- son rayon r distance de M à l'axe de rotation Δ
- sa vitesse angulaire égale à la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ du solide autour de Δ

Dans le système de coordonnées cylindriques d'origine O et d'axe (Oz) , la vitesse instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

2 Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

2.1 Cas d'un point matériel : notion de moment d'inertie

Soit un point M en mouvement dans un référentiel galiléen et un axe Δ orienté fixe. On fait coïncider l'axe (Oz) avec Δ et on repère M à l'aide de ses coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

On peut alors calculer le moment cinétique de M par rapport à O :

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) = m\left(r^2\dot{\theta}\vec{u}_z + (\dot{r}z - r\dot{z})\vec{u}_\theta - zr\dot{\theta}\vec{u}_r\right)$$

puis par rapport à (Oz) :

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = mr^2\dot{\theta}$$

Moment d'inertie d'un point matériel par rapport à un axe

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) , on définit le **moment d'inertie** par rapport à l'axe (Oz) d'un point M de coordonnées (r, θ, z) :

$$J_{(Oz)}(M) = mr^2$$

Le moment cinétique de M par rapport à (Oz) est alors égal au produit du moment d'inertie $J_{(Oz)}(M)$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta} \quad (1)$$

2.2 Cas d'un système déformable

2.2.1 Moment cinétique par rapport à un axe orienté

On considère un système constitué de plusieurs points matériels M_i de masses m_i de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_\Delta(M_i)$. Le moment cinétique du système de points par rapport à Δ est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points :

$$L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i)$$

2.2.2 Cas des coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe Δ est fixe, on utilise généralement les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec Δ . Le moment cinétique de chaque point M_i est donné par la relation (1) :

$$L_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}_i \quad \text{où} \quad J_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2$$

On obtient alors pour le système constitué de l'ensemble des points M_i :

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}_i \quad (2)$$

2.3 Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe

On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe orienté fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$. On choisit l'axe (Oz) pour qu'il coïncide avec cet axe de rotation. On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$.

2.3.1 Moment d'inertie d'un solide

Chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe possède la même vitesse angulaire. Dans ce cas, le mouvement du solide est un cas particulier du mouvement d'un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. On peut donc factoriser l'expression (2) par la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$:

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \left(\sum_i J_{(Oz)}(M_i) \right) \dot{\theta} = J_{(Oz)} \dot{\theta}$$

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Le **moment d'inertie** $J_{(Oz)}$ du solide par rapport à l'axe (Oz) est défini par la somme des moments d'inertie par rapport à (Oz) de chacun des points le constituant :

$$J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2$$

Remarque

On peut également modéliser le solide par une répartition continue de masse. La somme discrète précédente devient alors une intégrale triple sur le volume du solide.

2.3.2 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté (Oz)**Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**

Le moment cinétique par rapport à un axe (Oz) d'un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est égal au produit du moment d'inertie $J_{(Oz)}$ du solide par sa vitesse angulaire :

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta}$$

pics

2.3.3 Moments d'inertie de quelques solides homogènes

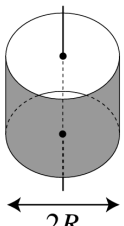
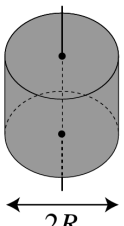
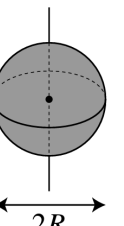
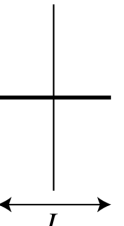
cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
(Oz) 	(Oz) 	(Oz) 	(Oz) 

Figure 3 – Moment d'inertie de quelques solides.

Exemple

On peut modéliser la jante d'une roue de voiture par un cylindre creux de masse m et de rayon R . Son moment d'inertie par rapport au moyeu est environ égal à mR^2 .

2.3.4 Évolution du moment d'inertie en fonction de la répartition des masses

La contribution d'une masse m au moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Oz) est égale à mr^2 où r est sa distance à l'axe (Oz).

Plus une masse m est éloignée de l'axe de rotation (Oz), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à (Oz) est importante.

Ceci explique pourquoi le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même masse : dans le cas du cylindre plein, une partie importante de sa masse est située à faible distance de l'axe et contribue peu à son moment d'inertie. On peut exploiter cette propriété pour obtenir des informations sur la répartition interne des masses d'un solide.

3 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation

On s'intéresse au mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe orienté (Oz) fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Son moment d'inertie par rapport à (Oz) est noté $J_{(Oz)}$. Son mouvement est caractérisé par sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Son moment cinétique par rapport à (Oz) vaut $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$. Il est soumis aux forces extérieures $\vec{f}_i$ de moments $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$.

3.1 Rappel sur le moment d'une force

Le moment d'une force qui s'applique sur un point matériel M s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{MO}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Quand on s'intéresse à un système de points ou un solide, il faut bien tenir compte du point d'application de la force. Si la force s'applique en un point A du solide, son moment s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{AO}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

On pourra aussi déterminer ce moment à l'aide du produit « force $\times$ bras de levier ».

3.2 Théorème scalaire du moment cinétique pour un solide

Théorème scalaire du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \quad (3)$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) , le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ est constant donc :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d}{dt}(J_{(Oz)}\dot{\theta}) = J_{(Oz)}\ddot{\theta} \implies J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

On peut noter la similitude formelle de cette équation, que l'on peut écrire :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \sum_i \overrightarrow{MO}(\vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z$$

avec le principe fondamental de la dynamique écrit pour un solide de masse m en translation rectiligne sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{u}_x$$

L'accélération linéaire $\ddot{x}$ est remplacée par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$, les forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetés sur l'axe de rotation et la masse m par le moment d'inertie $J_{(Oz)}$.

Plus le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe (Oz) est grand, plus sa mise en rotation est difficile car elle demande un moment des forces par rapport à l'axe important.

3.3 Cas de conservation du moment cinétique

Cas de la conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

En effet, le théorème du moment cinétique appliqué au solide s'écrit dans ce cas :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta} = \text{constante}$$

Le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ étant une constante, la vitesse de rotation du solide l'est également.

4 Actions mécaniques s'exerçant sur un solide en rotation

De nombreux solides en rotation font partie de systèmes mécaniques appelés **dispositifs rotatifs** dans lesquels un solide indéformable appelé **rotor** est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé **stator**. Le stator doit imposer des actions mécaniques au rotor pour permettre une rotation d'axe fixe et pour entraîner ou freiner le rotor. Dans cette partie, on définit deux actions mécaniques essentielles à ce type de dispositifs :

- l'action de type couple qu'exerce le stator sur le rotor pour entraîner ou freiner le rotor
- l'action de type liaison pivot qui permet de restreindre le mouvement relatif entre ces deux solides à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

4.1 Couples

4.1.1 Couple de deux forces

Définition d'un couple de forces

Deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ opposées s'appliquant respectivement en A_1 et A_2 forment un couple de forces (figure 4). Leur résultante est nulle : $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$.

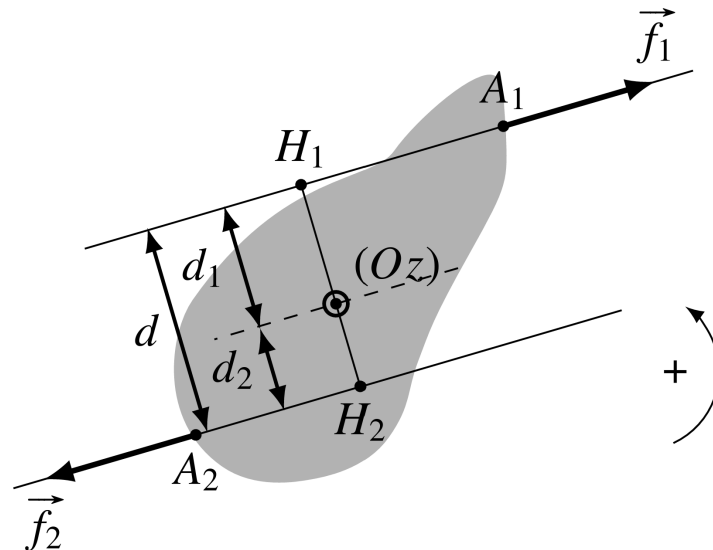


Figure 4 – Moment d'un couple de forces par rapport à (Oz) , ici $\Gamma = -fd$

Ces forces ont une norme identique f et s'appliquent sur des droites d'action parallèles entre elles. La distance d entre ces droites s'appelle le bras de levier du couple et le moment du couple de force par rapport à l'axe orienté (Oz) est égal au produit de la force par le bras de levier :

$$|\mathcal{M}_{(Oz)}| = fd_1 + fd_2 = fd$$

Par abus de langage, étant donné que la somme des deux forces est nulle et que seul le moment de ces forces est non nul, on désigne souvent par couple, le moment du couple par rapport à (Oz) et on le note Γ .

Le moment du couple Γ ne dépend pas de la position de l'axe de rotation. Par ailleurs, il est algébrique et on peut trouver son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner M autour de l'axe orienté (Oz) :

- si ce sens est direct, $\Gamma > 0$
- si ce sens est indirect, $\Gamma < 0$

4.1.2 Généralisation

On peut généraliser la notion de couple à tous les cas où la somme des forces est nulle et le moment des forces par rapport à un axe (Oz) ne l'est pas, sans se préoccuper de savoir s'il a fallu deux forces ou plus pour réaliser cette situation.

4.1.3 Couple de torsion

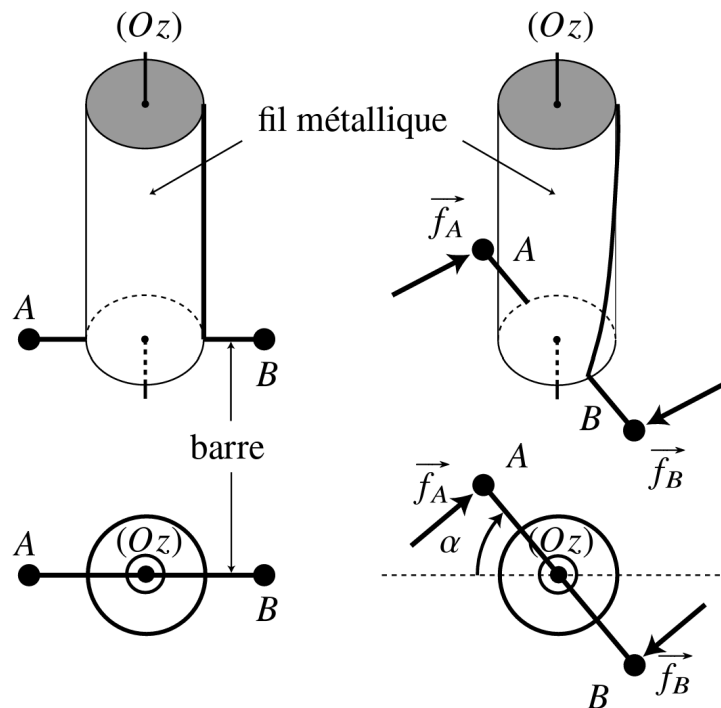


Figure 5 – Couple de torsion d'un fil en perspective ou en vue de dessus. À gauche, le fil de torsion est au repos. À droite, il subit une torsion sous l'action d'un couple. La section supérieure du fil est fixe.

On considère un fil cylindrique d'axe (Oz) dont la section supérieure est fixe et auquel on attache une barre AB . On applique un couple de forces $(\vec{f}_A, \vec{f}_B)$ de norme f aux extrémités A et B de la barre. Le moment par rapport à (Oz) de ce couple vaut $\Gamma_1 = f \times AB$ et conduit le fil à se tordre d'un angle α appelé **angle de torsion**. D'après le théorème scalaire du moment cinétique appliqué à la barre à l'équilibre, le fil exerce sur la barre un **couple de torsion** de moment Γ tel que :

$$\Gamma + \Gamma_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -\Gamma_1$$

Loi de torsion dans le domaine d'élasticité

Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment Γ du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion α :

$$\Gamma = -C\alpha$$

où C est la **constante de torsion** du fil.

La constante de torsion C s'exprime en N.m.rad^{-1} . Elle dépend du diamètre et de la longueur du fil, ainsi que de l'élasticité en torsion du matériau qui le constitue. Le couple de torsion tend à ramener le fil vers la position de torsion nulle. On parle de couple de rappel.

4.1.4 Couple moteur et couple de freinage

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe (Oz) auquel on applique un couple de **moment algébrique** par rapport à (Oz) égal à Γ . Le théorème scalaire du moment

cinétique par rapport à l'axe (Oz) appliqué au solide implique que :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \Gamma$$

On suppose que le solide tourne dans le sens direct autour de (Oz) ce qui implique que $\dot{\theta} > 0$ et on distingue deux cas selon le signe de Γ :

- si $\Gamma > 0$, $\ddot{\theta} > 0$ et la vitesse de rotation du solide augmente. La rotation est accélérée
- si $\Gamma < 0$, $\ddot{\theta} < 0$ et la vitesse de rotation du solide diminue. La rotation est freinée

On peut tenir le même raisonnement dans le cas où $\dot{\theta} < 0$, et finalement :

- lorsque Γ est du même signe que $\dot{\theta}$, la valeur absolue de la vitesse de rotation augmente. Le couple est un **couple moteur**
- lorsque Γ est du signe opposé à $\dot{\theta}$, la valeur absolue de la vitesse de rotation diminue. Le couple est un **couple de freinage**

4.2 Liaison pivot d'axe (Oz)

4.2.1 Définition

Définition d'une liaison pivot d'axe (Oz)

Une **liaison pivot** d'axe (Oz) (figure 6) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

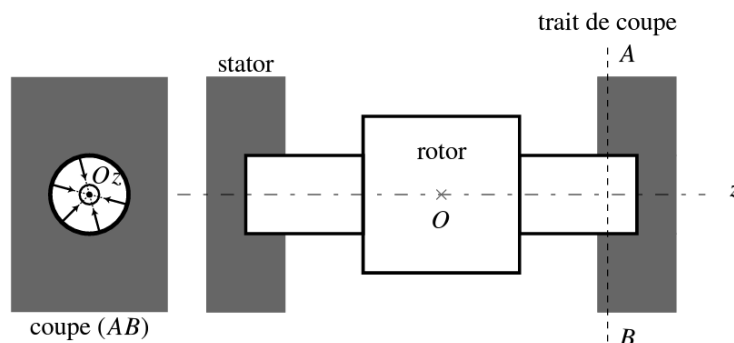


Figure 6 – Schéma de principe d'une liaison pivot

On suppose que la liaison pivot est géométriquement idéale. Aussi assure-t-elle un guidage parfait de la rotation autour de l'axe de liaison (Oz) et bloque toute translation le long de (Oz) . La liaison pivot est alors entièrement définie par la direction et la position de l'axe (Oz) que l'on précise systématiquement.

Liaison pivot idéale : le moment par rapport à l'axe de rotation est nul

L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) présente un moment nul par rapport à l'axe (Oz) :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0$$

Remarque

En pratique, malgré l'utilisation de roulements à billes ou à aiguilles, il reste des forces de frottement qui produisent un couple résistant d'axe (Oz).

4.3 Centre de gravité et résultante des actions de pesanteur

On considère un système de points matériels (M_i, m_i) plongé dans un **champ de pesanteur uniforme** $\vec{g}$ et on note $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ la masse totale de ce système de points.

Définition du centre de gravité

Le **centre de gravité** G , barycentre des points M_i affectés des masses m_i , est défini par, pour tout point origine M_0 :

$$\overrightarrow{M_0 G} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_i m_i \overrightarrow{M_0 M_i}$$

On choisit usuellement $M_0 = O$, l'origine du repère, ainsi :

$$m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

Chaque point M_i subit la force de pesanteur $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$. La résultante $\vec{R}$ des actions de pesanteur sur le solide vaut alors

$$\vec{R} = \sum_i \vec{P}_i = \left(\sum_i m_i \right) \vec{g} = m_{\text{tot}} \vec{g} = \vec{P}_{\text{tot}}$$

comme $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ est la masse totale, on retrouve le poids total $\vec{P}_{\text{tot}}$.

Pour montrer que l'ensemble des forces de pesanteur est équivalent au poids total appliqué en G , on calcule le moment des forces de pesanteur en un point M_0 :

$$\vec{\mathcal{M}}_{M_0} = \sum_i \overrightarrow{M_0 M_i} \wedge \vec{P}_i = \sum_i \overrightarrow{M_0 M_i} \wedge (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \overrightarrow{M_0 M_i} \right) \wedge \vec{g}$$

Or, par la définition de G , on a $\sum_i m_i \overrightarrow{M_0 M_i} = m_{\text{tot}} \overrightarrow{M_0 G}$, d'où :

$$\vec{\mathcal{M}}_{M_0} = m_{\text{tot}} \overrightarrow{M_0 G} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{M_0 G} \wedge (m_{\text{tot}} \vec{g}) = \overrightarrow{M_0 G} \wedge \vec{P}_{\text{tot}}$$

Action des forces de pesanteur

Dans un champ de pesanteur uniforme, les actions de pesanteur sur un solide, ou un système de points matériels, sont équivalentes à une force unique égale au poids total du solide et s'appliquant en G , le centre de gravité.

5 Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe noté (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. On va développer l'expression de l'énergie cinétique et le théorème scalaire de l'énergie cinétique pour un solide en rotation.

5.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$. Le moment d'inertie du solide par rapport à (Oz) vaut alors $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$.

De plus, un point M_i quelconque du solide est en mouvement circulaire de rayon r_i à la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$. Sa vitesse est donc $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et son énergie cinétique :

$$E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{\theta}^2$$

où l'on reconnaît l'expression du moment d'inertie du solide : $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$.

Énergie cinétique de rotation

Un solide de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$$

Astuce

On peut mémoriser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) : $E_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$ à partir de celle d'un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Il suffit de remplacer la masse m par le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ et la vitesse linéaire $\dot{x}$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

5.2 Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

On considère une force $\vec{f}_i$ qui s'applique au point M_i d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. La puissance de la force $\vec{f}_i$ est égale au produit scalaire de la force $\vec{f}_i$ par la vitesse $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ du point M_i sur lequel elle s'applique d'où :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{M_i} = \vec{f}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = f_{i\theta} r_i \dot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

car $r_i f_{i\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}$.

Puissance d'une force sur un solide en rotation autour d'un axe fixe

La puissance de la force $\vec{f}_i$ appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) est égale au produit du moment de cette force par rapport à (Oz) par la vitesse angulaire de rotation du solide autour de cet axe :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

5.3 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f}_i$ qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$

Pour établir ce théorème, on dérive l'expression de l'énergie cinétique et on trouve :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 \right) = J_{(Oz)} \ddot{\theta} \dot{\theta}$$

Or, le théorème scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) fixe implique :

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

En insérant cette relation dans l'équation précédente :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$

où $\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}$ est la puissance de la force $\vec{f}_i$.

Pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les théorèmes de l'énergie cinétique ou du moment cinétique sont équivalents et donnent des équations identiques.

Par ailleurs, la définition de la puissance confirme la cohérence des notions de couple moteur et de couple de freinage, on retrouve que :

- la puissance de la force est positive lorsque $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est du même signe que $\dot{\theta}$. Le couple est alors moteur.

- la puissance de la force est négative lorsque $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est du signe opposé à $\dot{\theta}$. Le couple est alors résistant.

Astuce

On peut mémoriser l'expression de la puissance $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{(Oz)}\dot{\theta}$ d'une action mécanique s'exerçant sur un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à partir de celle qui s'applique sur un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) : $\mathcal{P} = f_x \dot{x}$. Il suffit de remplacer la projection f_x de la force sur l'axe du mouvement (Ox) par la projection $\mathcal{M}_{(Oz)}$ du moment sur l'axe de rotation (Oz) et la vitesse linéaire $\dot{x}$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

5.4 Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

5.4.1 Observation préliminaire : le tabouret d'inertie

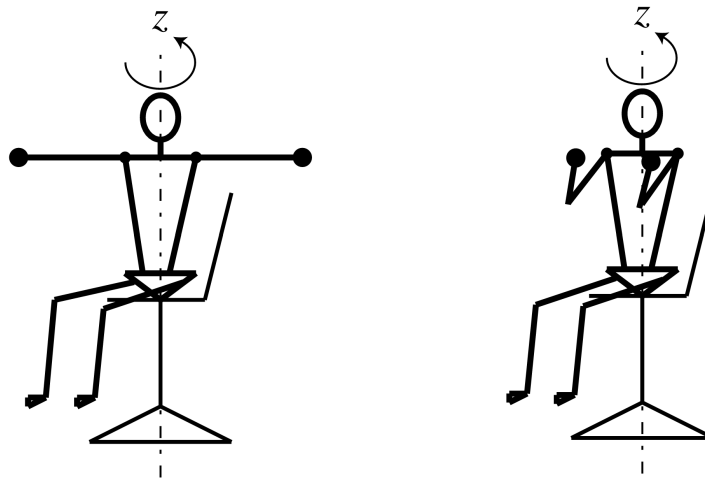


Figure 7 – Rotation lente avec les bras tendus (à gauche) — Rotation rapide avec les bras repliés (à droite)

On considère une personne portant un haltère dans chaque main et assise sur un tabouret pivotant d'axe de rotation (Oz) vertical ascendant (figure 7). On le met en rotation alors qu'il a les bras tendus puis il replie les bras. Sa vitesse de rotation augmente significativement, et d'autant plus que les haltères qu'il porte sont lourds.

On peut expliquer ce changement de vitesse en considérant le système constitué de la personne assise, de la partie mobile du tabouret (rotor) et des haltères. Les forces extérieures s'exerçant sur le système sont réduites au poids dirigé selon $-\vec{u}_z$ et à l'action de la liaison pivot d'axe (Oz) supposée idéale. Le moment de ces deux actions par rapport à l'axe de rotation (Oz) est nul. En effet :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{poids}) = (\vec{OG} \wedge (-mg\vec{u}_z)) \cdot \vec{u}_z = 0$$

$$\text{et } \mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0 \quad \text{dans le cas d'une liaison idéale}$$

D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique du système se conserve. Or,

- bras tendus, le moment d'inertie du système est J_T
- bras repliés, son moment d'inertie est $J_R < J_T$

En effet, les haltères se rapprochent de l'axe lorsque les bras sont repliés donc leurs contributions au moment d'inertie diminuent. En notant respectivement $\dot{\theta}_T$ et $\dot{\theta}_R$ les vitesses de rotations bras tendus et bras repliés, la conservation du moment cinétique implique :

$$J_T \dot{\theta}_T = J_R \dot{\theta}_R$$

Quand l'individu replie les bras, le moment d'inertie diminue donc la vitesse de rotation augmente.

Quand on pousse la réflexion un peu plus loin, on voit apparaître un effet inattendu : l'énergie cinétique de rotation augmente dans les mêmes proportions que la vitesse de rotation. En effet, l'énergie cinétique bras tendus valait :

$$E_{cT} = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}_T^2$$

Bras repliés, elle vaut :

$$E_{cR} = \frac{1}{2} J_R \dot{\theta}_R^2 = \frac{1}{2} J_R \dot{\theta}_R \dot{\theta}_R = \frac{1}{2} J_T \dot{\theta}_T \dot{\theta}_R = \frac{\dot{\theta}_R}{\dot{\theta}_T} E_{cT} = \frac{J_T}{J_R} E_{cT}$$

Or, au cours du changement de position, le centre de gravité du système reste dans un plan horizontal. Le travail du poids est donc nul. La liaison pivot est idéale donc elle ne travaille pas. En effet :

$$\mathcal{P}(\text{liaison}) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison})\dot{\theta} = 0 \quad \text{car} \quad \mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0$$

Des forces que l'on n'a pas envisagées fournissent un travail qui cause l'augmentation de l'énergie cinétique. Ce sont les forces intérieures. Il s'agit ici des forces musculaires exercées par la personne assise pour plier ses bras. Ces forces ne sont jamais intervenues jusque-là, car leur puissance est nulle lorsque le système est indéformable.

Action des forces intérieures au solide

Lorsqu'un système se déforme, les forces intérieures fournissent une puissance non nulle. Il faut en tenir compte dans la loi de l'énergie cinétique. La puissance des forces intérieures est nulle lorsque le système est indéformable.

5.4.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

On considère un système constitué d'un ensemble de points matériels M_i de masse m_i de vitesse $\vec{v}_i$ et d'énergie cinétique $E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2$. L'énergie cinétique du système de points est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures et intérieures qui s'exercent sur lui :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i,\text{int}} \mathcal{P}(\vec{f}_i) + \sum_{j,\text{ext}} \mathcal{P}(\vec{f}_j)$$

L'évaluation de la puissance des forces est alors délicate et ne peut être menée à bien que dans des situations simples.