

Mathématiques – Centrale/Mines – DS₅

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 : Série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

- Q1.** Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Dans la suite, on notera g sa somme sur $[0, +\infty[$: pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$.
- Q2.** Justifier que g est continue sur $[0, +\infty[$.
- Q3.** Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.
- Q4.** Montrer que $g(0) = \ln(2)$.
- Q5.** Donner une expression simple de $g(x)$ l'aide de fonctions usuelles.

Réponse

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $v_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

La suite $(v_n(x))_n$ est positive décroissante de limite nulle. Donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n(x)$ converge.

Donc,

$$\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+.$$

De plus, en notant $R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x)$,

$$|R_N(x)| \leq \frac{e^{-(N+1)x}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Donc,

$$0 \leq \|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1}.$$

Donc, $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$\sum u_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.$$

Q2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, par théorème,

$$g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'_n(x) = (-1)^n e^{-nx}$.

De plus, la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \geq \alpha$, $|u'_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n\alpha} = (e^{-\alpha})^n$.

Donc,

$$0 \leq \|u'_n\|_{[\alpha, +\infty[}^\infty \leq (e^{-\alpha})^n.$$

Comme $\alpha > 0$, $|e^{-\alpha}| < 1$, donc, $\sum (e^{-\alpha})^n$ converge (série géométrique).

Par théorème de comparaison, $\sum \|u'_n\|_{[\alpha, +\infty[}^\infty$ converge.

Donc, $\sum u'_n$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

Par théorème, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$, donc,

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q4. Calcul classique.

Q5. Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Donc, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + C$.

En faisant tendre x vers 0, on a par continuité, $g(0) = \ln(2) + C$.

Donc, $C = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

Exercice 2 : Probabilités

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \dots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.

Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : «le sauteur a réussi son k -ième saut» et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

Q6. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

Q7. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

Q8. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Q9. Justifier que $(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.

Q10. Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction d'événements du type S_k .

Q11. Déterminer la loi de X .

Q12. Vérifier par le calcul que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

Réponse

Q1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Q2. Le sauteur effectue au moins un saut, donc,

X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Q3. On remarque que $(X = 1) = S_1 \cap \beta S_2$, donc,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S_1 \cap \beta S_2) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\beta S_2|S_1).$$

Or,

- le premier saut est toujours réussi : $\mathbb{P}(S_1) = 1$.
- la probabilité de réussir le deuxième saut est $\mathbb{P}(S_2|S_1) = \frac{1}{2}$.

Donc, la probabilité de le rater est : $\mathbb{P}(\beta S_2|S_1) = 1 - \mathbb{P}(S_2|S_1) = \frac{1}{2}$.

Donc,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q4. L'évènement $(X = 2)$ est réalisé si et seulement si les deux premiers sauts ont été réussis, mais le troisième a été raté.

Donc,

$$(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \beta S_3.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\mathbb{P}(\beta S_3|S_1 \cap S_2) = 1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Q5. On a :

$$(X = n) = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \beta S_{n+1}.$$

Q6. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\dots\mathbb{P}(S_n|S_1 \cap \dots \cap S_{n-1})\mathbb{P}(\beta S_{n+1}|S_1 \cap \dots \cap S_n) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

Q7. On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n!}$ et $\sum \frac{1}{(n+1)!}$ convergent, donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

Remarque : on pouvait aussi observer un télescopage.

Problème

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) dont la matrice unité est notée I_n .
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A^\top$, la transposée de A .
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n, AA^\top = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n .
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $AA^\top = A^\top A$.

Définition 2 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$ s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^\top A Q$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B .)

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
 - (C₁) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A^\top = P(A)$.
 - (C₂) La matrice A est normale.
 - (C₃) Pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|AX\|$.
 - (C₄) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
 - soit de taille $(1, 1)$,
 - soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.

Théorème 2 Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = Q^\top A Q$, alors pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = Q^\top P(A) Q$.

Question préliminaire

Q13. Démontrer que la relation **ORTS** vérifie les propriétés suivantes : pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n^3$,

- (i) A est **ORTS** à A .
- (ii) Si A est **ORTS** à B , alors B est **ORTS** à A .
- (iii) Si A est **ORTS** à B et B est **ORTS** à C , alors A **ORTS** à C .

On dit que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

Exemples

Q14. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions **(C₁)**, **(C₂)**, **(C₃)** et **(C₄)**, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions **(C₁)**, **(C₂)** et **(C₃)**.

Q15. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions **(C₂)** et **(C₃)**.

Q16. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.

Montrer que les matrices rT , où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions **(C₁)** et **(C₄)**.

Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

Q17. Montrer que si A vérifie la condition **(C₁)**, alors A vérifie la condition **(C₂)**.

Q18. Montrer que si A vérifie la condition **(C₂)**, alors A vérifie la condition **(C₃)**.

La condition **(C₃)** implique la condition **(C₄)**

Dans la question **Q19** seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition **(C₃)**.

Q19. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).

On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2 .

En déduire que A vérifie la condition **(C₄)**.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition **(C₃)**.

Q20. Montrer que pour tout réel λ , la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie **(C₃)**.

Q21. En déduire que A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

Q22. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

Q23. Pour $n \geq 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient **(C₃)**, avec $p \in \{1, 2\}$.

*On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie **(C₃)**.*

Q24. Montrer que si A vérifie la condition **(C₃)**, alors A vérifie la condition **(C₄)**.

La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ une famille de n complexes deux à deux distincts.

Q25. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.

Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$.

Q26. Montrer que $P(rR(\theta)) = (rR(\theta))^\top$.

Lorsque $\sin \theta \neq 0$, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.

Q27. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition (C_4) , alors A vérifie la condition (C_1) .

Exponentielle d'une matrice normale

Q28. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |A_{i,j}|.$$

Q29. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$.

Q30. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\text{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \text{Exp}(Q^\top A Q) = Q^\top \text{Exp}(A) Q.$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

Q31. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\text{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

Q32. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\exp(rR(\theta)) = e^{r \cos \theta} R(r \sin \theta)$.

En déduire que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions :

- les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire,
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

Q33. Démontrer que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

Q34. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i+1 = j \leq n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

Réponse

- Q13.** (i) On sait que $I_n \in \mathcal{O}_n$ et $A = I_n^\top A I_n$, donc, A est ORTS à A .
(ii) On suppose que A est ORTS à B : il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^\top A Q$.
Comme Q est orthogonale, $Q^{-1} = Q^\top$, donc, en multipliant à gauche par Q et à droite par $Q^\top$, on a : $Q B Q^\top = A$.
D'où, en notant $P = Q^\top \in \mathcal{O}_n$, on a $A = P^\top B P$. Donc, B est ORTS à A .
(ii) On suppose que A est ORTS à B et B est ORTS à C .
Donc, il existe Q et Q' deux matrices orthogonales telles que $B = Q^\top A Q$ et $C = Q'^\top B Q'$.
Donc, $C = Q'^\top Q^\top A Q Q' = (Q Q')^\top A (Q Q')$.
Or, $Q Q' \in \mathcal{O}_n$ (produit de matrices orthogonales), donc, A est ORTS à C .
- Q14.** Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On a $S^\top = S$, donc :
- (C₁) On sait que $S^\top = S$, donc en posant $P(X) = X$, on a $S^\top = P(S)$.
(C₂) Comme $S^\top = S$, on a : $S S^\top = S^2 = S^\top S$, donc, S est normale.
(C₃) Comme $S^\top = S$, on a : pour tout $X \in E_n$, $\|S^\top X\| = \|S X\|$.
(C₄) La matrice S est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, $S = P D P^\top$ où D est diagonale et $P \in \mathcal{O}_n$.
Autrement dit, S est ORTS à D , une matrice diagonale. D'autre part, D est diagonale par blocs dont chaque bloc diagonal est de taille (1,1).

Ainsi,

S vérifie (C₁), (C₂), (C₃) et (C₄).

Soit $A \in \mathcal{A}_n$. On a $A^\top = -A$, donc :

- (C₁) On sait que $A^\top = -A$, donc en posant $P(X) = -X$, on a $A^\top = P(A)$.
(C₂) Comme $A^\top = -A$, on a : $A A^\top = -A^2 = A^\top A$, donc, A est normale.
(C₃) Comme $A^\top = -A$, on a : pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|-A X\| = \|A X\|$.

Ainsi,

A vérifie (C₁), (C₂) et (C₃).

Q15. Soit $Q \in \mathcal{O}_n$.

- (C₂) Comme Q est orthogonale, on a $Q Q^\top = I_n = Q^\top Q$, donc, Q est normale.
(C₃) Pour tout $X \in E_n$, on a :

$$\|Q X\| = \sqrt{\langle Q X, Q X \rangle} = \sqrt{\langle Q X \rangle^\top Q X} = \sqrt{X^\top Q^\top Q X} = \sqrt{X^\top X} = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \|X\|$$

et

$$\|Q^\top X\| = \sqrt{\langle Q^\top X \rangle^\top Q^\top X} = \sqrt{X^\top Q Q^\top X} = \sqrt{X^\top X} = \|X\| = \|Q X\|.$$

Q16. Comme $T \in \mathcal{O}_2$, il y a deux cas à étudier :

Cas 1 : $T = S(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, $M = r T \in \mathcal{S}_2$, donc, par **Q14**,

M vérifie (C₁) et (C₄).

Cas 2 : $T = R(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas,

$$M^\top = r \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = -r \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} = -r \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} - 2\cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = -M + 2r\cos(\theta)I_2.$$

Donc, en notant $P = -X + 2r\cos(\theta)$, on a : $M^\top = P(M)$.

Donc,

M vérifie **(C₁)**.

De plus, $M = rR(\theta)$ est bien diagonale par bloc avec un seul bloc de taille (2,2) du type $rR(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Donc, comme M est ORTS à M ,

la matrice M vérifie **(C₄)**.

Q17. On suppose que A vérifie **(C₁)**.

Donc, $A^\top$ est un polynôme en A .

Or, tout polynôme en A commute avec A ,

donc,

A vérifie **(C₂)**.

Q18. On suppose que A vérifie **(C₂)**. Pour tout $X \in E_n$, on a :

$$\|AX\| = \sqrt{(AX)^\top AX} = \sqrt{X^\top A^\top AX}.$$

Or, A vérifie **(C₂)**, donc,

$$\|AX\| = \sqrt{X^\top AA^\top X} = \sqrt{(A^\top X)^\top A^\top X} = \|A^\top X\|.$$

Donc,

A vérifie **(C₃)**.

Q19. On a :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}.$$

Or, par **(C₃)**, on a $\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right\|^2$, autrement dit, $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$, donc, $b^2 = c^2$.

D'où, $b = \pm c$.

- **Cas 1** : $b = c$. Dans ce cas, c'est terminé.
- **Cas 2** : $b \neq c$. Comme $b = \pm c$, on en déduit que $c = -b$ et $b \neq 0$.

De plus, on a :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}.$$

Or, par **(C₃)**, on a $\left\| \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} \right\|^2$, autrement dit, $(a+c)^2 + (b+d)^2 = (a+b)^2 + (c+d)^2$.

Donc, en développant les carrés,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd.$$

Donc,

$$ac + bd = ab + cd.$$

Comme $b = -c \neq 0$, on a $a - d = -a + d$, donc, $a = d$.

Donc,

$$c = b \text{ ou bien } (b \neq 0 \text{ et } c = -b \text{ et } a = d).$$

$$\text{On a : } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

- Dans le premier cas A est symétrique réelle, donc, par **Q14**,

A vérifie **(C₄)**.

- Dans le deuxième cas, comme $b \neq 0$, $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{bmatrix}$$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Donc, en notant $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$,

$$A = rR(\theta).$$

Donc,

A vérifie **(C₄)**.

Q20. Pour tout $X \in E_n$:

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I_n)X\|^2 &= X^\top (A^\top - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)X \\ &= X^\top (A^\top A - \lambda A - \lambda A^\top + \lambda^2 I_n)X \\ &= X^\top A^\top A X - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X \\ &= \|AX\|^2 - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I_n)^\perp X\|^2 &= X^\top (A - \lambda I_n)(A^\top - \lambda I_n)X \\ &= X^\top (AA^\top - \lambda A - \lambda A^\top + \lambda^2 I_n)X \\ &= X^\top AA^\top X - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X \\ &= \|A^\top X\|^2 - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X. \end{aligned}$$

Comme A vérifie **(C₃)** : $\|AX\|^2 = \|A^\top X\|^2$.

Donc, $\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|(A^\top - \lambda I_n)X\|^2$. Comme les normes sont positives, $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|(A^\top - \lambda I_n)X\|$. Ainsi,

$A - \lambda I_n$ vérifie **(C₃)**.

Q21. On a :

$$X \in E_\lambda(A) \iff (A - \lambda I_n)X = 0 \iff \|(A - \lambda I_n)X\| = 0.$$

Par la question précédente, $A - \lambda I_n$ vérifie **(C₃)**, donc,

$$X \in E_\lambda(A) \iff \|(A - \lambda I_n)^\top X\| = 0 \iff \|(A^\top - \lambda I_n)X\| = 0 \iff X \in E_\lambda(A^\top).$$

Donc, $E_\lambda(A) = E_\lambda(A^\top)$ et

A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres.

Soit $X \in E_\lambda(A)$ et $Y \in E_\mu(A)$ avec $\lambda \neq \mu$.

Montrons que $\langle X, Y \rangle = 0$.

On a

$$\lambda \langle X, Y \rangle = \langle \lambda X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = X^\top A^\top Y.$$

Or, $Y \in E_\mu(A) = E_\mu(A^\top)$, donc,

$$\lambda \langle X, Y \rangle = \mu X^\top Y = \mu \langle X, Y \rangle.$$

Donc, $(\lambda - \mu) \langle X, Y \rangle = 0$.

Comme $\lambda \neq \mu$, on a $\langle X, Y \rangle = 0$.

Donc, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$. Autrement dit,

les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Q22. ($\Rightarrow$) Supposons que A est diagonalisable.

On sait alors que $E_n = E_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(A)$ ($\star$) où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de A .

Pour chaque $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on considère une base orthonormée de $E_{\lambda_i}(A)$.

Comme les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les bases des $E_{\lambda_i}(A)$ est une famille orthonormée orthonormée.

De plus, par ($\star$), $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E_n .

Il s'agit d'une base formée de vecteurs propres de A , donc par la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$, où P est inversible et D est diagonale.

Or, P est la matrice de passage de la base canonique de E_n à la base $\mathcal{B}$ qui sont toutes les deux orthonormées, donc, P est une matrice orthogonale.

On en déduit que $A = PDP^\top$.

D'où, $A^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A$ (car D est diagonale).

Donc, A est symétrique.

($\Leftarrow$) Supposons A est symétrique.

Comme A est à coefficient réel, par le théorème spectral, A est diagonalisable.

Ainsi,

A est diagonalisable si, et seulement si, A est symétrique.

Q23. Soit B une matrice ORTS à A : il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^\top$.

Pour tout $X \in E_n$,

$$\|B^\top X\|^2 = X^\top B B^\top X = X^\top P A P^\top P A^\top P^\top X.$$

Comme P est orthogonale,

$$\|B^\top X\|^2 = X^\top P A A^\top P^\top X = \|A^\top (P^\top X)\|^2.$$

Comme A vérifie (C_3),

$$\|B^\top X\|^2 = \|A(P^\top X)\|^2 = X^\top P A^\top A P^\top X = X^\top P A^\top P^\top P A P^\top X = X^\top B^\top B X = \|B X\|^2.$$

Donc, par positivité de la norme, $\|B^\top X\| = \|B X\|$.

Ainsi,

B vérifie (C_3).

Soit f l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à A .

On sait que (Théorème 1) f possède une droite ou un plan stable. On note F de dimension 1 ou 2 un sous-espace vectoriel de E_n stable par f .

Soit $\mathcal{B}_F$ une base orthonormée de F complétée en une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E_n (il s'agit d'une base adaptée F).

La matrice de f dans cette base est

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_p$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{p,n-p}$ avec $p = \dim(F) \in \{1, 2\}$.

Les matrices A et B sont semblables, de plus, comme les bases canonique et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, la matrice de passage entre ces bases est orthogonale.

On en déduit que A est ORTS à B .

Comme A vérifie (C_3) , on en déduit de la première partie de la question que B vérifie (C_3) .

Montrons maintenant que $A_3 = 0$.

Soit $X \in E_p$. On définit par blocs $Y = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in E_n$.

On a

$$BX = \begin{bmatrix} A_1 X \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^T X = \begin{bmatrix} A_1^T X \\ A_3^T X \end{bmatrix}.$$

Donc,

$$\|BX\|^2 = (BX)^T (BX) = [X^T A_1^T \quad 0] \times \begin{bmatrix} A_1 X \\ 0 \end{bmatrix} = X^T A_1^T A_1 X$$

et

$$\|B^T X\|^2 = (B^T X)^T (B^T X) = [X^T A_1 \quad X^T A_3] \times \begin{bmatrix} A_1^T X \\ A_3^T X \end{bmatrix} = X^T A_1 A_1^T X + X^T A_3 A_3^T X.$$

Comme B vérifie (C_3) , on a :

$$X^T A_1^T A_1 X = X^T A_1 A_1^T X + X^T A_3 A_3^T X \quad (\star)$$

- **Cas 1** : $p = 1$. Dans ce cas $A_1 = [\alpha]$ et $A_3 = [a_1 \quad \dots \quad a_{p-1}]$.

En notant $X = [1]$, on a :

$$X^T A_1^T A_1 X = \alpha^2, \quad X^T A_1 A_1^T X = \alpha^2 \quad \text{et} \quad X^T A_3 A_3^T X = \sum_{i=1}^{p-1} a_i^2.$$

Donc, par $(\star)$, $\sum_{i=1}^{p-1} a_i^2 = 0$. Il s'agit d'une somme nulle de termes positifs ou nuls, donc, tous les termes de la somme sont nuls, donc, $A_3 = 0$.

- **Cas 2** : $p = 2$. Dans ce cas $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ et $A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{p-1} \\ b_1 & \dots & b_{p-1} \end{bmatrix}$.

En notant $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ on a :

$$X^T A_1^T A_1 X = \alpha^2 + \beta^2, \quad X^T A_1 A_1^T X = \alpha^2 + \gamma^2 \quad \text{et} \quad X^T A_3 A_3^T X = \sum_{i=1}^{p-1} a_i^2.$$

Donc, par $(\star)$,

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \sum_{i=1}^{p-1} a_i^2}.$$

En notant $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ on a :

$$X^T A_1^T A_1 X = \gamma^2 + \delta^2, \quad X^T A_1 A_1^T X = \beta^2 + \delta^2 \quad \text{et} \quad X^T A_3 A_3^T X = \sum_{i=1}^{p-1} b_i^2.$$

D'où, par $(\star)$,

$$\boxed{\gamma^2 + \delta^2 = \beta^2 + \delta^2 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i^2}.$$

Donc, en sommant les deux égalités encadrées,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \sum_{i=1}^{p-1} a_i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i^2.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{p-1} a_i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} b_i^2 = 0.$$

On retrouve une somme nulle de termes positifs ou nuls, donc, tous les termes de la sommes sont nuls.

Ainsi, $A_3 = 0$.

Dans les deux cas,

$$A_3 = 0.$$

Montrons que A_1 vérifie (C_3) .

Dans $(\star)$, on a montré que pour tout $X \in E_p$,

$$\|A_1 X\|^2 = \|A_1^\top X\|^2 + X^\top A_3 A_3^\top X.$$

Comme, $A_3 = 0$,

Donc, $\|A_1 X\|^2 = \|A_1^\top X\|^2$.

Comme les normes sont positives, $\|A_1 X\| = \|A_1^\top X\|$.

Donc,

$$A_1 \text{ vérifie } (C_3).$$

Montrons que A_2 vérifie (C_3) .

Soit $X \in E_{n-p}$. On définit par blocs $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X \end{bmatrix} \in E_n$.

On a

$$BX = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 X \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^\top X = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^\top X \end{bmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{cases} \|BX\|^2 = (BX)^\top BX = \begin{bmatrix} 0 & X^\top A_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 X \end{bmatrix} = X^\top A_2^\top A_2 X = \|A_2 X\|^2 \\ \text{et} \\ \|B^\top X\|^2 = \begin{bmatrix} 0 & X^\top A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^\top X \end{bmatrix} = X^\top A_2 A_2^\top X = \|A_2^\top X\|^2. \end{cases}$$

Donc, comme B vérifie (C_3) , $\|A_2 X\|^2 = \|A_2^\top X\|^2$. Par positivité de la norme,

$$A_2 \text{ vérifie } (C_3).$$

Q24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_n$: « $\forall A \in \mathcal{M}_n$, si A vérifie (C_3) , alors A vérifie (C_4) ».

Initialisation. Toute matrice carrée d'ordre 1 vérifie (C_4) , donc, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}$. On suppose que A vérifie (C_3) .

Par **Q23**, A est ORTS à une matrice du type $B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient (C_3) , avec $p \in \{1, 2\}$.

Par hypothèse de récurrence, A_1 et A_2 sont orthogonalement semblables à $B_1 \in \mathcal{M}_p$ et $B_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille $(1, 1)$,
- soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Autrement dit, $A_1 = Q_1 B_1 Q_1^\top$ et $A_2 = Q_2 B_2 Q_2^\top$ où Q_1 et Q_2 sont orthogonales.

On note $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$

On a :

$$B = \begin{bmatrix} Q_1 B_1 Q_1^\top & 0 \\ 0 & Q_2 B_2 Q_2^\top \end{bmatrix} = Q C Q^\top.$$

Chaque bloc diagonal de C est :

- soit de taille $(1, 1)$,
- soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus,

$$QQ^\top = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^\top & 0 \\ 0 & Q_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 Q_1^\top & 0 \\ 0 & Q_2 Q_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = I_n.$$

Donc, Q est une matrice orthogonale.

Ainsi, B est ORTS à C .

Par **Q13**, A est ORTS à C , donc, A vérifie **(C₄)**. Ce qui achève la récurrence.

Par le principe de récurrence, on en déduit que

(C₃) implique (C₄).

Q25. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme de Lagrange :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{X - z_j}{z_k - z_j}.$$

Le polynôme L_k est de degré $n - 1$, s'annule en z_j avec $j \neq k$ et $L_k(z_k) = 1$.

Montrons que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = 0$.

On évalue en z_j , avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: il vient $\lambda_j = 0$.

Donc, la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est libre et est composée de $n = \dim(\mathbb{C}_{n-1}[X])$ vecteurs de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Par théorème, $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Le polynôme

$$P = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} \cdot L_k \text{ est donc unique et vérifie } P(z_k) = \overline{z_k}, \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Si $\overline{z_k} \in Z$, alors, on a aussi $P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k$.

On note $P = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha_j} X^j$. On montre que $P = Q$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$Q(z_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha_j} z_k^j = \overline{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \overline{z_k}^j} = \overline{P(\overline{z_k})} = \overline{z_k}.$$

De plus, $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc, par unicité (**Q25**), $P = Q$.

En identifiant les coefficients, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = \overline{a_k}$.

Donc, $a_k \in \mathbb{R}$ et

P est réel.

Q26. On a :

$$\chi = X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2 = (X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}).$$

Le division euclidienne de P par χ donne :

$$P = \chi \times B + R,$$

où $B \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et $\deg(R) \leq 1$. On note $R = aX + b \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P(X) = \chi(X)B(X) + aX + b.$$

On évalue en $re^{i\theta}$, il vient $P(re^{i\theta}) = are^{i\theta} + b$.

Donc, par hypothèse sur P :

$$are^{i\theta} + b = re^{-i\theta}.$$

Comme a et b sont réels, on peut identifier parties réelles et imaginaires :

$$a \cos(\theta) + b = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad a \sin(\theta) = -r \sin(\theta).$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ est annulateur de $rR(\theta)$, donc,

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) + b & -a \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) & a \cos(\theta) + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} = (rR(\theta))^\top.$$

Q27. Soit $A \in \mathcal{M}_n$. On suppose que A vérifie (C_4) . On sait que A est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type $[\lambda]$ ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

On notons $[\lambda_1], \dots, [\lambda_p]$ les blocs (1,1) et $r_1R(\theta_1), \dots, r_qR(\theta_q)$ les blocs (2,2).

On a, à l'ordre près des blocs,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_1R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & r_q(R(\theta_q)) \end{bmatrix}.$$

On note $Z = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, r_1e^{i\theta_1}, r_1e^{-i\theta_1}, \dots, r_qe^{i\theta_q}, r_qe^{-i\theta_q}\}$. On remarque que si $z \in Z$, alors $\bar{z} \in Z$.

D'après **Q25**, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $P(\lambda_j) = \lambda_j$ et $P(r_je^{i\theta_j}) = r_je^{-i\theta_j}$ et $P(r_je^{-i\theta_j}) = r_je^{i\theta_j}$.

On a alors :

$$B^\top = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (r_1R(\theta_1))^\top & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (r_q(R(\theta_q)))^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & P(\lambda_p) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P(r_1R(\theta_1)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & P(r_q(R(\theta_q))) \end{bmatrix} = P(B).$$

De plus, comme A est ORTS à B , il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $A = QBQ^\top$.

Par le Théorème 2, $P(A) = QP(B)Q^\top = QB^\top Q^\top = (QBQ^\top)^\top = A^\top$.

Donc,

A vérifie (C_1) .

Q28. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left| \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \right| \leq \frac{|r|^k}{k!}$ et $0 \leq \left| \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \right| \leq \frac{|r|^k}{k!}$.

Or, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|r|^k}{k!}$ converge (série exponentielle).

Par théorème de comparaison,

les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent absolument, donc convergent.

De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} \right) = \operatorname{Re} (e^{re^{i\theta}}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} \right) = \operatorname{Im} (e^{re^{i\theta}}).$$

Or,

$$e^{re^{i\theta}} = e^{r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)} = e^{r \cos(\theta)} e^{ir \sin(\theta)} = e^{r \cos(\theta)} \left(\cos(r \sin(\theta)) + i \sin(r \sin(\theta)) \right).$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} = e^{r \cos(\theta)} \cos(r \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = e^{r \cos(\theta)} \sin(r \sin(\theta)).$$

Q29. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$.

Le coefficient de la ligne i colonne j de AB est :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad |c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} = n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty}.$$

Donc,

$$\|AB\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty}.$$

Q30. Soit $(i,j) \in [1,n]^2$. On a (appliquer **Q29**) :

$$|(A^k)_{i,j}| \leq \|A^k\|_{\infty} \leq n \|A\|_{\infty} \|A^{k-1}\|_{\infty} \leq \dots \leq n^k \|A\|_{\infty}^k.$$

D'où,

$$\left| \frac{(A^k)_{i,j}}{k!} \right| \leq \frac{(n \|A\|_{\infty})^k}{k!}.$$

Dans le membre de droite, on reconnaît le terme général d'une série exponentielle, donc, absolument convergente.

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge absolument, donc converge.

la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$.

Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. Par le Théorème 2, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p(Q^{\top} A Q) = Q^{\top} S_p(A) Q. \quad (\star\star)$$

Par définition de l'exponentielle d'une matrice :

$$S_p(Q^{\top} A Q) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \text{Exp}(Q^{\top} A Q).$$

L'application $\varphi : M \mapsto Q^{\top} M Q$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

Donc,

$$Q^{\top} S_p(A) Q = \varphi(S_p(A)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \varphi(\text{Exp}(A)) = Q^{\top} \text{Exp}(A) Q.$$

Donc, en passant à la limite dans $(\star\star)$, on a :

$$\text{Exp}(Q^{\top} A Q) = Q^{\top} \text{Exp}(A) Q.$$

Q31. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}_n$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n$. Montrons que $B \in \mathcal{E}_n$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice A_p est normale, donc, $A_p A_p^{\top} = A_p^{\top} A_p$ ($\star\star\star$).

De plus, les applications $\psi_1 : M \mapsto M M^{\top}$ et $\psi_2 : M \mapsto M^{\top} M$ sont continue sur $\mathcal{M}_n$ (en effet, les coefficients de $M M^{\top}$ et $M^{\top} M$ sont polynomiaux en M).

Donc, $A_p A_p^{\top} = \psi_1(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \psi_1(B) = B B^{\top}$ et $A_p^{\top} A_p = \psi_2(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \psi_2(B) = B^{\top} B$.

Donc, en passant à la limite dans $(\star\star\star)$, $B B^{\top} = B^{\top} B$.

Donc, $B \in \mathcal{E}_n$.

Par caractérisation séquentielle des fermés,

$\mathcal{E}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$.

Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Par définition A et $A^\top$ commutent.

Donc, tout polynôme en A commute avec tout polynôme en $A^\top$.

Donc, $S_p(A)$ commute avec

$$S_p(A^\top) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (A^\top)^k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (A^k)^\top = \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k \right)^\top = (S_p(A))^\top.$$

Autrement dit, $S_p(A) \in E_n$.

De plus, $\text{Exp}(A)$ est alors limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$, donc,

$$\text{Exp}(A) \in \mathcal{E}_n.$$

Q32. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(rR(\theta)) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (rR(\theta))^k = \sum_{k=0}^p \frac{r^k}{k!} (R(\theta))^k.$$

Or, pour tous réels θ et θ' , $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc,

$$S_p(rR(\theta)) = \sum_{k=0}^p \frac{r^k}{k!} (R(k\theta)) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \end{bmatrix}.$$

Par **Q28**,

$$S_p(rR(\theta)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} e^{r \cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(r \sin \theta) & -\sin(r \sin \theta) \\ \sin(r \sin \theta) & \cos(r \sin \theta) \end{bmatrix} = e^{r \cos(\theta)} R(r \sin \theta).$$

Ainsi,

$$\text{Exp}(rR(\theta)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(rR(\theta)) = e^{r \cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(r \sin \theta) & -\sin(r \sin \theta) \\ \sin(r \sin \theta) & \cos(r \sin \theta) \end{bmatrix} = e^{r \cos(\theta)} R(r \sin \theta).$$

($\subset$) Soit $M \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$. On a $M = \text{Exp}(A)$ où $A \in \mathcal{E}_n$ (autrement dit A est normale).

Par **Q18** et **Q24**, (**C**₂) implique (**C**₄).

Donc, A est ORTS à

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_1 R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & r_q(R(\theta_q)) \end{bmatrix},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $r_i > 0$ et $\theta_i \in \mathbb{R}$.

On note $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $A = QBQ^\top$,

On a par **Q30** (avec Q remplacée par $Q^\top$),

$$\text{Exp}(A) = Q \text{Exp}(B) Q^\top.$$

Donc, $\text{Exp}(A)$ est ORTS à $\text{Exp}(B)$.

De plus,

$$S_p(B) = \begin{bmatrix} S_p(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & S_p(\lambda_s) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & S_p(r_1 R(\theta_1)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & S_p(r_q(R(\theta_q))) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{\lambda_s} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \text{Exp}(r_1 R(\theta_1)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \text{Exp}(r_q(R(\theta_q))) \end{bmatrix}.$$

Donc, par le début de la question,

$$\text{Exp}(B) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{\lambda_s} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{r_1 \cos \theta_1} R(r_1 \sin \theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{r_q \cos \theta_q} R(r_q \sin \theta_q) \end{bmatrix}.$$

Comme $e^{\lambda_i} > 0$, $e^{r_i \cos \theta_i} > 0$ et $r_i \sin \theta_i \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}(A)$ est bien ORTS à une matrice de la forme voulue.

($\Rightarrow$) Soit M une matrice orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On a $M = QNQ^\top$ avec Q orthogonale et

$$N = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mu_s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_1 R(\beta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_q R(\beta_q) \end{bmatrix},$$

avec $\mu_j > 0$, $\alpha_j > 0$ et $\beta_j \in \mathbb{R}$.

On pose $\lambda_j = \ln(\mu_j) \in \mathbb{R}$ et on écrit le nombre complexe $\alpha_j + i\beta_j$ sous forme exponentielle :

$$\alpha_j + i\beta_j = r_j e^{i\theta_j}.$$

Comme $\alpha_j \neq 0$, $r_j > 0$.

On définit alors

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r_1 R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & r_q R(\theta_q) \end{bmatrix}.$$

Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \text{Exp}(B) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{\lambda_s} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{r_1 \cos \theta_1} R(r_1 \sin \theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{r_q \cos \theta_q} R(r_q \sin \theta_q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mu_s & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{r_1 \cos \theta_1} R(r_1 \sin \theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{r_q \cos \theta_q} R(r_q \sin \theta_q) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Or,

$$\alpha_j + i\beta_j = r_j e^{i\theta_j} = r_j \cos(\theta_j) + i r_j \sin(\theta_j),$$

donc, en identifiant parties réelle et imaginaire, $\alpha_j = r_j \cos(\theta_j)$ et $\beta_j = r_j \sin(\theta_j)$.

Donc,

$$\text{Exp}(B) = N.$$

D'où,

$$M = Q N Q^\top = Q \text{Exp}(B) Q^\top = \text{Exp}(Q B Q^\top).$$

On note $A = Q B Q^\top$.

Les matrices A et B sont ORTS. Étant donnée la forme de B , la matrice A vérifie **(C₄)**, donc vérifie **(C₂)** (d'après **Q27** et **Q17**).

Donc, $M = \text{Exp}(A) \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

Ainsi, par double inclusion on a bien montré l'égalité demandée.

Q33. Soit $M \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$. Par la question précédente, M est une matrice orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On a $M = Q N Q^\top$ avec Q orthogonale et

$$N = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mu_s & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_1 R(\beta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_q R(\beta_q) \end{bmatrix},$$

avec $\mu_j > 0$, $\alpha_j > 0$ et $\beta_j \in \mathbb{R}$.

Les valeurs propres de N sont les $\mu_i > 0$ et les $\alpha_j e^{i\beta_j}$ et $\alpha_j e^{-i\beta_j}$.

Les valeurs propres négatives sont celles pour lesquelles $\beta_j \equiv \pi[2\pi]$ et sont donc en nombre pair.

On note $S = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_s, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha_q)$ et

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R(\beta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R(\beta_q) \end{bmatrix},$$

On remarque que S est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, donc, $S \in \mathcal{S}_n^{++}$.

De plus, par un calcul par blocs, $ST = TS = N$, $TT^\top = I_n$ et $\det(T) = 1$ (déterminant triangulaire par blocs).

On notant $S' = QSQ^\top$ et $T' = QTQ^\top$:

- S' est ORTS à S , donc $\text{Sp}(S') = \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $S'^\top = (QSQ^\top)^\top = QSQ^\top = S'$. Donc, $S' \in \mathcal{S}_n^{++}$.
- T et Q sont orthogonales, donc, T' est orthogonale. De plus,

$$\det(T') = \det(Q)\det(T)\det(Q^\top) = \det(T)\det(QQ^\top) = \det(T)\det(I_n) = 1.$$

Donc, $T' \in \mathcal{SO}_n$.

- $S'T' = QSQ^\top QTQ^\top = QSTQ^\top = QTSQ^\top = QTQ^\top QSQ^\top = T'S'$.
- $M = QNQ^\top = QSTQ^\top = QSQ^\top QTQ^\top = S'T'$

Donc, $M \in \mathcal{F}_n$.

($\Rightarrow$). Soit $M \in \mathcal{F}_n$.

Donc,

- les valeurs propres négatives de M sont de multiplicité paire,
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $M = ST = TS$.

On note

- f l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à M .
- s l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à S .
- t l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à T .

Comme S et T commutent, les endomorphismes s et t commutent.

De plus, comme E_n est orthonormée directe, s est autoadjoint et t est une isométrie de déterminant 1.

Par le théorème spectral, en notant $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_s$ les valeurs propres de s , on a $E_n = \bigoplus_{i=1}^{s \perp} \text{Ker}(s - \lambda_i \cdot \text{id}_{E_n})$.

Comme t commute avec s , $K_i = \text{Ker}(s - \lambda_i \cdot \text{id}_{E_n})$ est stable par t et on peut définir t_i l'endomorphisme de K_i induit par t .

On sait que t_i est encore une isométrie, donc sa matrice T_i dans une base orthonormée est orthogonale. Donc, T_i vérifie (C_2) et par conséquent vérifie (C_4) .

Donc, il existe une base de K_i dans laquelle la matrice T'_i de t_i est diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille $(1,1)$,
- soit de taille $(2,2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

En concaténant les bases $\mathcal{B}_i$, on obtient une base orthonormée de $E_n = \bigoplus_{i=1}^{s \perp} \text{Ker}(s - \lambda_i \cdot \text{id}_{E_n})$ dans laquelle la matrice de t est diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille $(1,1)$,
- soit de taille $(2,2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus, dans cette base, la matrice de s est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

Donc, la matrice N de $f = s \circ t$ dans cette base est diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille $(1,1)$,
- soit de taille $(2,2)$ du type $r'R(\theta')$, où $(r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Comme $\det(f) = \det(s)\det(t) = \det(s) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_s \neq 0$, les blocs de taille $(1, 1)$ de N sont non nuls.

Supposons qu'il existe un bloc $(1, 1)$ dont le coefficient λ est strictement négatif. Quitte à réorganiser les vecteurs de $\mathcal{B}$, comme la multiplicité des valeurs propres négatives est paire, on peut supposer que bloc $(1, 1)$ suivant est aussi λ . De plus,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\lambda R(\pi).$$

Donc, N est diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Par la question précédente, $N \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$. Autrement dit, $N = \text{Exp}(A)$ où $A \in \mathcal{E}_n$.

De plus, M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases orthonormées différentes, donc, M est ORTS à N . Donc, $M = QNQ^\top$ où $Q \in \mathcal{O}_n$.

Donc,

$$M = QNQ^\top = Q \text{Exp}(A)Q^\top = \text{Exp}(QAQ^\top).$$

D'autre part, $QAQ^\top(QAQ^\top)^\top = QAA^\top Q^\top = QA^\top A Q^\top = (QAQ^\top)^\top QAQ^\top$.

Donc, $B = QAQ^\top \in E_n$.

Donc, $M \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

Ainsi, par double inclusion

$$\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n.$$

Q34. On remarque que $B \in \mathcal{O}_n$ (ses colonnes sont orthonormées) et (développer par rapport à la première ligne) :

$$\chi_B = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right).$$

- Si n est pair, alors B admet -1 comme valeur propre de multiplicité 1, impaire, donc $B \notin \mathcal{F}_n$.
- Si n est impair, alors B n'admet pas de valeur propre négative et appartient à $\mathcal{SO}_n$, donc, en notant $S = I_n$ et $T = B$, on a : $B = ST = TS$. Donc, $B \in \mathcal{F}_n$.