

Cours de BCPST 1ère Année

Tristan Poullaouec

Année 2025-26

Table des matières

Table des matières	i
I – Équations et inéquations	1
1/ Règles de calcul	1
2/ Résolution d'équations	3
3/ Ordre et opérations	6
4/ Résolution d'inéquations	7
II – Trigonométrie	9
1/ Le cercle trigonométrique	9
2/ Formules de trigonométrie	9
3/ Équations trigonométriques	11
III – Le langage mathématique	13
1/ Notions de logique	13
2/ L'art de la démonstration	15
IV – Calculs de limites et de dérivées	17
1/ Calculs de limites	17
2/ Calculs de dérivées	21
3/ Relations de comparaison	23
V – Ensembles et applications	25
1/ Théorie des ensembles	25
2/ Applications	28
3/ Application réciproque	30
VI – Les nombres complexes	33
1/ Définitions et propriétés algébriques	33
2/ Argument et exponentielle complexe	36
3/ Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$	39
VII – Généralités sur les fonctions réelles	41
1/ Définitions et premières propriétés	41
2/ Opérations sur les fonctions	43
3/ Sens de variation	43
4/ Fonctions bornées	44

VIII – Études de fonctions	45
1/ Éléments de symétrie	45
2/ Limites et asymptotes	46
3/ Applications de la dérivation	47
4/ Plan d'étude d'une fonction	48
IX – Calcul intégral	49
1/ Définitions et propriétés fondamentales	49
2/ Primitive d'une fonction continue	51
3/ Calcul des intégrales	52
4/ Applications	54
X – Équations différentielles	55
1/ Généralités	55
2/ Les équations différentielles linéaires du premier ordre	56
3/ Les équations linéaires du second ordre	58
XI – Autour de la récurrence	61
1/ Les entiers naturels	61
2/ Les suites récurrentes	63
XII – Ensembles finis et dénombrement	67
1/ Le symbole somme	67
2/ Les ensembles finis	70
3/ Le dénombrement	71
XIII – Systèmes linéaires	75
1/ Généralités	75
2/ Échelonnement et pivot de Gauss	76
3/ Ensemble des solutions d'un système linéaire	77
XIV – Géométrie du plan et de l'espace	79
1/ Rappels	79
2/ Repérage dans le plan et dans l'espace	80
3/ Produit scalaire de deux vecteurs	82
4/ Déterminant de deux vecteurs du plan	83
5/ Droites et cercles du plan	84
6/ Droites et plans de l'espace	87
XV – Les statistiques descriptives	91
1/ Généralités	91
2/ Statistiques univariées	92
3/ Statistiques bivariées	97
XVI – Les polynômes réels	101
1/ Les fonctions polynomiales	101
2/ Racines d'un polynôme	103

XVII – Les développements limités	105
1/ Définition et premières propriétés	105
2/ Opérations sur les DL	107
3/ Applications des développements limités	108
XVIII – Fonctions usuelles	109
1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière	109
2/ Logarithme népérien et exponentielle	109
3/ Puissances réelles	111
4/ Les fonctions circulaires	113
XIX – Les matrices	117
1/ Espaces de matrices	117
2/ Opérations sur les matrices	119
3/ Application aux systèmes linéaires	120
4/ Les matrices inversibles	122
XX – Nombres et suites réels	123
1/ Autour de la relation d'ordre	123
2/ Généralités sur les suites	124
3/ Limite d'une suite	126
4/ Opérations sur les limites	127
5/ Comparaisons de suites	128
6/ Les suites monotones	129
XXI – Limites et continuité	131
1/ Étude locale d'une fonction	131
2/ Propriétés des limites	132
3/ Continuité	133
XXII – Dérivabilité	137
1/ Dérivée en un point et fonction dérivée	137
2/ Opérations sur les fonctions dérivables	138
3/ Dérivées successives	139
4/ Propriétés des fonctions dérivables	140
XXIII – Les espaces vectoriels	143
1/ Structure vectorielle de $\mathbb{K}^n$	143
2/ Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$	144
3/ Familles finies de vecteurs	145
4/ Dimension d'un espace vectoriel	147
XXIV – Les applications linéaires	149
1/ Définitions et premières propriétés	149
2/ Noyaux et images	150
3/ Applications linéaires en dimension finie	151
4/ Matrice d'une applications linéaire	152
5/ Rang d'une matrice	154

XXV – Probabilités sur un univers fini	155
1/ Généralités	155
2/ Calculs de probabilités	156
3/ Conditionnement et indépendance	158
XXVI – Variables aléatoires et lois usuelles	161
1/ Variables aléatoires	161
2/ Espérance et variance	163
3/ Lois usuelles	166
XXVII – Fonctions de deux variables	169
1/ Généralités	169
2/ Limites et continuité	171
3/ Dérivées partielles du premier ordre	172
4/ Dérivées partielles du second ordre	174

I – Équations et inéquations

1/ Règles de calcul

Rappels fondamentaux :

- soustraire revient à additionner l'opposé ;
- diviser revient à multiplier par l'inverse.

1.1) Factorisations et développements

Proposition (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

Soient a, b et c trois réels. Alors $a(b + c) = ab + ac$.

Cette relation va permettre de :

- développer des expressions algébriques afin de les simplifier
- factoriser une expression afin de résoudre une équation ou étudier un signe.

Corollaire (identités remarquables)

Pour tous les réels a et b ,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarque : en pratique, la dernière relation sera la plus utile.

1.2) Quotients

Proposition

Soient a, b, c et d des réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a les relations suivantes :

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$1 \div \frac{b}{d} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{a}{b} = c \iff a = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

Remarque : les deux dernières relations, souvent qualifiées de **produit en croix**, sont essentielles pour résoudre des équations comportant des quotients.

1.3) Puissances

Proposition

Soient a et b des réels non nuls, p et q des entiers relatifs. On a alors :

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$a^p b^p = (ab)^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Remarque : pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose par convention $a^0 = 1$.

Exemple : simplifier les nombres $\frac{12^5 \times 35^3}{8^4 \times 21^3}$ et $24^6 \times 125 \times 100^{-4}$.

1.4) La racine carrée

Définition

La racine carrée d'un réel **positif** a est **l'unique réel positif** dont le carré égale a .

On le note $\sqrt{a}$. Autrement dit, $x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

Remarque : attention, $(\sqrt{a})^2 = a$ pour tout $a \geq 0$ mais $\sqrt{a^2} \neq a$ lorsque $a < 0$.

Théorème

Soient a et b des réels positifs. Alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour $b > 0$.

La quantité conjuguée

Pour simplifier ou transformer une expression de la forme $a + b\sqrt{c}$ (où a , b et c sont des entiers), on va la multiplier par la *quantité conjuguée* $a - b\sqrt{c}$.

Exemple : simplifier $\frac{8}{3 + \sqrt{5}}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 + 1})$.

1.5) La valeur absolue

Définition Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ sinon : c'est la **valeur absolue** de x .

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$ et $|x| = \max(x, -x) = |-x|$.

Corollaire

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$.
- Pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, on a $|x| = |y| \iff x = \pm y$.

DÉMONSTRATION – en effet, $|x| = \pm x$ et $|x|^2 = x^2$, d'où $|x| = \sqrt{x^2}$ puisque $|x| \geq 0$. Pour résoudre l'équation, il suffit alors de passer au carré et de factoriser.

Proposition

Soient x et y deux réels. Alors :

$$|xy| = |x| \times |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

DÉMONSTRATION – utiliser la relation $|x|^2 = x^2$ pour se débarrasser des valeurs absolues.

1.6) La partie entière**Définition**

Soit $x \in \mathbb{R}$: le plus grand entier inférieur ou égal à x est appelé **la partie entière de x** .
On le note $\lfloor x \rfloor$. C'est de plus l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

Remarque : attention, ce n'est pas l'arrondi à l'entier le plus proche.

Proposition

Pour tout réel x , on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

2/ Résolution d'équations**2.1) Règles de manipulation****Proposition**

Quand on ajoute ou retranche un même réel aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a **exactement** les mêmes solutions que la première : on dit que alors les deux équations sont **équivalentes**.

Proposition

*Quand on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par un même réel **non nul**, on obtient une équation équivalente.*

Exemple : $3x + 4 = x + 10 \iff 2x = 6 \iff x = 3$.

2.2) Le produit nul**Théorème**

Un produit de deux facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des deux facteurs est nul. Autrement dit, $ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$

Remarques :

- Pour résoudre une équation compliquée, on cherchera à se ramener à un produit nul ; il faudra donc éviter de développer les expressions lorsque cela n'est pas nécessaire.
- Attention à ne pas multiplier ou diviser les membres d'une équation par une quantité dépendant de l'inconnue ; cela peut modifier l'ensemble des solutions.

Exemples : résoudre les équations $x^2 - 1 + 3(x + 1) = 0$ et $3x^4 + 3x^2 = 9x^3 + 9x$.

2.3) Application aux équations du second degré**Définition**

*Un **polynôme du second degré** est une fonction de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On appelle **équation du second degré** l'équation associée $P(x) = 0$.*

Exemple : résoudre les deux équations $x^2 + 6x + 5 = 0$ et $2x^2 + 8x - 1 = 0$ en reconnaissant le début du développement d'un carré.

Mise sous forme canonique (H-P)

Tout trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit sous **forme canonique**

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

où le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** du trinôme. On en déduit les résultats suivants :

- La courbe de P dans un repère orthogonal est une parabole de sommet $S \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right)$.
- Si $a > 0$, la fonction P est décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ et croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right[$.
- Si $a < 0$, la fonction P est croissante sur $\left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right[$.

On en déduit aussi le théorème suivant :

Théorème (racines et factorisation d'un trinôme)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racines réelles.

- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$

De plus, on a $P(x) = a(x - x_0)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : lorsque $\Delta = 0$, le dernier cas se ramène en fait au deuxième puisque l'on a alors $x_1 = x_2 = x_0$. On dit pour cela que x_0 est une **racine double** du polynôme P .

Corollaire (relations entre coefficients et racines)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré de discriminant positif et de racines x_1 et x_2 (elle peuvent être identiques). Alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Remarque : ceci est très utile lorsque le polynôme possède une racine « évidente ».

Corollaire (signe d'un trinôme)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré de discriminant Δ .

- Si $\Delta \leq 0$, alors P reste du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta > 0$, alors P est du signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe opposé à l'intérieur.

Remarque : on retrouvera ce résultat (et les précédents) sur la représentation graphique du trinôme. Il y a six cas distincts, selon le signe de a et la valeur de Δ (les représenter).

3/ Ordre et opérations

3.1) Relation d'ordre

Définition Soient x et y deux réels. Lorsque le nombre réel $y - x$ est positif, on dit alors que x est inférieur ou égal à y , ce qui se note $x \leq y$.

3.2) Compatibilité avec les opérations

Proposition

Soient x, y et z trois réels.

- Si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
- Si $x \leq y$ et $z \geq 0$, alors $xz \leq yz$.
- Si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors $xz \geq yz$.

DÉMONSTRATION – on revient à la définition $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

Corollaire

Soient a, b, c et d des réels.

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Proposition (passage au carré)

Soient a et b des réels.

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq a^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq b \leq 0$, alors $0 \leq b^2 \leq a^2$.

Remarque : attention, on ne peut rien dire quand a et b sont de signes opposés.

Proposition (passage à l'inverse)

Soient a et b des réels non nuls **de même signe**. Si $a \leq b$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Remarque : quand a et b sont de signes opposés, le résultat est évident ...

Proposition (passage à la racine carrée)

Soient a et b des réels **positifs**. Si $a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

3.3) Ordre et valeur absolue

Définition Soient x et y deux réels. On appelle **distance entre x et y** le réel $d(x, y) = |x - y|$.

Remarque : c'est la distance entre les points de la droite réelle associés aux nombres x et y . On en déduit graphiquement la propriété suivante :

Proposition (résolution d'inéquations)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On a :

$$|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k$$

et

$$|x| \geq k \iff (x \geq k \text{ ou } x \leq -k)$$

4/ Résolution d'inéquations

4.1) Règles de manipulation

Elles ont été vues dans la section « Compatibilité avec les opérations ». Résumons-les.

Proposition

- On obtient une nouvelle inéquation équivalente quand :
 - on ajoute un même réel aux deux membres d'une inéquation
 - on multiplie les deux membres d'une inéquation par un réel **strictement positif**
- Si l'on multiplie par contre les deux membres d'une inéquation par un réel **strictement négatif**, il faudra changer le sens de l'inégalité pour obtenir une inéquation équivalente.

Exemples : $x + 5 \geq 0 \iff x \geq -5$ et $-2x \leq 6 \iff x \geq -3$.

4.2) Signe d'un produit ou d'un quotient

Pour résoudre des inéquations compliquées ou établir des encadrements d'expressions un peu tordues, on se ramènera après factorisation à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient. On utilise alors un tableau de signe pour conclure.

Exemple : résoudre les inéquations $(x + 2)(2x + 1) \leq 5(x + 2)$ et $\frac{x + 3}{x - 8} \geq 2$.

II – Trigonométrie

1/ Le cercle trigonométrique

Définition On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.
On le note $\mathbb{U} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Remarque : il existe deux sens de parcours de $\mathbb{U}$, le sens trigonométrique et le sens horaire.

Définition Une **abscisse curviligne** d'un point $M \in \mathbb{U}$ est un réel dont le signe donne le sens de déplacement de I(1; 0) à M et la valeur absolue une longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.

Remarque : tout point de $\mathbb{U}$ admet une infinité d'abscisses curvilignes, définies à 2π près. C'est pourquoi on les notera $x = \theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ou encore $x \equiv \theta [2\pi]$.

Définition Soit α un réel. On considère le point M de $\mathbb{U}$ d'abscisse curviligne α .

- L'abscisse de M est appelée le **cosinus du réel α** et notée $\cos(\alpha)$.
- L'ordonnée de M est appelée le **sinus du réel α** et notée $\sin(\alpha)$.
- Si $\cos(\alpha) \neq 0$, on note T l'intersection de (OM) et de la droite d'équation $x = 1$. L'ordonnée de ce point T est appelée la **tangente du réel α** et notée $\tan(\alpha)$.

Remarque : ceci permet de retrouver graphiquement les diverses propriétés des fonctions trigonométriques (valeurs remarquables, variations, périodicité, parité et symétries).

2/ Formules de trigonométrie

2.1) Relation fondamentale

Théorème

Pour tous réels x et y , on a $x^2 + y^2 = 1$ si, et seulement si, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$. En particulier, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ pour tout réel θ .

Corollaire

Pour tout réel $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on a $1 + \tan^2 \varphi = 1 / \cos^2 \varphi$.

2.2) Périodicités et symétries

Pour tous réels $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\begin{aligned}\sin(\theta + 2\pi) &= \sin \theta \\ \cos(\theta + 2\pi) &= \cos \theta \\ \tan(\varphi + 2\pi) &= \tan \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= 1/\tan \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\varphi) &= -\tan \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(\pi - \varphi) &= -\tan \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta \\ \tan(\varphi + \pi) &= \tan \varphi\end{aligned}$$

Exemple : déterminer $\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$.

2.3) Formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

Exemples : trouver le sinus, le cosinus et la tangente de $\pi/8$ et $\pi/12$.

Les formules de factorisation (H-P)

Soient p et q deux réels. En écrivant $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$, puis en utilisant les formules d'addition, on obtient les formules de factorisation suivantes :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

qui permettent de résoudre d'infâmes équations et inéquations trigonométriques.

Exemple : mettre sous forme factorisée l'équation $\cos(x) + \cos(3x) = \sin(2x)$.

3/ Équations trigonométriques

3.1) Résolution d'équations simples

Théorème

Pour tout réel θ , on a :

- $\cos(x) = \cos(\theta)$ si, et seulement si, $x = \theta + 2k\pi$ ou $x = -\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(\theta)$ si, et seulement si, $x = \theta + 2k\pi$ ou $x = \pi - \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan(x) = \tan(\theta)$ si, et seulement si, $x = \theta + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : dans le dernier cas, il faut que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) pour que $\tan(\theta)$ existe.

3.2) Arccosinus, arcsinus et arctangente

On reviendra plus tard sur la définition et les propriétés de ces trois fonctions réciproques. En attendant, voici ce qu'il faut savoir pour éviter de raconter trop d'âneries !

Proposition

La fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et atteint toutes les valeurs de $[-1; 1]$ une seule fois. Pour tout $t \in [-1; 1]$, on note $\arccos(t)$ l'unique solution dans l'intervalle $[0; \pi]$ de l'équation $\cos x = t$.

Exemples : on a $\arccos(0,5) = \frac{\pi}{3}$ mais $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition

La fonction $\sin$ est strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et atteint toutes les valeurs de $[-1; 1]$ une seule fois. Pour tout $t \in [-1; 1]$, on note $\arcsin(t)$ l'unique solution dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$ de l'équation $\sin x = t$.

Exemples : on a ainsi $\arcsin(0,5) = \frac{\pi}{6}$ mais $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

Proposition

La fonction $\tan$ est strictement croissante sur $]-\pi/2; \pi/2[$ et atteint toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ une seule fois. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(t)$ l'unique solution dans l'intervalle $]-\pi/2; \pi/2[$ de l'équation $\tan x = t$.

Exemple : calculer $\arctan(1)$ et $\arctan(-1)$.

3.3) Factorisation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

Des expressions de cette forme se rencontrent en électronique, par exemple. Pour déterminer l'amplitude et la phase du signal résultant, on a besoin de factoriser l'expression.

Proposition

Soient a et b deux réels non nuls. On note φ un réel vérifiant les relations $\cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\sin \varphi = b / \sqrt{a^2 + b^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

Exemple : résoudre les équations $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ et $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{6} \sin x + \sqrt{3} = 0$.

III – Le langage mathématique

1/ Notions de logique

1.1) Propositions, assertions

Définition *On appelle **proposition** ou **assertion** un énoncé pouvant être soit vrai, soit faux.*

Exemples :

- L'assertion P_1 : « $1 > 2$ » est fausse.
- L'assertion P_2 : « tous les triangles équilatéraux sont isocèles » est vraie.
- L'énoncé P_3 : « Il n'existe pas de nombre x tel que $x^2 = -1$ » n'est pas une assertion. En effet, il n'est pas assez précis pour que l'on puisse trancher.

Définition *On dira que deux assertions P et Q sont **équivalentes** si elles sont toujours soit simultanément vraies, soit simultanément fausses. On note alors $P \iff Q$.*

Exemple : pour tout réel x , on a $2x = 2 \iff x = 1$!

Remarque : ainsi, ce symbole « équivalence » s'utilisera entre des équations, des inéquations ou des phrases, mais **jamais entre des nombres ou des expressions algébriques**.

1.2) Connecteurs élémentaires

On peut, à partir d'assertions, en fabriquer de nouvelles à l'aide de connecteurs logiques. Soient donc P et Q deux assertions.

Définition *« **NON P** » est l'assertion qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.*

Exemples : donner les négations des assertions précédentes.

Proposition

Les assertions P et $\text{NON}(\text{NON } P)$ sont équivalentes.

Définition *« **P ET Q** » est l'assertion qui est vraie lorsque les deux assertions sont simultanément vraies, et fausse sinon.*

Définition « $P \text{ OU } Q$ » est l'assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Remarque : si P et Q sont simultanément vraie, $P \text{ OU } Q$ est encore vraie.

Les valeurs prises par ces nouvelles assertions se résument dans des *tables de vérité*, que l'on pourra utiliser pour démontrer les propositions énoncées dans la suite du cours.

P	NON P	NON (NON P)
V	F	V
F	V	F

P	Q	$P \text{ ET } Q$	$P \text{ OU } Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

1.3) Implications et équivalences

Définition « $P \implies Q$ » est l'assertion qui est vraie lorsque Q est vraie dès que P l'est.

Attention, c'est une notion très délicate : ainsi, $P \implies Q$ est vraie dès que P est fausse. Le plus simple est de garder en tête le cas où l'implication est fausse : cela se produit lorsque P est vraie et Q est fausse puisque c'est le seul cas contredisant la définition. Par conséquent, $P \implies Q$ est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie.

Remarques :

- ❶ On dira que Q est une **condition nécessaire** pour P .
- ❷ On dira également que P est une **condition suffisante** pour Q .
- ❸ Si P est fausse ou si Q est vraie, l'assertion « $P \implies Q$ » est toujours vraie. Par exemple, « Les éléphants roses ont des ailes » et « S'il fait beau, les triangles ont trois côtés ».

Définition « $P \iff Q$ » est l'assertion qui est vraie lorsque les assertions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Proposition

- Les assertions « $P \implies Q$ » et « $(\text{NON } P) \text{ OU } Q$ » sont équivalentes.
- Les assertions « $P \iff Q$ » et « $(P \implies Q) \text{ ET } (Q \implies P)$ » sont équivalentes.

2/ L'art de la démonstration

2.1) Règles logiques

Proposition (règles de simplification)

Soit P une assertion. Alors :

- $P \text{ ET } (\text{NON } P)$ équivaut à FAUX
- $P \text{ OU } (\text{NON } P)$ équivaut à VRAI.
- $P \text{ OU VRAI}$ équivaut à VRAI.
- $P \text{ OU FAUX}$ équivaut à P .
- $P \text{ ET VRAI}$ équivaut à P .
- $P \text{ ET FAUX}$ équivaut à FAUX.

Proposition (associativité et distributivité)

Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

- $(P \text{ ET } Q) \text{ ET } R$ équivaut à $P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)$.
- $(P \text{ OU } Q) \text{ OU } R$ équivaut à $P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)$.
- $P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)$ équivaut à $(P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$.
- $P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)$ équivaut à $(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)$.

Remarques :

- ❶ Les deux premières propriétés sont les **associativités** de la conjonction et de la disjonction ; elles montrent que les parenthèses sont superflues. Les deux suivantes sont les **distributivités** de la conjonction par rapport à la disjonction, et réciproquement.
- ❷ Les assertions « $P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)$ » et « $(P \text{ ET } Q) \text{ OU } R$ » ne sont pas équivalentes. Attention à la position des parenthèses dans de tels cas.

Proposition (règles de négation)

Soient P et Q deux assertions. Alors :

- $\text{NON } (P \text{ ET } Q)$ équivaut à $(\text{NON } P) \text{ OU } (\text{NON } Q)$
- $\text{NON } (P \text{ OU } Q)$ équivaut à $(\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q)$
- $\text{NON } (P \implies Q)$ équivaut à $P \text{ ET } (\text{NON } Q)$
- $\text{NON } (P \iff Q)$ équivaut à $(P \text{ ET } (\text{NON } Q)) \text{ OU } (Q \text{ ET } (\text{NON } P))$

DÉMONSTRATION – tables de vérité pour les deux premiers points ; les autres s'en déduisent.

Proposition (implications et équivalences)

Soient P , Q et R trois assertions. Alors :

- $P \implies Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse.
- $P \implies Q$ équivaut à $(\text{NON } Q) \implies (\text{NON } P)$. C'est la **contraposition**.
- $P \iff Q$ équivaut à $(\text{NON } P) \iff (\text{NON } Q)$.
- Si $P \implies Q$ et $Q \implies R$ alors $P \implies R$.

DÉMONSTRATION – utilisation des définition et caractérisation de l'implication.

2.2) Schémas classiques

La plupart des démonstrations suivent les mêmes schémas.

Voici une liste (à peu près exhaustive) de ceux que l'on croquera :

- **Démontrer « A ET B »**

Montrer l'assertion A et l'assertion B, l'ordre n'ayant aucune importance.

- **Démontrer « A OU B »**

Montrer que l'une (au moins) des assertions est vraie. Par exemple, on suppose que A est fausse et on en déduit que B est nécessairement vraie.

- **Démontrer « $A \implies B$ »**

Supposer que A est vraie. Montrer que B est vraie.

- **Démontrer « $A \implies B$ » par contraposée**

Supposer que B est fausse. Montrer que A est fausse.

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

- **Démontrer B sachant que « $A \implies B$ »**

Montrer que A est vraie.

- **Démontrer C sachant que « $A \implies C$ » et « $B \implies C$ »**

Montrer que « A OU B » est vraie.

Exemple : soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il est impossible d'avoir $n^2 = 4k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$, en distinguant les cas A « n est pair » et B « n est impair ».

- **Démontrer « $A \iff B$ »**

Montrer que « $A \implies B$ » et « $B \implies A$ ».

- **Démontrer A par l'absurde.**

Supposer que A est fausse. Dédire une contradiction avec les hypothèses de départ.

Exemple : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

IV – Calculs de limites et de dérivées

1/ Calculs de limites

Dans toute cette section, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a est un point ou une borne (finie ou non) de I . On dira alors que f est **définie au voisinage de a** .

1.1) Notion de limite

Définition (intuitive)

- On dit que x tend vers $a \in \mathbb{R}$ si les valeurs prises par x sont aussi proches de a qu'on le désire.
 - On dit que x tend vers $+\infty$ si les valeurs prises par x sont aussi grandes qu'on le désire.
 - On dit que x tend vers $-\infty$ si les valeurs prises par x sont aussi petites qu'on le désire.
- Soit alors $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a .

Exemples : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Définition

- La **limite à gauche de f en a** est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et que $x < a$.
On la note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou encore $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- La **limite à droite de f en a** est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et que $x > a$.
On la note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou encore $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Exemples : on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque : si une fonction est seulement définie sur $]a; +\infty[$ ou $] -\infty; a[$, il est inutile de préciser que l'on étudie sa limite à gauche / à droite en a car il n'y a aucune ambiguïté.

1.2) Limites usuelles

On suppose dans cette sous-section que $a \in I$: la fonction f est donc définie en a .

Théorème (limite en un point a du domaine de définition)

Si la fonction f est composée de fonctions usuelles, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple : étudier les limites de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ en -4 et en 5 .

Proposition (prolongement en un point)

Soit g une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)$.

Exemple : étudier $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Théorème (limites aux bornes du domaine de définition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- Si n est pair, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- Si n est impair, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

1.3) Opérations algébriques

Les résultats suivants, qui prouvent l'existence de limites et permettent de les calculer, concernent indifféremment des limites en un réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

(a) Limite d'une somme

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Forme indéterminée : « $\infty - \infty$ » comme dans $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

(b) Limite d'un produit

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim fg$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Forme indéterminée : « $0 \times \infty$ » comme dans $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(x)$.

(c) Limite d'un inverse

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim 1/f$	$1/\ell$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Forme semi-indéterminée : « $\frac{1}{0}$ » comme dans $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$

(d) Limite d'un quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-
$\lim f/g$	ℓ/ℓ'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Formes indéterminées : « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ » comme dans $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$

1.4) Techniques d'étude des formes indéterminées

Forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

On essaye de factoriser par le plus gros terme (idéalement, une puissance) de la somme.

Forme indéterminée « $1/0$ »

On détermine le signe du dénominateur.

Forme indéterminée « ∞/∞ »

On factorise *si possible* au numérateur et au dénominateur par les plus gros termes (des puissances induisant les limites infinies), que l'on simplifie ensuite.

Forme indéterminée « $0/0$ »

On procède de même, en factorisant par les termes provoquant les limites nulles.

Lorsque les formes indéterminées sont provoquées par des produits ou quotients de puissances et d'exponentielle ou de logarithme, on peut penser aux CROISSANCES COMPAREES !

Exemples : limites en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x^2 + 1}$, $\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ et $x^2 e^{-2x}$.

1.5) Théorèmes de comparaison

Théorème (de passage à la limite)

Soient f et g deux fonctions ayant des limites finies en a , et telles que $f \leq g$ au voisinage de a .
Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Théorème (des gendarmes)

Soient f , g et h des fonctions telles que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a .

On suppose en outre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Remarque : cette fois, le théorème permet de prouver l'existence d'une limite.

Corollaire Soient f , g deux fonctions et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $|f - \ell| \leq g$ au voisinage de a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemples : étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2}$.

Théorème (de minoration / de majoration)

Soient f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ au voisinage de a .

1) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

2) Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemple : étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \cos x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1.6) Composition des limites**Définition**

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ telles que $f(x) \in \mathcal{D}'$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

La fonction composée de f par g est la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ définie sur $\mathcal{D}$.

Exemple : pour $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Théorème

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, a un point ou une borne de I , b un point ou une borne de J , et ℓ un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. On considère deux fonctions f définie sur I , g définie sur J , telles que :

❶ $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$

❷ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

❸ $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$

Alors la fonction $g \circ f$ est définie sur I et $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.

Exemple : déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)$.

2/ Calculs de dérivées

2.1) Définition

Définition Soit $\mathcal{C}$ une courbe du plan. On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite (T) pour **tangente en** $A \in \mathcal{C}$ si les droites (AM), pour $M \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$, admettent la droite (T) pour position limite lorsque le point M tend vers A.

Lorsque $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I, alors $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ avec $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$. De ce fait, la droite (AM) a pour pente le réel $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que l'on appelle le **taux d'accroissement de f entre a et x** .

De plus, ce taux admet une limite finie quand x tend vers a si, et seulement si, (AM) admet une position limite oblique, la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Celle-ci est donc la droite passant par A et de coefficient directeur $\lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x)$. Ceci motive la définition qui suit.

Définition Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I.

- On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ lorsque la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **finie** en a , notée $f'(a)$: celle-ci s'appelle alors le **nombre dérivé en a** .
- On dit que f est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.

Notation : on écrit $f' = \frac{df}{dx}$ pour préciser la variable par rapport à laquelle on dérive.

Cas des fonctions de plusieurs variables

Une fonction f dépendant de deux variables x et y n'admet pas une dérivée, mais deux **dérivées partielles** par rapport à x et y notées respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple : calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto 5x^2 + 4xy - y^2$.

2.2) Dérivées usuelles

Théorème

Voici les expressions des dérivées des fonctions usuelles actuellement connues.
Faire attention aux ensembles de définition et de dérivabilité de ces fonctions.

$f(x)$	x^α	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$-\sin x$	$\cos x$	$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	e^x	$1/x$

Remarques :

- Les fonctions inverse et racine carrée sont des puissances particulières.
- La plupart des formes indéterminées « 0/0 » se ramènent à des calculs de dérivées.

Corollaire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

2.3) Opérations sur les dérivées

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, fg et kf sont dérivables sur l'intervalle I et l'on a

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(kf)' = kf'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $1/g$ et f/g sont dérivables sur I et

$$(1/g)' = -g'/g^2$$

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$$

2.4) Dérivées des composées

Théorème

Soient deux fonctions, f définie sur un intervalle I et g définie sur un intervalle J , telles que $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On suppose que f est dérivable en $a \in I$ et que g est dérivable en $f(a) \in J$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'[f(a)]$.

Remarque : si f est dérivable sur l'intervalle I et que g est dérivable sur l'intervalle J , alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Application à la recherche de primitives

Dans le cas d'une fonction un peu tordue, il faut souvent reconnaître une expression de la forme u'/u , $u' \times u^\alpha$ ou bien $u' \times (v' \circ u)$ afin de faire apparaître la dérivée d'une fonction composée.

Exemples : primitives de $f : x \mapsto \tan x$, $g : x \mapsto \ln x/x$ et $h : x \mapsto x e^{x^2+1}$.

3/ Relations de comparaison

Les fonctions f, g, h et k sont définies au voisinage de a , point ou borne d'un intervalle I .

3.1) Fonctions négligeables

Définition Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a .
Ceci se note $f = o_{x \rightarrow a}(g)$.

Résultats sur les puissances et croissances comparées

$x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta)$ pour $\alpha < \beta$	$x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$	$\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)$ pour $\alpha > 0$
$x^\beta = o_{x \rightarrow 0}(x^\alpha)$ pour $\alpha < \beta$		$\ln x = o_{x \rightarrow 0}(1/x^\alpha)$ pour $\alpha > 0$
$x^\alpha = o_{x \rightarrow -\infty}(x^\beta)$ pour $\alpha < \beta$	$e^x = o_{x \rightarrow -\infty}(x^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$	

Proposition (règles de manipulation)

- Si $f = o_{x \rightarrow a}(g)$ et $g = o_{x \rightarrow a}(h)$, alors $f = o_{x \rightarrow a}(h)$.
- Si $f = o_{x \rightarrow a}(h)$ et $g = o_{x \rightarrow a}(k)$, alors $fg = o_{x \rightarrow a}(hg) = o_{x \rightarrow a}(hk)$.
- Si $f = o_{x \rightarrow a}(h)$ et $g = o_{x \rightarrow a}(h)$, alors $(\alpha f + \beta g) = o_{x \rightarrow a}(h)$ pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème

Si $f = o_{x \rightarrow a}(g)$ et que g est bornée au voisinage de a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Exemple : $o_{x \rightarrow a}(1)$ est une fonction de limite nulle en a .

3.2) Fonctions équivalentes

Définition Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a .
Ceci se note $f \sim_{x \rightarrow a} g$.

Equivalents usuels

$\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$	$e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$	$\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$	$1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} x^2/2$
-----------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	---

Proposition (équivalent d'une somme)

Si $f = g + o_{x \rightarrow a}(g)$, alors $f \sim_{x \rightarrow a} g$.

Exemples : $5x^3 + 8x^2 - 17x + 4 \sim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3$ et $8x^2 - 37\sqrt{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 8x^2$.

Proposition (obtention d'équivalents)

Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} (x - a)f'(a)$.

Théorème (fondamental)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et que $f \sim_{x \rightarrow a} g$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemples : déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 8x^2 - 17x + 4)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 - 37\sqrt{x})$.

Remarque : la réciproque est fautive lorsque la limite est **nulle** ou **infinie**. C'est justement là que la notion d'équivalent apporte des renseignements supplémentaires. En effet, des équivalents simples permettent de comparer les vitesses de convergence ou de divergence.

Proposition (manipulation des équivalents)

- On a $f \sim_{x \rightarrow a} g \iff g \sim_{x \rightarrow a} f \iff f - g = o_{x \rightarrow a}(g) \iff f = g + o_{x \rightarrow a}(g)$
- Si $f \sim_{x \rightarrow a} g$ et $g \sim_{x \rightarrow a} h$, alors $f \sim_{x \rightarrow a} h$.
- Si $f \sim_{x \rightarrow a} h$ et $g \sim_{x \rightarrow a} k$, alors $fg \sim_{x \rightarrow a} hk$.
- Si $f \sim_{x \rightarrow a} g$ alors $f^\alpha \sim_{x \rightarrow a} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : on ne peut ni additionner ni composer les équivalents ! Si la tentation vous prend, il faudra y résister en utilisant des fonctions négligeables (cf. dernier paragraphe).

Attention, les notations $f(x) \sim 0$ ou $f(x) \sim +\infty$ n'ont aucun sens.

3.3) Application aux formes indéterminées**Théorème (essentiel)**

Si $f \sim_{x \rightarrow a} g$ alors $f = g + o_{x \rightarrow a}(g)$.

On peut dans ce cas **remplacer la fonction f par $g + o_{x \rightarrow a}(g)$** et utiliser les règles de manipulation précédentes afin de simplifier une expression dans laquelle elle intervient.

Exemples : (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^2 + 5x + 2}{4x - 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + \sin(3x)}{e^x - 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x}$

V – Ensembles et applications

1/ Théorie des ensembles

1.1) Notions de base

Définition *Un ensemble est une collection d'objets à laquelle un objet peut appartenir ou non.*

- On note « $x \in E$ » lorsque x appartient à l'ensemble E : c'est un **élément** de E .
- On note « $x \notin E$ » lorsque x n'appartient pas à l'ensemble E .
- On note $\emptyset$ l' **ensemble vide**, qui est dépourvu d'élément.
- On note enfin $\{x\}$ l'ensemble constitué du seul élément x .

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont des ensembles ; $-1 \notin \mathbb{N}$ mais $-1 \in \mathbb{Z}$; $2 \notin \{4\}$.

Définition

Soient E et F deux ensembles.

- On dit que F est une **partie de** E et l'on note $F \subset E$ si tout élément de F appartient à E .
- L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple : exposer la méthode pour prouver que $F \subset E$ dans le cas $E = \mathbb{Q}$ et $F = \mathbb{Z}$.

Proposition

Soient E , F et G des ensembles quelconques.

- $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.
- Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.
- $E = F$ si, et seulement si, ($E \subset F$ et $F \subset E$).

Exemple : on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Remarques :

- 1) Le dernier point donne la démarche pour montrer l'égalité de deux ensembles.
- 2) Attention à l'ensemble vide, qui peut vérifier toute propriété possible et imaginable puisqu'aucun élément ne pourra venir la contredire.

Ainsi, l'assertion « Tous les éléphants roses ont des ailes » est vraie.

De même pour « Les poules qui ont des dents crachent du feu ».

1.2) Opérations sur les ensembles

Définition Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . On définit les parties suivantes :

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ appelée **l'union de A et B**
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ appelée **l'intersection de A et B**
- $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$ appelée **le complémentaire de A**
- $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ appelée **le complémentaire de B dans A**

Remarque : l'ensemble $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ se lit aussi **A privé de B** .

Proposition

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E . On a les relations suivantes :

- $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Remarque : on retrouve les propriétés de la négation, de la conjonction et de la disjonction.

Proposition

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Alors :

- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
- $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.

Proposition

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$.

Définition Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien de A par B** est l'ensemble $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Lorsque $A = B$, on note $A \times A = A^2$.

Remarque : cette définition s'étend au produit de n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ via

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

et lorsque $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, on note $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$. Ses éléments sont des n -uplets ou encore des n -listes d'éléments de A .

1.3) Les quantificateurs

Définition Pour synthétiser les écritures, on utilise les symboles $\forall$ et $\exists$.

- « $\forall x \in E$ » se lit « Pour tout $x \in E$ »
- « $\exists x \in E$ » se lit « Il existe $x \in E$ »
- « $\exists ! x \in E$ » se lit « Il existe un unique $x \in E$ »

Exemples : l'assertion « $F \subset E$ » s'écrit « $\forall x \in F, x \in E$ »

« $\exists x_0 \in A, \forall a \in A, a \leq x_0$ » signifie que A admet un plus grand élément

Proposition

On ne peut pas intervertir deux quantificateurs distincts. Autrement dit,

$$\forall x \in A, \exists y \in B \dots \neq \exists y \in B, \forall x \in A \dots$$

Remarque : par contre, pas de souci en présence de quantificateurs identiques.

Exemple :

- L'assertion « $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m + n$ impair » est vraie.
- L'assertion « $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m + n$ impair » est fausse.

Définition Un prédicat sur un ensemble E est une assertion $P(x)$ dépendant d'une variable $x \in E$.

Exemple : pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $P(x) : « x^2 > 4 »$.

Proposition (négation des quantificateurs)

Soient E un ensemble et P un prédicat sur E .

- $NON(\forall x \in E, P(x))$ équivaut à $\exists x \in E, (NON P(x))$.
- $NON(\exists x \in E, P(x))$ équivaut à $\forall x \in E, (NON P(x))$.

Remarque : le premier point est le principe du raisonnement par contre-exemple.

Exemple : pour montrer que $F \not\subset E$, il suffit de trouver $x \in F$ tel que $x \notin E$.

2/ Applications

2.1) Notions de base

Définition Soient E et F deux ensembles. Définir **une application** u de E dans F , c'est associer à tout élément $x \in E$ un unique élément de F noté $u(x)$.

- L'ensemble E est appelé **l'ensemble de définition de u** .
- L'ensemble F est appelé **l'ensemble d'arrivée de u** .
- Pour tout élément $x \in E$, l'élément $u(x)$ est appelé **l'image de x par u** .
- Soit $y \in F$: tout $x \in E$ tel que $y = u(x)$ est appelé **un antécédent de y par u** .

Notation : on note alors $u : E \longrightarrow F, x \longmapsto u(x)$.

Exemple : lorsque $E = F$, l'application $u : x \longmapsto x$ se note Id_E et s'appelle **l'identité de E** .

Définition Soient E et F deux ensembles, et $u : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour toute partie A de E , l'application $u|_A : A \longrightarrow F, x \longmapsto u(x)$ est appelée **la restriction de u à A** .
- Toute application v définie sur un ensemble A contenant E et vérifiant $v|_E = u$ est appelée **un prolongement de u** .

Remarque : ces notions sont très utilisées lors des études de fonctions numériques (restriction à un ensemble de stricte monotonie ; prolongement aux bords du domaine de définition).

2.2) Image directe d'une partie

Définition Soient E et F deux ensembles, $u : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E . L'ensemble $u(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = u(x)\}$ est appelé **l'image directe de A par u** . C'est l'ensemble des images par u des éléments de A .

Exemple : prenons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$. On a $f([-1; 2]) = [0; 4]$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Caractérisation :

$$x \in u(A) \iff \exists a \in A, x = u(a)$$

2.3) Composition d'applications

Définition Soient E, F et G trois ensembles, $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composée de u par v** l'application $v \circ u : x \longmapsto v(u(x))$ de E dans G .

Remarque : l'ordre est ici primordial et $v \circ u \neq u \circ v$ en général ; d'ailleurs les ensembles de définition et d'arrivée de u et v risquent de poser problème.

2.4) Injectivité, surjectivité et bijectivité

Soient E, F deux ensembles et $u : E \longrightarrow F$ une application.

Définition *On dit que u est injective si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par u , c'est-à-dire que u ne prend jamais deux fois la même valeur.*

Remarque : toute fonction numérique strictement monotone est injective ; on peut ainsi rendre toute fonction injective en restreignant son ensemble de définition.

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'application u est injective.*
- (ii) *Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au plus une solution $x \in E$.*
- (iii) *Pour tous $(x_1, x_2) \in E^2$, on a $u(x_1) = u(x_2) \implies x_1 = x_2$.*

Définition *On dit que u est surjective si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par u , c'est-à-dire que u atteint toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée.*

Remarque : pour rendre une application u surjective, il suffit de prendre comme ensemble d'arrivée l'image directe par u de l'ensemble de départ.

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'application u est surjective.*
- (ii) *Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au moins une solution $x \in E$.*
- (iii) *On a $u(E) = F$.*

Définition *On dit que u est bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'application u est bijective.*
- (ii) *Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède exactement une solution $x \in E$.*
- (iii) *Tout élément de F admet **exactement** un antécédent par u .*

Exemple : l'application $\cos$ définit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$.

3/ Application réciproque

3.1) Définition et premières propriétés

Définition

Soit u une bijection de E dans F .

- L'application qui, à tout élément de F , associe son unique antécédent par u dans E s'appelle **l'application réciproque de u** . On la note u^{-1} .
- Pour tout couple $(x, y) \in E \times F$, on a donc $y = u(x) \iff x = u^{-1}(y)$.

Exemple : mq $f : x \mapsto 4 + \frac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]4; +\infty[$ et déterminer f^{-1} .

Proposition

Soient E et F deux ensembles, et u une bijection de E dans F .

Alors $u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$ et $u \circ u^{-1} = \text{Id}_F$.

DÉMONSTRATION – par définition, l'application u^{-1} associe à tout élément de F son unique antécédent par u dans E . Ainsi, pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $u(u^{-1}(y)) = y$ et $u^{-1}(u(x)) = x$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles, $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $v \circ u = \text{Id}_E$ et $u \circ v = \text{Id}_F$. Alors u est une bijection et $v = u^{-1}$.

DÉMONSTRATION

- Soit $y \in F$: on a $u(v(y)) = y$ donc $v(y)$ est un antécédent de y par u .
 - Soit $z \in E$ un antécédent de y par u : alors $y = u(z)$ donc $v(y) = v(u(z)) = z$.
- Ainsi $v(y)$ est l'unique antécédent de y par u , donc u est une bijection et $v = u^{-1}$.

Corollaire

Si u est bijection de E dans F , alors u^{-1} est une bijection de F dans E et $(u^{-1})^{-1} = u$.

DÉMONSTRATION – on applique le résultat précédent à u^{-1} .

Proposition

Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux bijections. Alors $v \circ u$ est une bijection de E dans G et sa réciproque est $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

DÉMONSTRATION – vérifier que $(v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) = \text{Id}_G$ et que $(u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) = \text{Id}_E$.

3.2) Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition On dit qu'une fonction f est **continue** sur I si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in I$.

Remarque : c'est le cas des fonctions usuelles et de leurs composées diverses.

Théorème (de la bijection continue)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- 1) f est continue sur I ;
- 2) f est strictement monotone sur I ;

Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus, f^{-1} a le même sens de variation.

Exemple : existence des fonctions arccos, arcsin et arctan.

Remarque : les bornes de $f(I)$ sont les limites de f aux bornes de I . En fait, un tableau de variations complet fournira *a priori* tous les renseignements utiles et permettra de débusquer les bijections (quitte à restreindre les ensembles de départ et d'arrivée si besoin).

Proposition

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème : c'est donc une bijection. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

DÉMONSTRATION – en effet, on a pour tout couple $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (x \in I \text{ et } y = f(x)) \iff (y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)) \iff M'(y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$

ce qui mène au résultat puisque M et M' sont symétriques par rapport à Δ .

Exemples : les courbes des fonctions carré et racine carrée.

Proposition

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème. On suppose qu'elle est dérivable et que f' ne s'annule jamais sur I . Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

PREUVE – comme f est dérivable, sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes en tout point, qui ne sont jamais horizontales puisque $f' \neq 0$. Par symétrie, la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet des tangentes en tout point, qui ne sont jamais verticales. Ceci prouve que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$. Il suffit ensuite de dériver la relation $f(f^{-1}(x)) = x$ pour obtenir l'expression de $(f^{-1})'$.

Exemples : dérivées des fonctions exp, racine carrée et arctan.

Un exemple incontournable : la fonction arctan

Considérons la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

❶ C'est une fonction continue, comme quotient des deux fonction continues $\sin$ et $\cos$.

❷ Elle est dérivable et $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 > 0$.

De ce fait, elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

❸ Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

Par conséquent, $\tan$ définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet ainsi une réciproque, la fonction $\arctan$, qui est définie sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Elle apparaît fréquemment en calcul intégral, d'où la nécessité de la connaître.

VI – Les nombres complexes

1/ Définitions et propriétés algébriques

1.1) Généralités

Théorème (admis)

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et appelé **corps des nombres complexes** tel que :

- $\mathbb{C}$ est pourvu d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$ et vérifiant exactement les mêmes règles de calcul.
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i qui vérifie $i^2 = -1$.
- Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, calculer $(a + ib) + (c + id)$, $(a + ib) \times (c + id)$ et $1/(a + ib)$.

Corollaire

Pour tous x, y, a et $b \in \mathbb{R}$, on a : $x + iy = a + ib \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Définition

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + ib$.

- L'écriture $z = a + ib$ s'appelle **la forme algébrique** du complexe z .
- Le réel a est **la partie réelle de z** et se note $a = \operatorname{Re}(z)$.
- Le réel b est **la partie imaginaire de z** et se note $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarques :

- 1) L'ensemble des réels est $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$.
- 2) On note $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ l'ensemble des **imaginaires purs**.

Proposition (linéarité des parties réelle et imaginaire)

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z_1) = \lambda \operatorname{Re}(z_1)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda z_1) = \lambda \operatorname{Im}(z_1)$$

PREUVE – cela découle de l'unicité de la forme algébrique d'un complexe.

1.2) Interprétation géométrique

Dans toute la suite, le plan euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Définition Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

- Le point M est appelé **l'image du complexe z** . On le note $M(z)$.
- Le complexe z est appelé **l'afixe du point M** .

Remarque : l'application $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, $M(x, y) \mapsto z = x + iy$ est en fait une bijection, qui permet d'identifier le corps $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathcal{P}$. Quand on utilise les affixes pour repérer les points du plan, on parle du **plan complexe** et l'on note les axes de coordonnées $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.

Définition Tout vecteur $\vec{V}(a, b)$ du plan complexe est associé à son affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
On le note alors $\vec{V}(z)$.

Proposition (opérations sur les vecteurs)

- Soient $A(z_a)$ et $B(z_b)$ deux points du plan complexe. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_b - z_a$.
- Soient $\vec{u}(z_u)$ et $\vec{v}(z_v)$ deux vecteurs du plan complexe, et k un réel.
Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $k\vec{u}$ ont pour affixes respectives $z_u + z_v$ et kz_u .

PREUVE – c'est tout simplement la traduction complexe des opérations sur les coordonnées.

1.3) La conjugaison

Définition Soit le nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **conjugué de z** le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition (interprétation géométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points $M(z)$ et $M(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème (compatibilité avec les opérations)

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ si } z_2 \neq 0$$

Remarque : en particulier, $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ pour tout réel λ .

On peut également exprimer les parties réelle et imaginaire à l'aide du conjugué, ce qui permet de retrouver leurs diverses règles de calcul et propriétés.

Proposition

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\overline{z}} = z$ et

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$$

1.4) Le module

Définition Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un complexe.

On appelle alors **module de z** le réel positif $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque : dans le cas où $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve bien la formule bien connue $\sqrt{x^2} = |x|$.

Proposition (interprétation géométrique)

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ dans le plan complexe. Alors $|z| = OM$.

Proposition (normes et distances)

• Soit $\vec{V}(z)$ un vecteur du plan complexe. Alors $\|\vec{V}\| = |z|$.

• Soient $A(z_a)$ et $B(z_b)$ deux points du plan complexe. Alors $AB = |z_b - z_a|$.

Exemples : 1) le cercle de centre $A(a)$ et de rayon $r \geq 0$ est $\{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - a| = r\}$.

2) déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z + 2| = |z - i|$.

Proposition

Pour tout nombre complexe z , on a :

• $|z| = |\overline{z}|$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.

• $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

DÉMONSTRATION – en utilisant $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$... ou l'interprétation géométrique.

Proposition

Pour tout nombre complexe z non nul, on a $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $|z| = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$.

DÉMONSTRATION – on utilise cette fois-ci la relation $|z|^2 = z\overline{z}$.

Théorème (multiplicativité des modules)

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0$$

DÉMONSTRATION – soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- On a $|z_1 \times z_2| = \sqrt{z_1 \times z_2 \times \overline{z_1 \times z_2}} = \sqrt{z_1 \times \overline{z_1} \times z_2 \times \overline{z_2}} = \sqrt{|z_1|^2 \times |z_2|^2} = |z_1| \times |z_2|$.
- Comme $z_2 \neq 0$, alors $|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \times z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \times |z_2|$ si bien que $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Théorème (inégalité triangulaire)

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

DÉMONSTRATION – soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

On a $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2$

Or, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ si bien que $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Comme $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2|$, on en déduit que

$$|z_1|^2 - 2|z_1| \times |z_2| + |z_2|^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \times |z_2| + |z_2|^2$$

soit

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

d'où finalement

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Remarque : l'une des égalités se réalise s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou bien si $z_2 = 0$.

2/ Argument et exponentielle complexe**2.1) Argument d'un nombre complexe non nul**

Définition Soit M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ dans le plan complexe.

Un **argument** de z est une mesure, notée $\arg(z)$, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Théorème (forme trigonométrique)

Tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit sous **forme trigonométrique** $z = |z| (\cos \arg(z) + i \sin \arg(z))$.

Remarque : l'angle $\arg(z)$ est caractérisé par $\cos \arg(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin \arg(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$.

2.2) L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque : géométriquement, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = 1\}$.

Définition Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$: c'est la **notation d'Euler**.
De plus, on conviendra que $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- 1) On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. C'est le paramétrage classique du cercle unité.
- 2) Par définition, $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition

Pour tous θ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta = \varphi + 2k\pi \text{ (avec } k \in \mathbb{Z})$$

Remarque : ceci donne un sens à la notation d'Euler : en effet, l'application $\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ vérifie la propriété caractéristique de la fonction exponentielle. De plus, comme $e^{i0} = 1 = e^0$, elle nous fournit une extension de l'exponentielle à $i\mathbb{R}$.

Proposition (formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$.

Applications classiques

- ❶ On retrouve les formules d'addition des cosinus et des sinus en écrivant sous forme algébrique la relation $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.
- ❷ Dès qu'on croise une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on peut la factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$. La forme algébrique nous donne les formules de factorisation des cosinus et sinus.
- ❸ La linéarisation d'expressions trigonométriques ... cf. paragraphe suivant.

2.3) Linéarisation d'expressions trigonométriques

On désire remplacer des produits de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par des combinaisons linéaires de termes de la forme $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$. Ceci permet de trouver des primitives, par exemple. Pour cela, on injecte les formules d'Euler dans les expressions à linéariser.

Exemples : linéariser $\sin^3(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$.

2.4) La formule de Moivre

Proposition

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Applications

1) On peut exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple : exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2) On peut factoriser $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ ou $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ en s'aidant de la somme $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.

2.5) La forme exponentielle

Théorème (forme exponentielle)

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit sous **forme exponentielle** $z = |z| e^{i \arg(z)}$.

Exemples : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-2 = 2e^{i\pi}$

Proposition

Pour tout $(r, r', \theta, \theta') \in]0; +\infty[^2 \times \mathbb{R}^2$, on a $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff (r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta' [2\pi])$.

Théorème

Pour tous z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

$$\arg(\bar{z}_1) = \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1) + 2k\pi$$

DÉMONSTRATION – il suffit d'écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

L'exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **exponentielle de z** le nombre complexe $e^z = e^x e^{iy}$.

Remarque : cette exponentielle prolonge celles définies sur $\mathbb{R}$ et sur $i\mathbb{R}$.

3/ Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Toutes les règles et méthodes vues dans $\mathbb{R}$ demeurent évidemment valides dans $\mathbb{C}$.

3.1) Racine carrée d'un complexe

Définition Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de a tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Exemple : 0 est sa propre racine carrée car $z^2 = 0 \iff z = 0$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul a admet exactement deux racines carrées.

DÉMONSTRATION – on écrit les complexes sous forme exponentielle afin de résoudre $z^2 = a$.

Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Considérons un nombre complexe $a = X + iY$, avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Si son argument n'est pas simple, on ne peut pas déterminer ses racines carrées sous forme exponentielle.

On recherche donc les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $z^2 = a$.

$$\text{Alors } z^2 = a \iff \begin{cases} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} + X) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} - X) \\ xy = Y/2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous fournissent les nombres réels x et y au signe près ; la dernière permet justement de savoir si les signes de x et y sont égaux ou opposés.

Exemples : résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 5 - 12i$, $z^2 = -7 + 24i$ et $z^2 = -3 - 4i$.

3.2) L'équation du second degré

Théorème (version ultime)

Étant donnés trois réels a, b et c , avec $a \neq 0$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ son discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ .

- Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux racines distinctes $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$.

En pratique, on prend $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta > 0$ et $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique racine double $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

DÉMONSTRATION – puisque $a \neq 0$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

grâce à la forme canonique. Comme $\Delta = \delta^2$, il en découle que

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right)$$

d'où
$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \text{ ou } z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}$$

Proposition

Soient trois réels a, b et c , avec $a \neq 0$. Deux nombres z_1 et z_2 (éventuellement égaux) sont les deux racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si, $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
On a alors la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

DÉMONSTRATION – pour l'implication directe, on prend les formules établies précédemment. Pour montrer la réciproque, il suffit de vérifier que $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 + bz + c$.

Exemple : résoudre l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$.

VII – Généralités sur les fonctions réelles

Dans tout le chapitre, $\mathcal{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ le plan euclidien.

1/ Définitions et premières propriétés

1.1) Fonction, courbe d'une fonction

Définition

- Une application f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **fonction réelle d'une variable réelle**. On parlera aussi de **fonction numérique**.
- L'ensemble $\mathcal{C}_f = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \in \mathcal{D}, y = f(x)\}$ est appelé **la courbe représentative de f** . On dit encore que la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

Contre-Exemples : les droites verticales et les cercles ne sont pas des courbes représentatives de fonctions puisqu'elles comportent des points de même abscisse.

Proposition (positions relatives)

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathcal{D}$. Voici les positions de leurs courbes représentatives au niveau des points d'abscisse $x \in \mathcal{D}$:

- tant que $f(x) > g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$;
- tant que $f(x) < g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$;
- lorsque $f(x) = g(x)$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent.

Remarque : lorsque l'on trace plusieurs courbes dans un même repère, il faut impérativement s'intéresser à leurs positions relatives pour éviter de dessiner n'importe quoi.

Exemple : illustrer ceci avec les courbes du carré, de la racine et de l'identité

1.2) Parité

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$. On suppose que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que $-x \in \mathcal{D}$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On dit alors que :

- f est **paire sur $\mathcal{D}$** lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$
- f est **impaire sur $\mathcal{D}$** lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$

Exemples : les fonctions puissances ; les fonctions trigonométriques.

Remarque : en fait, les fonctions paires (respectivement impaires) se comportent comme les puissances paires (respectivement impaires) ... d'où l'usage de ces qualificatifs.

Théorème (courbes des fonctions paires et impaires)

- La courbe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
- La courbe d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

Exemples : les courbes des fonctions inverse, carré et cube.

1.3) Périodicité

Définition Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est **T-périodique** lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$.

Exemples : les fonctions trigonométriques (attention ! la période n'est pas unique)

Théorème (courbes des fonctions périodiques)

Soit f une fonction T-périodique. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $\vec{u}(T, 0)$, ce qui signifie que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \in \mathcal{C}_f \implies (x + T, y) \in \mathcal{C}_f$$

Remarque : la courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $(nT, 0)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, et l'implication donnée dans le théorème est une équivalence.

1.4) Changements de repère et d'échelle**Proposition**

Soient a et b deux réels, et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et de courbe $\mathcal{C}_f$.

- La courbe de $g : x \mapsto f(x - a) + b$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$.
- La courbe de $g : x \mapsto -f(x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe (Ox).
- La courbe de $g : x \mapsto f(-x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe (Oy).
- La courbe de $g : x \mapsto bf(x/a)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ en multipliant les unités graphiques par a en abscisses et par b en ordonnées.

PREUVE – il suffit de caractériser l'appartenance d'un point $M(x, y)$ à la courbe de g .

- $(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff x - a \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = g(x) = f(x - a) + b \iff (x - a, y - b) \in \mathcal{C}_f$
- $(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = g(x) = -f(x) \iff (x, -y) \in \mathcal{C}_f$
- $(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff -x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = g(x) = f(-x) \iff (-x, y) \in \mathcal{C}_f$
- $(x, y) \in \mathcal{C}_g \iff x/a \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = g(x) = bf(x/a) \iff (x/a, y/b) \in \mathcal{C}_f$

Exemples : tracer l'allure des courbes des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto (x + 3)^2 - 2 \quad g : x \mapsto -3x^2 + 1 \quad h : x \mapsto \sqrt{5 - x} \quad k : x \mapsto 3 \cos(x/2)$$

2/ Opérations sur les fonctions

Définition Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$. On définit alors les fonctions :

- $(f + \lambda g) : x \mapsto f(x) + \lambda g(x)$.
- $(f g) : x \mapsto f(x) g(x)$.
- $(1/g) : x \mapsto 1/g(x)$ si $g(x) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$.

Remarque : avec ces opérations, on obtient tous les quotients et puissances possibles.

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ telles que $f(x) \in \mathcal{D}'$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
La fonction composée de f par g est la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ définie sur $\mathcal{D}$.

Remarque : l'hypothèse « $f(x) \in \mathcal{D}'$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ » est INDISPENSABLE.

3/ Sens de variation

3.1) Définitions

Définition Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que la fonction f est :

- **croissante sur $\mathcal{D}$** lorsque : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, x < y \implies f(x) \leq f(y)$
- **strictement croissante sur $\mathcal{D}$** lorsque : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, x < y \implies f(x) < f(y)$
- **décroissante sur $\mathcal{D}$** lorsque : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, x < y \implies f(x) \geq f(y)$
- **strictement décroissante sur $\mathcal{D}$** lorsque : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, x < y \implies f(x) > f(y)$

Remarque : une fonction est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Exemple : les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes

3.2) Propriétés

Théorème (opérations sur les fonctions monotones)

Soient f et g deux fonctions définies et **monotones** sur $\mathcal{D}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si f et g ont le même sens de variation, alors la fonction $f + g$ est monotone et de même sens de variation que les fonctions f et g .
- Si α est positif, f et αf ont le même sens de variation. Sinon, elles ont des sens contraires.
- Si f et g sont positives et ont le même sens de variation, alors la fonction fg est monotone et de même sens de variation que les fonctions f et g .

Exemple : la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2 - \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Théorème (variations des composées)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et telles que $f(x) \in \mathcal{D}'$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

- Si f et g sont toutes les deux croissantes ou bien toutes les deux décroissantes sur leurs domaines de définition respectifs, alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur $\mathcal{D}$.
- Si l'une des fonctions est croissante sur son domaine de définition et l'autre décroissante sur le sien, alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur $\mathcal{D}$.

Exemple : la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque : il faut travailler sur des intervalles de monotonie pour utiliser ce théorème.

4/ Fonctions bornées

Définition Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est :

- **minorée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
- **majorée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
- **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est minorée et majorée.
Ceci revient à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leq A$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Exemple : la fonction $f : x \mapsto x^4 - 18x^3 + 7$ est bornée sur $[-2; 6]$.

Définition Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que :

- f **admet $f(x_0)$ pour minimum sur $\mathcal{D}$** ou encore que f **admet un minimum sur $\mathcal{D}$ en x_0** lorsque $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On écrit alors $f(x_0) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- f **admet $f(x_0)$ pour maximum sur $\mathcal{D}$** ou encore que f **admet un maximum sur $\mathcal{D}$ en x_0** lorsque $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On écrit alors $f(x_0) = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- f **admet un extremum sur $\mathcal{D}$** lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum.

Exemple : la fonction cosinus, définie sur $\mathbb{R}$, admet -1 pour minimum en π .

Remarque : l'existence d'un extremum dépend toujours du choix de l'ensemble de définition. Il ne faut pas oublier de le préciser.

Définition Un **extremum local** d'une fonction numérique f est un extremum d'une restriction de cette fonction à un **intervalle ouvert**.

Remarque : f admet un extremum local lorsqu'elle change de sens de variation en un point. Cela se traduit par la présence de « creux » et de « bosses » sur sa courbe représentative.

Exemple : débusquer les extrema locaux de $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 17$.

VIII – Études de fonctions

1/ Éléments de symétrie

Les courbes des fonctions paires ou impaires possèdent des symétries qui permettent de réduire le domaine d'étude. Ceci se généralise de la manière suivante :

Théorème (axes et centres de symétrie)

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. On suppose que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport au réel a , c'est-à-dire que $a + x \in \mathcal{D}$ implique $a - x \in \mathcal{D}$.

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $x = a$ pour axe de symétrie lorsque

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad a + x \in \mathcal{D} \implies f(a + x) = f(a - x) \quad (1)$$

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point $\Omega(a; b)$ pour centre de symétrie lorsque

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad a + x \in \mathcal{D} \implies f(a + x) + f(a - x) = 2b \quad (2)$$

PREUVE – nous allons montrer que chaque condition implique la symétrie mentionnée.

- Supposons que la fonction f vérifie la condition (1). Pour tous réels x et y , on a

$$\begin{aligned} M(a + x; y) \in \mathcal{C}_f &\iff a + x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(a + x) \\ &\iff a - x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(a - x) \quad \text{d'après (1)} \\ &\iff M'(a - x, y) \in \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Comme la symétrie d'axe $\Delta : x = a$ transforme $M(a + x; y)$ en $M'(a - x; y)$, ce qui précède montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Δ .

- Supposons que la fonction f vérifie la condition (2). Pour tous réels x et y , on a

$$\begin{aligned} M(a + x; b + y) \in \mathcal{C}_f &\iff a + x \in \mathcal{D} \text{ et } b + y = f(a + x) \\ &\iff a - x \in \mathcal{D} \text{ et } b + y = 2b - f(a - x) \quad \text{d'après (2)} \\ &\iff a - x \in \mathcal{D} \text{ et } b - y = f(a - x) \\ &\iff M'(a - x; b - y) \in \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Comme la symétrie de centre $\Omega(a; b)$ transforme $M(a + x; b + y)$ en $M'(a - x; b - y)$, ce qui précède montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω .

Exemples : montrer que les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2 + 4x + 4$, $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ sont symétriques par rapport à $\Delta : x = -2$, $\Omega(-1, 1)$ et $\Delta' : x = 2$.

2/ Limites et asymptotes

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a est une borne de I et f est une fonction définie sur I et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

2.1) Notion d'asymptote

Définition Pour tout $x \in I$, on note $M(x)$ le point de coordonnées $(x; f(x))$. On dit alors qu'une courbe plane $\mathcal{C}$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ en a si $\lim_{x \rightarrow a} d(M(x), \mathcal{C}) = 0$.

Remarque : cette définition généralise la notion d'asymptote rencontrée au Lycée.

2.2) Asymptote verticale

Définition On suppose que $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = a$ pour **asymptote (verticale)**.

Remarque : dans ce cas, pas besoin de préciser que c'est une asymptote en a .

Exemple : la courbe de la fonction inverse admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

2.3) Asymptotes en l'infini

Définition Soit g une autre fonction définie sur I .

- On dit que $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour **asymptote en $+\infty$** lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{C}_g$ pour **asymptote en $-\infty$** lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Remarque : le signe de $f(x) - g(x)$ donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.

Exemple : l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe de la fonction inverse.

Détermination pratique d'une asymptote d'équation $y = ax + b$ en l'infini

① On prouve que $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $f(x) = ax + b + c(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$.

② On calcule $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$ puis $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$; elles doivent être réelles.

Exemples : déterminer les asymptotes en $+\infty$ aux courbes représentatives de

$$f : x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$$

$$g : x \mapsto \frac{3x^2 - 5x + 7}{x}$$

$$h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

3/ Applications de la dérivation

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur I .

3.1) Équation de la tangente en un point

Soit a un point de l'intervalle I .

Proposition (tangente verticale)

Si $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en $A(a, f(a))$.

Exemple : la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale à l'origine.

Proposition (tangente oblique)

Si f est dérivable en a , sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente en $A(a, f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Elle a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque : dès que $f' = 0$, la courbe de f admet une **tangente horizontale**.

3.2) Variations et extrema

Théorème (dérivée et variations)

- Si f' est positive (resp. négative) sur I , alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .
- Si f' est strictement positive (resp. strict^{mnt} négative) sur I **sauf éventuellement en un nombre fini de points**, f est strictement croissante (resp. strict^{mnt} décroissante) sur I .

Remarque : ainsi, l'annulation ponctuelle de f' n'interdit pas la stricte monotonie ; il faut juste éviter que f' ne soit identiquement nulle sur un intervalle de longueur non nulle.

Corollaire Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

Exemples : étudier les variations de $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto x^3 - 4x$ sur $\mathbb{R}$.

Détermination des extrema

Les extrema, globaux comme locaux, sont fournis par la lecture du tableau de variations. On notera que f présente un extremum local lorsque f' **s'annule en changeant de signe**.

Remarque : attention, la condition $f'(c) = 0$ ne suffit pas à nous assurer de l'existence d'un extremum local (penser à la fonction cube).

4/ Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction définie à l'aide d'une expression explicite. On cherche à en tracer **sans la calculatrice** une courbe représentative aussi précise que possible. La plupart du temps, l'exercice fournira les étapes de l'étude, dont voici une liste à peu près exhaustive :

① Domaines et symétries

- ❶ Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f .
- ❷ Utiliser les périodicité et symétries éventuelles pour restreindre le domaine d'étude.

② Limites et asymptotes

- ❶ Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- ❷ Étudier les asymptotes aux bornes de l'ensemble de définition.

③ Étude des variations

- ❶ Calculer l'expression de la dérivée et **étudier le signe de $f'(x)$** ... et pas uniquement les points d'annulation.
- ❷ Dresser le tableau de variations complet de f .

④ Tracé de la courbe

- ❶ Placer les asymptotes et les tangentes horizontales déterminées au cours de l'étude.
- ❷ En s'appuyant sur celles-ci et sur le tableau de variations, esquisser d'un trait élégant et décontracté la courbe représentative de f .

Exemples : étudier $f : x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$, $g : x \mapsto \frac{3x^2 - 5x + 7}{x}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

IX – Calcul intégral

Dans tout le chapitre, on travaillera dans un repère orthogonal du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ Définitions et propriétés fondamentales

1.1) Intégrale d'une fonction continue

Définition On parle d'**aire algébrique** d'un domaine du plan lorsque l'on compte positivement les aires des zones situées au-dessus de l'axe (Ox) et négativement les autres.

Exemple : calculer l'aire algébrique de ABC, avec $A(1, 1)$, $B(4, 3)$ et $C(5, -1)$.

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. L'**aire algébrique** du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe (Ox) et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est notée $\int_a^b f(t) dt$ et se lit **intégrale de f entre a et b** .

Remarque : le symbole dt permet de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre.

Exemples : calculer $\int_1^8 8 du$, $\int_{-2}^5 (3v + 1) dv$, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ et $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1 - y^2} dy$.

1.2) Les sommes de Riemann

Étant donnée une fonction f définie sur $[a; b]$, on peut approcher l'aire sous sa courbe au moyen de rectangles de plus en plus fins. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$. On définit les **sommes de Riemann à gauche et à droite** associées à f sur $[a; b]$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

et

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

1.3) La relation de Chasles

Définition Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

Si $a > b$, on pose
$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

Théorème (relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

$$\forall (a, b, c) \in I^3 \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Exemple : que dire de $\int_{-a}^a f(t) dt$ lorsque f est continue et paire / impaire sur $[-a; a]$?

1.4) Linéarité et positivité

Théorème (linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Théorème (positivité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ et $\int_a^b f(t) dt = 0 \implies f = 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (positivité de l'intégrale).
- Enfin $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ (inégalité triangulaire).

1.5) Valeur moyenne d'une fonction

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a; b]$** la quantité

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Exemple : la vitesse moyenne est la valeur moyenne de la vitesse instantanée.

Proposition (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$.

Alors $m \leq \bar{f} \leq M$ c'est-à-dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Exemples : établir les inégalités suivantes

$$(a) \int_{0,5}^1 \ln(t) dt \geq -\ln(2)/2 \quad (b) \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \quad (c) \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+t^3} dt \leq 3.$$

2/ Primitive d'une fonction continue**2.1) Définition et propriétés****Définition**

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est une **primitive de f sur I** si F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Proposition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I .

Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme $F + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

2.2) Recherche de primitives

Il faut utiliser les règles sur le calcul des dérivées, mais dans l'autre sens, pour identifier des dérivées voire des dérivées de fonctions composées. Pour les cas extrêmes, penser à utiliser $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple : déterminer des primitives des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto 2 \cos(2x) \quad g : x \mapsto \tan x \quad h : x \mapsto \frac{x^2}{2x^3+1} \quad k : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

Proposition (cas des polynômes-exponentielles)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme. La fonction $f : t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$ admet sur $\mathbb{R}$ une primitive de la forme $F : t \mapsto e^{\alpha t} Q(t)$, où Q un polynôme de même degré que P .

Remarque : résultats similaires en remplaçant P et Q par des combinaisons de sin et cos.

Proposition (cas des fonctions rationnelles)

On recherche une primitive de la fonction $f : t \mapsto \frac{at + b}{(t - \alpha)(t - \beta)}$ pour $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$.

- Si $\alpha \neq \beta$, on met notre fonction sous la forme $f(t) = \frac{\gamma}{t - \alpha} + \frac{\delta}{t - \beta}$ avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\alpha = \beta$, on met notre fonction sous la forme $f(t) = \frac{a}{t - \alpha} + \frac{\gamma}{(t - \alpha)^2}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exemples : primitives de $f : x \mapsto (2x + 1)e^{3x}$, $g : x \mapsto \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ et $h : x \mapsto \frac{x}{(x - 1)^2}$

3/ Calcul des intégrales**3.1) Lien entre primitives et intégrales****Théorème (fondamental)**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et $a \in I$.

L'unique primitive de f sur I qui s'annule en a est la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Exemple : dériver les fonctions $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $g : x \mapsto \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt$.

3.2) Intégration par parties**Théorème (formule d'intégration par parties)**

Soient f et g deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t) g'(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

PREUVE – il suffit d'intégrer la relation $(fg)' = f'g + fg'$ entre a et b .

Exemples : déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto x \ln(x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

3.3) Changement de variables

Théorème (formule de changement de variables)

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur I et de dérivée continue, et f une fonction continue sur J . Alors

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_{u=a}^{u=b} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t) dt$$

On dit que l'on a effectué le **changement de variable** $t = \varphi(u)$.

PREUVE – il suffit d'intégrer la relation $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times f \circ \varphi$, où $F' = f$, entre a et b .

En pratique :

- pour passer de la variable u à la variable t , on fait apparaître un intégrande de la forme $\varphi' \times f \circ \varphi$ puis on remplace $f(\varphi(u))$ par $f(t)$ et $\varphi'(u) du$ par dt ;
- pour passer de t à u , on remplace $f(t)$ par $f(\varphi(u))$ et dt par $\varphi'(u) du$;
- dans tous les cas, les bornes de l'intégrale sont les valeurs prises la variable utilisée.

Exemples : calculer $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(u) \cos^2(u) du$ et $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$.

Grands classiques :

- En présence d'un terme en $\sqrt{1-t^2}$, on pose $t = \cos(u)$ ou $t = \sin(u)$.
- En présence d'un terme en $\frac{1}{1+t^2}$, on pose $t = \tan(u)$.
- En présence d'un terme dépendant uniquement de e^t , on pose $t = \ln(u)$ ou $u = e^t$.
- En présence d'une fonction de $\cos(u)$ et $\sin(u)$, on tente $t = \cos(u)$, $\sin(u)$ ou $\tan(u)$.
- En présence d'un terme de la forme $\sqrt{f(u)}$, on peut tenter $t = \sqrt{f(u)}$.

Exemple : calculer $\int \sqrt{1+u} du$ en utilisant la dernière idée.

4/ Applications

4.1) Mesures géométriques

Théorème (calculs d'aires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. L'aire du domaine du plan délimité par sa courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |f(t)| dt$.

Exemple : on retrouve ainsi l'aire d'un demi-disque.

Théorème (calculs d'aires, bis)

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$. L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |g(t) - f(t)| dt$.

Remarque : ne pas oublier la valeur absolue sous peine de calculer une aire algébrique ...

Théorème (calculs de volumes)

Soit Σ un solide compris entre les plans d'équations $z = a$ et $z = b$. On suppose que sa section par le plan de cote z a pour aire $\mathcal{S}(z)$, avec $\mathcal{S}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

Son volume est alors $\mathcal{V}_\Sigma = \int_a^b \mathcal{S}(z) dz$

Exemple : retrouver le volume d'une sphère.

4.2) Calculs de limites de sommes

En présence d'une somme $\sum_{k=1}^n u_{n,k}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}$ de termes dépendant à la fois de k et de n , on peut reconnaître une somme de Riemann sur $[0; 1]$ d'une fonction f bien choisie

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{ou} \quad T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ceci permet de calculer sa limite grâce au théorème vu en début de chapitre.

Exemples : calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

X – Équations différentielles

1/ Généralités

Définition Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir les dérivées successives de cette fonction en un point donné.
Résoudre cette équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ consiste à déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur I qui la satisfont.

De très nombreux problèmes issus des sciences physiques, de la biologie ou de l'économie (sans parler des mathématiques !) conduisent à la résolution d'équations différentielles.

Exemple : chute libre verticale avec force de frottement linéaire

À l'instant $t = 0$, un objet de masse m est lâché et tombe verticalement dans un repère $(O; \vec{k})$. On note $z(t)$ son altitude à l'instant $t \geq 0$: sa vitesse et son accélération sont alors $\vec{v}(t) = z'(t)\vec{k}$ et $\vec{a}(t) = z''(t)\vec{k}$. De plus, cet objet est soumis aux forces suivantes :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$;
- la force de frottement $\vec{F} = -f\vec{v}(t) = -fz'(t)\vec{k}$

Le PFD permet d'écrire $m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F}$ soit $\boxed{mz''(t) = -fz' - mg.}$

Exemple : charge d'un condensateur à travers une résistance et une inductance

On considère un circuit électrique constitué d'un générateur U , d'une résistance R , d'une inductance L et d'un condensateur C . Soient $q(t)$ la charge du condensateur et $i(t) = q'(t)$ l'intensité du courant dans le circuit à l'instant t .

- La tension aux bornes du condensateur est $U_C = q(t)/C$.
- La tension aux bornes de la résistance est $U_R = Ri(t) = Rq'(t)$.
- La tension aux bornes de l'inductance est $U_L = Li'(t) = Lq''(t)$.

La loi des mailles permet d'écrire $U = U_C + U_R + U_L$ soit $\boxed{CU = q(t) + RCq'(t) + LCq''(t).}$

Définition Soit (E) une équation différentielle. Une solution de (E) est dite **solution maximale** s'il n'existe pas d'autre solution de (E) la prolongeant.

Exemple : considérons l'équation différentielle $(E) : y' = 2$.

- La fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ est une solution de (E) .
- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ est une solution maximale de (E) .

2/ Les équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1) Généralités

Définition

Soient a et b deux fonctions continues et à valeurs réelles sur un intervalle I .

- L'équation $(E) : y' + a y = b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
- Une **solution de (E)** est une fonction f dérivable sur I telle que $f'(t) + a(t) f(t) = b(t)$ pour tout $t \in I$. Son graphe est alors appelé **courbe intégrale de (E)** .

Définition L'équation $(E_0) : y' + a y = 0$ est appelée **équation homogène associée à (E)** .

Théorème (structure de l'ensemble des solutions)

Soient f_0 une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_0) .
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}\}$.

DÉMONSTRATION – soit f une fonction dérivable sur I ; alors

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff f' + a f = b = f_0' + a f_0 \\ &\iff (f - f_0)' + a (f - f_0) = 0 \\ &\iff f - f_0 \text{ solution de } (E_0) \\ &\iff g = f - f_0 \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Remarque : ceci nous donne la démarche à suivre pour résoudre l'équation (E) .

2.2) Résolution de l'équation homogène

Théorème

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I .
Les solutions sur I de l'équation différentielle homogène $(E_0) : y' + a y = 0$ sont toutes les fonctions $g_C : t \mapsto C e^{-A(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Remarque : lorsque $a = C^{\text{te}}$, on a tout simplement $g_C : t \mapsto C e^{-at}$.

DÉMONSTRATION – montrer que ces fonctions sont bien solutions, et que ce sont les seules.

- Pour tout $C \in \mathbb{R}$, on a $g_C' = -A' g_C = -a g_C$ donc la fonction g_C est solution de (E_0) .
- Réciproquement, soient y une solution de cette équation et $z : t \mapsto y(t) e^{A(t)}$ sur I .
Pour tout $t \in I$, on a $z'(t) = [y'(t) + a(t)y(t)] e^{A(t)} = 0$ donc z est constante sur I .
Il existe ainsi $C \in \mathbb{R}$ tel que $z(t) = C$ soit $y(t) = C e^{-A(t)} = g_C(t)$ pour tout $t \in I$.

Exemples : résoudre les équations différentielles suivantes (solutions maximales ?)

$$(a) \ 8y' = 56y \quad (b) \ 2t y' = y \quad (c) \ (1 + t^2) y' + y = 0 \quad (d) \ (1 - t^2) y' + ty = 0$$

2.3) Résolution de l'équation avec second membre

Maintenant que l'on sait résoudre l'équation homogène $(E_0) : y' + ay = 0$, il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière de l'équation $(E) : y' + ay = b$ pour les obtenir toutes.

Proposition

On suppose que la fonction a est constante. Si b est une constante, un polynôme ou une combinaison de sin et de cos, l'équation (E) admet une solution particulière de la même forme.

Remarque : on retrouve les mêmes idées qu'en calcul intégral ... ce qui n'est pas surprenant.

Exemples : résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$(a) \quad 5y' + 3y = 6 \qquad (b) \quad y' - y = 3t^2 + 1 \qquad (c) \quad y' - 2y = 3 \sin(t) + 5 \cos(t)$$

Proposition

On suppose que la fonction a est constante et que $b : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$, avec P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation (E) admet alors une solution particulière de la forme $f_0 : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$, où Q est un polynôme.

Remarques :

- ❶ On commencera par écrire la relation vérifiée par les polynômes Q et Q' , ce qui nous permettra de déterminer le degré de Q .
- ❷ On a un résultat similaire lorsque P est une combinaison de sin et de cos.

Exemples : résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$(a) \quad t' + 3y = (t^2 + 1)e^t \qquad (b) \quad y' + y = (2t + 1)e^{-t} \qquad (c) \quad y' - 2y = (2 \sin t + \cos t)e^t$$

Proposition (principe de superposition des solutions)

Soient b_1 et b_2 deux fonctions définies sur I . On suppose que :

- f_1 est une solution de $y' + ay = b_1$ sur I
- f_2 est une solution de $y' + ay = b_2$ sur I

Alors la fonction $f_0 = f_1 + f_2$ est une solution de $y' + ay = b_1 + b_2$ sur I .

Remarque : grâce à ce principe et aux formules d'Euler, on peut aussi intégrer les sinus et cosinus aux exponentielles en jouant avec des fonctions à valeurs complexes.

Exemples : résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$(a) \quad y' + y = t^2 + 1 + 2e^{-t} \qquad (b) \quad y' + 3y = 1 + 5e^t \qquad (c) \quad y' - 2y = \sin(t)e^t + \cos(2t)e^{-t}$$

Lorsque b n'a pas une forme adéquate ou lorsque a n'est pas constante, les méthodes exposées ci-dessus ne fonctionnent plus. Il faut alors employer les grands moyens.

Proposition (méthode de variation de la constante)

Rechercher une solution sous la forme $f_0 : t \mapsto C(t) e^{-A(t)}$ avec C une fonction dérivable.

Remarques :

- ❶ Ceci nous mène à un « simple » calcul de primitive, qui nous assure de l'existence d'une solution particulière mais ne nous permet pas forcément de calculer son expression.
- ❷ Il faut impérativement penser à utiliser cette méthode lorsque le second membre contient un multiple d'une solution de l'équation homogène (c'est alors très simple).

Exemples : résoudre les équations suivantes

$$(a) \quad y' + y = \tan(t) e^{-t} \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad (b) \quad y' + \frac{t}{1-t^2} y = 1 \text{ sur }]-1; 1[$$

2.4) Le problème de Cauchy**Théorème (problème de Cauchy)**

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Le **problème de Cauchy** $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

DÉMONSTRATION

- Soit f_0 une solution particulière de l'équation (E). On sait que les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions $g_C : t \mapsto C e^{-A(t)}$; ainsi, les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sur I sont les fonctions $f_\lambda : t \mapsto f_0(t) + C e^{-A(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- Enfin, $f_C(t_0) = y_0 \iff f_0(t_0) + C e^{-A(t_0)} = y_0 \iff C = e^{A(t_0)} (y_0 - f_0(t_0))$, ce qui nous assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy sur I .

Exemple : la fonction exponentielle ; un circuit RC avec U constant et $q(0) = q_0$.

3/ Les équations linéaires du second ordre**3.1) Généralités****Définition**

Soient a et b deux réels et c une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs réelles.

- L'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.
- L'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique de (E)**.
- Une **solution de (E)** est une fonction f deux fois dérivable t.q. $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$ pour tout $t \in I$. Son graphe est alors appelé **courbe intégrale de (E)**.

Exemples : la chute verticale avec force de frottement linéaire et la charge d'un condensateur à travers une résistance et une inductance conduisent à de telles équations, en l'occurrence

$$my'' + fy' = -mg \quad \text{et} \quad LCy'' + RCy' + y = CU$$

Nous allons bientôt pouvoir résoudre ces problèmes. Chouette !

Définition *L'équation $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ est appelée **équation homogène associée à (E)**.*

Théorème

*Soient f_0 une solution particulière de (E) et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_0) .
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est alors $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}\}$.*

DÉMONSTRATION – même démarche que pour les équations du premier ordre.

3.2) Résolution de l'équation homogène

Théorème

Soient a et $b \in \mathbb{R}$. On note (E_0) l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ et Δ le discriminant de son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions $g : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double réelle $r_0 \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions $g : t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.*
- *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r = \rho + i\omega$ et $\bar{r} = \rho - i\omega \in \mathbb{C}$, avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$. Les solutions de l'équation homogène (E_0) sont toutes les fonctions $g : t \mapsto [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{\rho t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$.*

Exemples : résoudre les équations différentielles $y'' + 4y' - 5y = 0$ et $y'' + 2y' + 2y = 0$.

3.3) Résolution de l'équation avec second membre

Comme pour la résolution des équations linéaires du premier ordre, il suffit maintenant de trouver une solution particulière de l'équation $(E) : y'' + ay' + by = c$ pour les obtenir toutes.

Proposition

Si c est une constante, un polynôme ou une combinaison de sin et de cos, l'équation (E) admet une solution particulière de la même forme.

Remarque : attention aux fautes de signe en dérivant les sin et cos.

Proposition

On suppose que $c : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ avec P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation (E) admet alors une solution particulière de la forme $f_0 : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$, où Q est un polynôme.

Remarques :

- ❶ Même démarche avec des combinaisons de sin et de cos, en faisant très attention aux solutions de l'équation homogène (cf. dernier point).
- ❷ Le principe de superposition demeure inchangé.
- ❸ La méthode de variation de la constante, par contre, se complique un peu et devient la méthode de variation **des** constantes, qui n'est pas à notre programme. Disons juste qu'elle nous assure de l'existence d'une solution particulière puisque c est continue.

3.4) Le problème de Cauchy**Théorème (problème de Cauchy)**

Soit $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{R}^2$. Le **problème de Cauchy**
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution sur l'intervalle I .

DÉMONSTRATION

- Comme précédemment, on utilise une solution particulière f_0 de l'équation (E) et la résolution de l'équation homogène pour exprimer les solutions de (E) en fonction de deux paramètres A et B .
- Les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$ nous conduisent à un système de deux équations à deux inconnues, que l'on résout pour obtenir l'unique solution de notre problème de Cauchy.

Exemple : après discussion de leurs sens physiques, résoudre les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} my'' + fy' = -mg \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} LCy'' + RCy' + y = CU \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On essaiera en particulier de donner un sens aux conditions initiales.

XI – Autour de la récurrence

1/ Les entiers naturels

1.1) Définition et propriété fondamentale

Définition

On appelle ensemble des entiers naturels et l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nul.

Remarque : l'ensemble $\mathbb{N}$ admet 0 pour plus petit élément. Par contre, il n'admet pas de plus grand élément puisque $M + 1 \in \mathbb{N}$ pour tout $M \in \mathbb{N}$.

Proposition (fondamentale)

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Remarque : ces propriétés sont fausses dans $\mathbb{R}$... penser par exemple à l'intervalle $]0; 1[$.

Exemple : démontrons que tout entier naturel est intéressant.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe des entiers naturels inintéressants. Soit A leur ensemble : étant non vide, il admet un plus petit élément m . Comme $m \in A$, il est inintéressant ; cependant, $m = \min(A)$ ce qui le rend intéressant. D'où la contradiction ...

Notation : pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$, on définit les intervalles d'entiers

$$\llbracket m; n \rrbracket = \{p \in \mathbb{N} \mid m \leq p \leq n\} \quad \text{et} \quad \llbracket n; +\infty \rrbracket = \{p \in \mathbb{N} \mid p \geq n\}$$

Ce sont en fait les intersections de $\mathbb{N}$ et des intervalles « normaux » $[m; n]$ et $[n; +\infty[$.

1.2) Le principe de récurrence

Définition *On appelle **prédicat sur $\mathbb{N}$** une proposition portant sur un entier naturel.*

Remarque : on parlera du prédicat $\mathcal{P}$ ou bien, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, de la proposition $\mathcal{P}(n)$.

Exemple : on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $n^5 - n$ est divisible par 5 ».

En pratique, il est aisé de vérifier si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour des valeurs données de l'entier naturel n ; par contre, comment faire pour montrer que cette proposition est vraie pour tout entier naturel ? C'est là qu'intervient le principe de récurrence.

Théorème (principe de récurrence)

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat portant sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- 1) la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On en déduit que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que la proposition $\mathcal{P}(n)$ soit fausse. On appelle A leur ensemble.

- Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément $m = \min(A)$.
- Comme $m \in A$, alors $m \in \mathbb{N}$ et la proposition $\mathcal{P}(m)$ est fausse, d'où $m \neq 0$.
Ainsi $m \geq 1$ et donc $m - 1 \in \mathbb{N}$.
- Enfin $m - 1 < m$ donc $m - 1 \notin A$ si bien que $\mathcal{P}(m - 1)$ est vraie.
Il en découle que $\mathcal{P}(m)$ vraie, ce qui nous conduit à une contradiction.

Remarque : on procèdera de manière analogue avec une proposition sur les entiers $n \geq n_0$, où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé. Il faudra faire attention dans ce cas à l'initialisation.

Un raisonnement par récurrence commence par la définition du prédicat $\mathcal{P}$ en écrivant

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll \dots \gg$

et comporte trois étapes qui correspondent à l'application précise du théorème.

- ❶ **l'Initialisation** : on vérifie que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ❷ **l'Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On prouve alors que la proposition $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
- ❸ la **Conclusion** : on déduit du principe de récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : montrer que $1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = (n + 1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention, **il ne faut surtout pas mettre de $\forall n \in \mathbb{N}$ dans la définition de $\mathcal{P}(n)$ ou lors de l'hérédité**, ce sont les deux erreurs archi-classiques. Dans le premier cas, il y a une ambiguïté de formulation (le n est en même temps fixé et variable) et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est équivalente au résultat recherché. Dans le second cas, on admet ce résultat en début d'hérédité !

Lorsque l'on a besoin de connaître $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ pour établir $\mathcal{P}(n + 2)$, on effectue alors une récurrence double.

Théorème (récurrence double)

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- 1) les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies ;
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de cette suite.

Théorème (récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- 1) la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : cette forme de récurrence est utile quand le calcul du terme d'une suite récurrente fait intervenir plusieurs termes antérieurs.

Exemple : on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Les suites récurrentes

2.1) Généralités

Théorème (admis)

Soient E un ensemble non vide, $f : E \longrightarrow E$ une application et $a \in E$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On parle alors de suite **définie par récurrence** ou de **suite récurrente**.

Remarque : on peut déterminer successivement les termes d'une telle suite. Par contre, pour établir des propriétés plus générales vérifiées par ces suites (suggérées par le calcul des premiers termes ou la représentation graphique), il faut utiliser le principe de récurrence.

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \in [0; 3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition (généralisation)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un ensemble E est parfaitement définie par la donnée de :

- 1) une application $f : \mathbb{N} \times E \longrightarrow E$
- 2) un élément $u_0 \in E$
- 3) une relation de récurrence $u_{n+1} = f(n, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : établir les expressions des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \qquad u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } u_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} u_n$$

2.2) Suites arithmétiques

Définition Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison r** si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors :

- $u_n = u_p + (n - p)r$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque : le facteur $n + 1$ dans la dernière formule est le nombre de termes de la somme.

Exemple : calculer $S_1 = 4 + 5 + \dots + 97$ et $S_2 = 15 + 21 + 27 + \dots + 603$.

2.3) Suites géométriques

Définition Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **géométrique de raison q** si $u_{n+1} = q u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Alors :

- $u_n = q^{n-p} u_p$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Si $q \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : dans la dernière formule, le facteur u_0 est le premier terme de la somme et l'exposant $n + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Exemple : soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

2.4) Suites arithmético-géométriques

Définition Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $q \neq 1$, $r \neq 0$ et $u_{n+1} = q u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Technique d'étude d'une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- 1) Calculer la solution $a \in \mathbb{R}$ de l'équation $x = qx + r$.
- 2) Vérifier que la suite de terme général $v_n = u_n - a$ est géométrique de raison q .
- 3) En déduire l'expression de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple : étudier la suite définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.5) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- L'équation $x^2 = ax + b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite.

Remarques :

- ❶ Une telle suite est entièrement déterminée par u_0 et u_1 .
- ❷ Lorsque $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique.
- ❸ Les raisons de suites géométriques vérifiant la relation de récurrence sont les solutions de l'équation caractéristique.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On note **(E)** son équation caractéristique.

- Si **(E)** admet deux racines réelles distinctes q_1 et q_2 , alors il existe deux réels A et B tels que $u_n = A q_1^n + B q_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si **(E)** admet une racine double q_0 , il existe deux réels A et B tels que $u_n = (An + B) q_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si **(E)** admet deux racines complexes conjuguées distinctes $q = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{q} = \rho e^{-i\theta}$, alors il existe deux réels A et B tels que $u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on détermine les constantes A et B grâce aux valeurs de u_0 et de u_1 .

Exemple : déterminer l'expression de la suite de Fibonacci.

XII – Ensembles finis et dénombrement

1/ Le symbole somme

Dans toute la suite, on considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$.

1.1) Définition

Définition Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note $x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{i=p}^n x_i = \sum_{p \leq i \leq n} x_i$.

Remarque : la variable i est *muette*, ce qui signifie que la valeur de la somme n'est pas une fonction de i . On retrouve le même « mutisme » dans les intégrales et les limites.

Proposition

Si $p > n$, la somme $\sum_{i=p}^n x_i$ ne contient pas de terme. Par convention, elle est **nulle**.

1.2) Règles de calculs

Proposition (linéarité de la somme)

Pour tous λ et $\mu \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i$.

Exemple : $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - n(n+1) + n$

Proposition (découpage de somme)

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i$.

Remarque : contrairement à ce qui se passe avec des intégrales (cf. relation de Chasles), la deuxième somme ne « démarre » pas là où « finit » la première.

Exemple : montrer que $(1-x) \sum_{k=1}^n x^k = x - x^{n+1}$ en utilisant les propositions précédentes.

1.3) Changements d'indice

Principe : on peut être amenés à changer d'indice pour simplifier ou transformer l'écriture d'une somme. Attention alors à préciser dans celle-ci les valeurs prises par le nouvel indice.

Proposition (changements incontournables)

- Changement d'indice $k = i + p$: pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1+p}^{n+p} x_{k-p}$
- Changement d'indice $k = p - i$: pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=p-n}^{p-1} x_{p-k}$

Exemple : $S = \sum_{i=1}^n i = \sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) - \sum_{k=1}^n k = n(n+1) - S$ donc $2S = n(n+1)$.

1.4) Sommes télescopiques

Proposition

Si $n \geq 1$, on a $\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1$.

Exemple : calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Remarque : même si le principe semble très simple, le télescopage est néanmoins un outil extrêmement puissant. En effet, quand on ne sait pas calculer directement la somme $\sum_{k=1}^n u_k$, il « suffit » de trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_k = v_{k+1} - v_k$ pour tout entier k .

Exemple : calculer $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n 2 \sin(x) \cos(2kx)$ et $\sum_{k=1}^n (k+2) 2^k$.

Proposition (sommes classiques)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Proposition (sommes géométriques)

Pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b^n - a^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}$

1.5) Sommes doubles

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille de complexes.

Définition La somme de tous les éléments du tableau à n lignes et p colonnes suivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

est notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$ ou encore $\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij}$.

Cette somme peut être obtenue en sommant d'abord sur les lignes, puis sur les colonnes, ou l'inverse. Elle s'écrit donc de deux façons comme double somme. Plus généralement :

Proposition (intersion de sommes)

Quand les indices d'une double somme sont indépendants, on peut intervertir les deux sommes.

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij}$$

Exemple : calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ et $\sum_{1 \leq p \leq 5, 1 \leq q \leq 10} (p + pq)$.

On peut aussi effectuer des sommes sur des parties du tableau ; l'intersion est alors plus délicate car les indices ne sont plus indépendants. Elle reste cependant assez facile lorsque l'on somme sur un demi-tableau, de part et d'autre de la diagonale principale.

Proposition (sommes triangles)

$$\text{On a } \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

Exemple : calculer $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i}$.

1.6) Le symbole produit

Définition Pour $p \leq n$, on note $x_p \times \dots \times x_n = \prod_{i=p}^n x_i$. On convient qu'un produit vide vaut 1.

Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! = \prod_{k=1}^n k$ et $2^n = \prod_{k=1}^n 2$.

Remarque : ce symbole vérifie des propriétés analogues à celles du symbole somme ... ce qui n'est pas surprenant puisque l'exponentielle permet de transformer les sommes en produits. En particulier, les découpages et changements d'indices demeurent identiques.

Proposition (règles de calcul)

$$\text{Pour tous } \lambda \text{ et } \mu, \text{ on a } \prod_{i=1}^n (x_i^\lambda y_i^\mu) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^\lambda \times \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^\mu$$

Proposition (produits télescopiques)

$$\text{Si } n \geq 1 \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour tout } i, \text{ on a } \prod_{i=1}^n \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{n+1}}{x_1}.$$

Exemple : calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=1}^6 e^{i \frac{k\pi}{6}}$.

2/ Les ensembles finis

2.1) Cardinal d'un ensemble fini

Définition *Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E s'appelle **cardinal de E** et se note $\text{card}(E)$.*

Exemples : $\text{card}\{0, \dots, n\} = n + 1$; $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis.

- *Il existe une injection de E dans F si, et seulement si, $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.*
- *Il existe une surjection de E sur F si, et seulement si, $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.*
- *Il existe une bijection entre E et F si, et seulement si, $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.*

DÉMONSTRATION – il suffit de raisonner sur des ensembles finis de la forme $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Exemple : si l'on range n chaussettes dans $p < n$ tiroirs, l'un d'eux en contient au moins 2.

2.2) Opérations sur les ensembles finis

Proposition

Soit E un ensemble fini : $\text{card}(E) = n \in \mathbb{N} \iff$ il existe une bijection entre E et $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Remarque : cette bijection est simplement la numérotation des éléments de E.

Proposition

Soient E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est finie et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
Si en outre $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, il en découle que $A = E$.

Théorème

Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E .

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

3/ Le dénombrement

3.1) Listes d'éléments d'un ensemble fini

Définition Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini. Une **p -liste de E** est une suite **ordonnée** de p éléments de E , notée $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ avec $u_i \in E$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Proposition (p -listes d'un ensemble de cardinal n)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de p -listes de E est n^p .

PREUVE – il y a n choix possibles pour chacun des u_i , ce qui donne n^p choix pour la p -liste.

p -listes $\iff$ tirages **avec ordre et avec remise** de p éléments parmi n

Exemple : avec les lettres A, B, C et D, on peut former $4^5 = 2^{10} = 1024$ mots de cinq lettres.

Proposition

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ un entier.

Le nombre de p -listes d'éléments **distincts** de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

DÉMONSTRATION – il y a n choix pour u_1 , puis $(n-1)$ pour $u_2, \dots$, et enfin $(n-p+1)$ pour u_p .

p -listes d'éléments distincts $\iff$ tirages **avec ordre et sans remise** de p éléments parmi n

Exemple : 8 coureurs disputent la finale du 100m. Combien de podiums possibles ?

3.2) Les permutations

Définition Soit E un ensemble fini. Une **permutation de E** est une bijection de E dans E .

Remarque : une permutation est un changement de l'ordre d'énumération ... d'où le nom.

Proposition (nombre de permutations)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de permutations de E est $n!$

PREUVE – notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. L'application $f \mapsto (f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n))$ définit une bijection entre les permutations de E et les n -listes d'éléments distincts de E ... et il y en a $n!$

3.3) Les combinaisons

Définition Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.

- On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E de cardinal p .
- Pour un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$, le nombre de ces combinaisons se note $\binom{n}{p}$.

Remarque : si $p > n$, on a bien évidemment $\binom{n}{p} = 0$.

combinaisons de p éléments $\iff$ tirages **sans ordre ni remise** de p éléments parmi n

Exemples : loto ; jeux de cartes (distribution) ; élections de délégués.

Théorème

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

PREUVE – avec chaque combinaison de p éléments, on forme $p!$ p -listes d'éléments distincts.

Proposition

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

PREUVE – à retrouver par le calcul ou en pensant aux tirages de p éléments parmi n .

Théorème (relation de Pascal)

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

PREUVE – soit E un ensemble de cardinal $n+1$; on fixe $e \in E$ et l'on note $E' = E \setminus \{e\}$... ensemble de cardinal n . Parmi les combinaisons de p éléments de E , certaines contiennent e et $p-1$ éléments de E' , les autres sont formées de p éléments de E' . La relation en découle.

Triangle de Pascal : à l'aide de cette relation, on construit les valeurs successives des $\binom{n}{p}$.

Exemple : un groupe de n personnes (dont A et B) élit un comité de p personnes.

- 1) Combien peut-on former de comités contenant les deux ? un seul ? aucun des deux ?
- 2) En déduire une relation entre $\binom{n}{p}$, $\binom{n-2}{p}$, $\binom{n-2}{p-1}$ et $\binom{n-2}{p-2}$.

Théorème (formule du binôme de Newton)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

PREUVE – compter les façons d'obtenir $a^p b^{n-p}$ en développant $(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$.

Exemple : montrer que $(1+x)^8 \geq 1+8x$ pour tout $x \geq 0$.

Corollaire

Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Le nombre de parties de E est 2^n .

PREUVE – le nombre recherché est $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ d'après le binôme de Newton.

Exercices divers :

- 1) Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$ et $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $x \mapsto (1+x)^n$, calculer $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

XIII – Systèmes linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ et ou $\mathbb{C}$: c'est le corps des **scalaires**.

1/ Généralités

1.1) Définitions

Définition

On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ tout système

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les **coefficients** $a_{i,j}$ et b_i sont des scalaires fixés pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Le n -uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.

On note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les **lignes** du système.

Définition Une **solution** de ce système est un p -uplet de scalaires vérifiant chaque équation.

Exemple : prendre des systèmes simples à 2 ou 3 inconnues.

1.2) Résolution d'un système linéaire

Définition On dit que le système linéaire (S) est **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon, c'est un **système incompatible**.

Exemple : étude de l'intersection de deux droites du plan.

Définition Si $n = p$ et que le système linéaire (S) admet une unique solution, on dit alors que c'est un **système de Cramer**.

Exemple : étude de l'intersection de deux droites sécantes du plan.

Définition On dit que deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque : on utilisera dans ce cas le symbole « $\Longleftrightarrow$ ».

Définition

On dit qu'un système est **homogène** lorsque son second membre est nul.
On appelle **système homogène associé** au système linéaire (S) le système obtenu en remplaçant le second membre de (S) par 0.

Remarque : tout système homogène est compatible car le p -uplet nul est solution.

Théorème

Un système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

Exemple : les systèmes de deux équations à deux inconnues illustrent ce phénomène.

Proposition

Soient (S) un système linéaire compatible, (S_H) le système homogène associé et X_0 une solution de (S). Alors X est une solution de (S) si, et seulement si, $X - X_0$ est une solution de (S_H) .

PREUVE – bon exercice.

1.3) Opérations élémentaires

Définition

Les **opérations élémentaires sur les lignes** d'un système linéaire sont :

- l'échange de deux lignes ;
- la multiplication d'une ligne par un réel non nul ;
- l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Proposition

Ces opérations élémentaires transforment tout système linéaire en un système équivalent.

Remarque : rien de bien nouveau, ces manipulations sont connues depuis longtemps.

2/ Échelonnement et pivot de Gauss

2.1) Systèmes échelonnés

Définition

Un système linéaire est dit **échelonné** si :

- dès que le membre de gauche d'une ligne est nul, ceux des suivantes le sont aussi ;
- le plus petit indice des inconnues apparaissant dans le membre de gauche croît strictement d'une ligne à l'autre.

On appelle alors **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul.

Exemple : le système $\begin{cases} x + 5y + 6z = 3 \\ 2y + 4z = -7 \\ 3z = 1 \end{cases}$ est échelonné, contrairement à $\begin{cases} x + 5y + 6z = 7 \\ 4z = 12 \\ 3z = 9 \end{cases}$.

2.2) La méthode du Pivot de Gauss-Jordan

Voici comment on échelonne un système linéaire de n équations à p inconnues.

- ❶ On choisit une ligne dont le coefficient de x_1 est non nul **et si possible égal à 1**.
On la place en première position.
- ❷ On ajoute des multiples de cette ligne aux autres lignes afin d'éliminer la variable x_1 .
- ❸ On applique le procédé au système de $n - 1$ équations à $p - 1$ inconnues ainsi obtenu.
- ❹ On répète ceci jusqu'à l'apparition d'un système échelonné.

Proposition

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

3/ Ensemble des solutions d'un système linéaire

3.1) Notion de rang

Définition

- Le **rang** d'un système échelonné est égal au nombre de pivots.
- Le rang d'un système linéaire est le rang de tout système échelonné équivalent.

Exemple : le rang d'un système de Cramer de n équations à n inconnues est égal à n .

3.2) Résolution d'un système échelonné

Théorème

Soit un système linéaire échelonné à p inconnues de rang r .

- ❶ Si ce système comporte une équation du type $0 = b_m$ avec $b_m \neq 0$, c'est un **système incompatible**.
- ❷ Sinon, comparons son rang au nombre d'inconnues.
 - Si $r = p$, alors le système possède une unique solution : c'est un système de Cramer.
 - Si $r < p$, alors le système possède une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est paramétré par $p - r$ inconnues appelées **inconnues secondaires**.

PREUVE – dans le dernier cas, on fait passer les termes en $x_{r+1}, \dots, x_p$ au second membre, ce qui nous donne un système de Cramer d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_r$.

XIV – Géométrie du plan et de l'espace

1/ Rappels

1.1) Définitions et premières propriétés

Définition Un **vecteur** $\vec{u}$ est la mesure du déplacement d'un point A à un autre point B.

- Si les deux points sont confondus, on l'appelle **vecteur nul** et on le note $\vec{u} = \vec{0}$.
- Sinon, il est caractérisé par sa **direction**, la droite (AB), son **sens**, de A vers B, et sa **norme** $\|\vec{u}\|$, la distance AB. On le note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.2) Opérations sur les vecteurs

Définition (somme de deux vecteurs)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
On pose alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Proposition (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Définition (multiplication par un réel)

Soient $\vec{u}$ un vecteurs et k un réel. Si $k = 0$, on pose $k\vec{u} = \vec{0}$. Sinon, on note $k\vec{u}$ le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens si $k > 0$ et de sens opposé sinon, et de norme $|k| \|\vec{u}\|$.

Exemple : le milieu I d'un segment [AB] vérifie $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : ceci équivaut à l'existence de deux réels λ et μ **non tous nuls** tq $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$.

Proposition

Deux vecteurs sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont **la même direction**.

Application : retrouver le théorème de Thalès et sa réciproque.

Théorème

Soient A et B deux points distincts. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

Définition Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe des réels α , β et γ **non tous nuls** tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Proposition (une caractérisation)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Théorème

Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient coplanaires.

2/ Repérage dans le plan et dans l'espace

2.1) Définitions

Définition Soient O un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

- On dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un **repère cartésien** et $(\vec{i}, \vec{j})$ une **base** du plan.
- Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$, on dit que ce repère est **orthonormé**.

Remarque : tout triangle isocèle et rectangle permet de définir un repère orthonormé.

Théorème

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

- Pour tout point M, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ces réels sont appelés les **coordonnées de M** dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (α, β) tel que $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Ces réels sont appelés les **composantes de $\vec{u}$** dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Définition

Soient O un point de l'espace et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

- On dit que $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un **repère cartésien de l'espace**.
- Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, et $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, ce repère est **orthonormé**.

Théorème

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M , il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ces réels sont appelés les **coordonnées de M** dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels (α, β, γ) tel que $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Ces réels sont appelés les **composantes de $\vec{u}$** dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

2.2) Calculs dans un repère**Théorème (dans le plan)**

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ pour tout réel k .
- Si le repère est orthonormé, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple : déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , où $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(-4, -1)$. Donner alors une équation cartésienne de ce cercle.

Remarque : choisir un repère adapté à la figure étudiée pour avoir des coordonnées simples.

Théorème (dans l'espace)

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ pour tout réel k .

3/ Produit scalaire de deux vecteurs

3.1) Définitions et caractérisations

Définition On appelle **produit scalaire des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.

On notera $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ le **carré scalaire de $\vec{u}$** . Il vaut $\|\vec{u}\|^2$.

Remarques :

- ① Ainsi, $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$. C'est une relation essentielle en géométrie.
- ② De plus, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ avec égalité ssi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple : traiter le cas de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ avec A, B et C trois points alignés.

Proposition

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

3.2) Propriétés fondamentales

Théorème (symétrie et bilinéarité)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Exemple : soient A, B et C trois points du plan.

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ pour tout point M.
- 2) En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Corollaire (identités remarquables)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Exemple : soit ABCD un parallélogramme. Montrer que $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.
En déduire que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

3.3) Expression dans une base orthonormée

Théorème (dans le plan)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 Alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$ et $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Remarque : ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.

Notons que le produit scalaire permet d'accéder aux mesures d'angles, dans le plan aussi bien que dans l'espace :

Définition La mesure de l'angle (non orienté) de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'unique réel $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

Théorème (dans l'espace)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 Alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$ et $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Remarque : en particulier, $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$ et $z = \vec{u} \cdot \vec{k}$.

Exemple : soient A(2, 2, 3) et B(1, -1, 1). Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.

4/ Déterminant de deux vecteurs du plan

On se place ici dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4.1) Définition et interprétation

Définition On appelle *déterminant des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.

Exemple : comme $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée directe, on a $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$.

Proposition

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Interprétations géométriques

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.
- L'aire d'un triangle ABC est $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

4.2) Propriétés fondamentales**Théorème (antisymétrie et bilinéarité)**

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et λ un réel. Alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$$

$$\det(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v})$$

Théorème (expression dans une b.o.n.d.)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Remarque : en particulier $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

5/ Droites et cercles du plan**5.1) Vecteurs directeurs et vecteurs normaux****Définition**

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{u}, \vec{n}$ deux vecteurs **non nuls** du plan. On dit que :

- $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathcal{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- $\vec{n}$ est un **vecteur normal** de $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarques :

- 1) les vecteurs directeurs d'une droite ont pour direction commune cette droite ;
- 2) les vecteurs normaux d'une droite sont tous colinéaires car orthogonaux à celle-ci.
- 3) L'angle entre deux droites est celui entre leurs vecteurs directeurs ou normaux.

Théorème

Soient A un point du plan et $\vec{u}$, $\vec{n}$ deux vecteurs **non nuls** du plan.

- La droite passant A et dirigée par $\vec{u}$ est $(A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{P} \mid \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0\}$.
- La droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$.

Remarque : ne voit-on pas apparaître des équations de droites ?

5.2) Projection orthogonale sur une droite

Définition On appelle **projeté orthogonal d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$** le point M si celui-ci appartient à $\mathcal{D}$, et l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $(MH) \perp \mathcal{D}$ sinon.

Remarque : si $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$, ce projeté est l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$.

Proposition

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M .
On dit ainsi que MH est **la distance de M à $\mathcal{D}$** et on la note $d(M, \mathcal{D})$.

PREUVE – c'est une conséquence du théorème de Pythagore.

Théorème (produit scalaire et projeté orthogonal)

Soient A, B et C trois points du plan (avec $A \neq B$) et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) . Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$.

Remarque : ceci permet d'établir les diverses propriétés du produit scalaire.

5.3) Représentations paramétriques et équations de droites**Théorème (représentation paramétrique d'une droite)**

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan, $A(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Pour tout point $M(x, y)$ du plan, on a

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \text{ si, et seulement si, il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha \\ y = y_0 + \lambda \beta \end{cases}$$

Remarques : à partir d'une telle représentation, on retrouve un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On peut également en déduire une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Exemple : appliquer ceci à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$

Théorème

- Toute droite du plan de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
- Réciproquement, soient a, b et c des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Remarque : une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\vec{u} = -b\vec{i} + a\vec{j}$.

Exemple : à quelles conditions les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont-elles perpendiculaires ? parallèles ?

Théorème

Soient $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $M(x_0, y_0)$ un point du plan.

La distance les séparant est $d(\mathcal{D}, M) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple : soient $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(-4, -1)$. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Intersections de Droites

L'intersection de deux droites non parallèles est un point du plan. Pour le déterminer, on peut procéder de deux façons distinctes :

- 1) on résout le système linéaire constitué des équations cartésiennes de ces deux droites ;
- 2) on injecte la représentation paramétrique de l'une dans l'équation cartésienne de l'autre, et l'on résout l'équation du premier degré obtenue.

Exemple : déterminer l'intersection de (AB) et (CD), avec $A(1; 1)$, $B(2; 5)$, $C(3; 2)$ et $D(6; 3)$.

5.4) Cercles du plan

Définition Soient Ω un point du plan et $R \geq 0$ un réel.

On appelle **cercle de centre Ω et de rayon R** l'ensemble $\{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = R\}$.

Exemple : l'intersection des médiatrices d'un triangle non-aplati ABC est le centre de l'unique cercle passant par les 3 sommets de ce triangle.

Théorème (équation de cercle)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R \geq 0$. Pour tout point $M(x, y)$, on a

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Exemple : déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 25 = 0$.

Théorème (représentation paramétrique d'un cercle)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R \geq 0$. Pour tout point $M(x, y)$, on a

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \text{ si, et seulement si, il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases}$$

Remarque : cette représentation est peu utilisée en pratique car elle se prête mal aux calculs.

En pratique

Pour étudier les intersections de droites et de cercles, on injecte les représentations paramétriques des droites dans les équations des cercles (noter que la différence de deux équations de cercles fournit une équation de droite).

Exemple : on considère les points $A(0; 1)$, $B(2; 5)$, $C(2; 2)$ et $D(6; 4)$.

- 1) Déterminer l'intersection du cercle de diamètre $[AB]$ et de la droite (CD) .
- 2) Déterminer l'intersection des cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$.

6/ Droites et plans de l'espace**6.1) Plans de l'espace****Définition**

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs **non nuls**. On dit que :

- $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** du plan $\mathcal{P}$ s'il existe deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- $(\vec{u}, \vec{v})$ est **une base** de $\mathcal{P}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.
- $\vec{n}$ est un **vecteur normal** du plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$.

Remarque : les vecteurs normaux d'un même plan sont tous colinéaires. Ils permettent de préciser les positions relatives de deux plans (parallèles ou sécants, perpendiculaires); en particulier, l'angle de ces plans est l'angle de deux de leurs vecteurs normaux.

Proposition

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$.

Remarque : les plans jouent dans l'espace le même rôle que les droites dans le plan. On retrouvera ainsi beaucoup de notions similaires (équations, projeté orthogonal, distances).

6.2) Projection orthogonale sur un plan

Définition On appelle **projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$** le point M si celui-ci appartient à $\mathcal{P}$, et l'unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que $(MH) \perp \mathcal{P}$ sinon.

Remarque : si $\mathcal{P} = (A, \vec{u}, \vec{v})$, alors H est l'unique point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{MH} \perp \vec{v}$.

Proposition

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
On dit ainsi que MH est **la distance de M à $\mathcal{P}$** et on la note $d(M, \mathcal{P})$.

6.3) Représentations paramétriques et équations de plans

Théorème (représentation paramétrique)

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soient $\mathcal{P}$ un plan, $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Alors

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \text{ si, et seulement si, il existe } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

Remarque : cette représentation n'est pas d'un grand intérêt pratique.

Théorème

- Tout plan de l'espace de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Soient a, b, c et d des réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Exemple : retrouver un point et deux vecteurs directeurs à partir de l'équation cartésienne.

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point.

La distance les séparant est $d(\mathcal{P}, M) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Exemple : soient $A(1, 0, 2)$, $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{j}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = (A; \vec{u}; \vec{v})$, puis calculer la distance de O à $\mathcal{P}$.

6.4) Droites de l'espace

De même que les plans et leurs positions relatives sont caractérisés par leurs vecteurs normaux, les droites, elles, le sont par leurs vecteurs directeurs. Ainsi, les angles entre droites et / ou plans se retrouvent en utilisant les vecteurs directeurs des droites et les vecteurs normaux des plans.

Théorème (représentation paramétrique)

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

Remarque : cette représentation est très pratique pour étudier des intersections. De plus, en éliminant λ entre les équations, on aboutit à un système de deux équations de plans sécants.

Exemple : prenons la droite $\mathcal{D} = (A; \vec{u})$ où $A(1; 3; -2)$ et $\vec{u}(0; 1; -1)$.

- 1) L'écrire comme intersection de deux plans.
- 2) Déterminer son intersection avec la sphère de centre $B(2, 1, 0)$ et de rayon 4.

Théorème

- L'intersection de deux plans non parallèles est une droite qui admet un système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
 avec (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) non proportionnels.
- Réciproquement, toute droite de l'espace admet un tel système d'équations.

Remarque : en résolvant le système d'équations, on aboutit à une représentation paramétrique de la droite, d'où les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur.

Projection orthogonale sur une droite

La définition est identique dans le plan et dans l'espace. En particulier, le projeté orthogonal H d'un point M sur la droite $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ est caractérisé par $\overrightarrow{AH} = \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

XV – Les statistiques descriptives

1/ Généralités

Les statistiques consistent à extraire de l'information à partir d'un ensemble de données. Contrairement aux probabilités, où l'on modélise une expérience aléatoire afin de déterminer la probabilité de certains événements, on utilise en statistiques les résultats d'une expérience aléatoire pour construire un modèle permettant d'expliquer au mieux ces observations.

1.1) Population statistique

Définition • Une **population** (statistique) est un ensemble fini d'éléments soumis à une étude.
• Les éléments de la population sont appelés **individus**.
• Le nombre total d'individus est appelé **effectif total** ou **taille** de la population.
• Une partie de la population est appelée **échantillon** de la population.

Exemple : les professeurs de la BCPST1 forment une population statistique d'effectif total égal à 9. Les professeurs de sciences forment un échantillon de taille 4 de cette population.

1.2) Caractère et modalité

Définition Un **caractère** (ou **variable statistique**) est une donnée que l'on peut observer sur les individus d'une population. Ce caractère est dit **quantitatif** lorsqu'il prend des valeurs numériques mesurables et **qualitatif** sinon.

Exemple : la taille, le poids et l'âge sont des caractères quantitatifs ; la couleur des yeux ou des cheveux, le code postal sont des caractères qualitatifs.

Remarque : on ne traite pas de la même manière les caractères quantitatifs et qualitatifs. En particulier, les calculs de moyenne ou de variance n'ont aucun sens pour ces derniers. Dans ce cours, nous nous intéresserons essentiellement aux variables quantitatives.

Définition Une **série statistique** est la donnée d'une population et d'un ou plusieurs caractères portant sur cette population. On parle de :
• **statistiques univariées** lorsque l'on observe un caractère par individu.
• **statistiques bivariées** lorsque l'on mesure deux caractères par individu.

Remarque : une fois choisi le caractère étudié, les statistiques ignorent les individus au profit des valeurs du caractère. Par exemple, si l'on étudie la taille d'une population, on ne retient pas la taille de telle ou telle personne mais juste le fait qu'un individu a une taille donnée.

Définition

- Les valeurs (distinctes) prises par un caractère s'appellent les **modalités** de ce caractère. Pour décrire un caractère x , on peut donner la liste de ses modalités et noter $x = (x_1, \dots, x_p)$. On dit alors que x est **discret**.
- Lorsque les modalités sont trop nombreuses, on les regroupe en intervalles de valeurs appelés **classes** et dont les longueurs sont appelées **amplitudes**. On dit alors que x est **continu**.

Exemple : si l'on étudie la taille d'une population, on peut utiliser les classes suivantes

$$\{]0;140[, [140;150[, [150;160[, \dots, [190;200[, [200;+\infty[\}$$

Remarques :

- ❶ Les différentes classes doivent former une **partition** de l'ensemble des modalités, ce qui signifie qu'elles sont deux à deux disjointes et que leur réunion vaut cet ensemble. De la sorte, toute modalité appartient à une et une seule classe.
- ❷ En outre, on suppose souvent que la répartition au sein de chaque classe est **uniforme**, ce qui permet de la remplacer par son centre lors des calculs de moyenne (par exemple).

2/ Statistiques univariées

Dans cette partie, une population d'effectif total N est étudiée à travers un caractère quantitatif discret x dont les modalités $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$ sont rangées dans l'ordre croissant. Les diverses notions exposées s'adaptent facilement au cas d'un caractère continu.

2.1) Effectifs et fréquences

Définition (effectifs)

- Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle **effectif** de la modalité x_k le nombre n_k d'individus pour lesquels le caractère prend la valeur x_k . Ces données, qui constituent la série statistique de x , sont habituellement rangées dans un tableau à deux lignes modalités / effectifs :

Modalités	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_p
Effectifs	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_p

- Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle **effectif cumulé croissant** de la modalité x_k le nombre $n_1 + \dots + n_k$ d'individus pour lesquels le caractère prend une valeur inférieure ou égale à x_k .

Remarque : la somme des effectifs vaut l'effectif total, c'est-à-dire $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$.

Exemples :

- ❶ On classe suivant leurs pointures les chaussures vendues dans un magasin en un mois

Pointure	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Effectif	10	20	30	131	241	122	112	154	290	124	30	20	16
Eff. cumulé	10	30	60	191	432	554	666	870	1160	1284	1314	1334	1350

② On classe en fonction de leur nombre d'habitants les villes d'un département donné :

Nombre d'habitants	[0, 100[	[100, 1000[	[1000, 10000[	[10000, 80000]
Effectif	102	143	27	2
Effectif cumulé	102	245	272	274

L'effectif d'une modalité n'est pas une information suffisante en soi car elle ne prend pas en compte l'effectif total. Pour remédier à ce problème, on introduit la notion de fréquence (on conservera les notations de la définition précédente tout au long de la partie 2).

Définition (fréquences)

- Pour tout $k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, on appelle **fréquence** de la modalité x_k le réel $f_k = \frac{n_k}{N}$.
C'est la fréquence d'apparition d'individus pour lesquels le caractère prend la valeur x_k .
- Pour tout $k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, on appelle **fréquence cumulée croissante** de la modalité x_k le réel $f_k = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{N}$. C'est la fréquence d'apparition d'individus pour lesquels le caractère prend une valeur inférieure ou égale à x_k .

Proposition

La somme des fréquences vaut toujours 1.

Exemple : reprendre les exemples précédents.

2.2) Représentations graphiques

Pour faciliter la visualisation des séries statistiques, les fréquences sont représentées graphiquement sous forme de diagrammes. Voici les plus usuels.

(a) Le diagramme en bâtons

C'est une suite de fins rectangles de hauteurs proportionnelles aux fréquences.

(b) Le diagramme circulaire

C'est un disque découpé en différents secteurs dont les angles au centre sont proportionnels aux fréquences. Les normands parlent aussi de *diagramme camembert*.

(c) L'histogramme

On l'utilise pour les caractères continus. C'est une suite de rectangles dont les bases sont proportionnelles aux amplitudes des différentes classes et dont les **surfaces** (et non les hauteurs) sont proportionnelles à leurs fréquences.

(d) Le polygone des fréquences cumulées croissantes

Il représente la fonction qui à x associe la fréquence d'apparition d'individus pour lesquels le caractère prend une valeur inférieure ou égale à x . C'est une courbe en escalier qui effectue un saut de f_k au niveau de chaque modalité x_k .

Dans le cas d'un caractère continu, on trace une ligne brisée qui monte de f_k le long de la k^e classe. On peut déterminer son équation pour calculer précisément les intersections utilisées plus loin.

2.3) Caractéristiques de position

Elles permettent de voir autour de quelles valeurs se concentrent les valeurs prises par le caractère étudié dans la série statistique.

Définition (mode et classe modale)

On appelle **mode** d'un caractère discret une valeur d'effectif maximal, et **classe modale** d'un caractère continu une classe de rapport effectif / amplitude maximal.

Remarque : sur un diagramme en bâtons ou un histogramme, cela correspond aux rectangles de hauteur maximale (et il peut y en avoir plusieurs).

Exemples : ce sont 42 pour les chaussures, et $[0 ; 100[$ pour les villes.

Définition (moyenne)

On appelle **moyenne** du caractère x le réel $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p n_k x_k = \sum_{k=1}^p f_k x_k$.

Dans le cas d'un caractère continu, on prendra les centres des classes à la place des x_k .

Remarque : la moyenne est très sensible aux valeurs hors-norme. Pour y remédier, on exclut souvent les 10% des valeurs les plus hautes et les 10% des valeurs les plus basses.

Proposition (linéarité de la moyenne)

Soient x et y deux caractères d'une même population tels que $y = ax + b$, avec a et b deux réels. Alors $\bar{y} = a\bar{x} + b$.

Remarques :

- ❶ Si le caractère x vérifie $x_k \in [a ; b]$ pour tout k , alors $\bar{x} \in [a ; b]$.
De la même manière, si $x_k \leq y_k$ pour tout k , alors $\bar{x} \leq \bar{y}$.
- ❷ Si x a une moyenne $\bar{x}_1$ sur une population de taille N_1 et une moyenne $\bar{x}_2$ sur une autre population de taille N_2 , alors sa moyenne sur la réunion des deux populations est $\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$. Ceci permet ainsi d'actualiser une moyenne après l'acquisition de nouvelles données.

Définition (médiane)

- On appelle **médiane** de la série statistique la valeur M_e qui partage la population en deux parties égales : le caractère x prend une valeur strictement inférieure à M_e pour la moitié des individus et une valeur supérieure à M_e pour l'autre moitié.
- Lorsque $N = 2n + 1$ est impair, la médiane est x_{n+1} .
Lorsque $N = 2n$ est pair, on prend pour médiane la moyenne de x_n et x_{n+1} .

Remarques :

- ❶ Contrairement à la moyenne, la médiane est insensible aux valeurs extrêmes.
- ❷ Graphiquement, la médiane est l'abscisse du point d'intersection du polygone des fréquences cumulées croissantes et de la droite d'équation $y = 1/2$ (si cette intersection est un segment horizontal, on prend son milieu).
- ❸ Dans le cas d'un caractère continu, on appellera de même classe médiane la classe qui partage la population en deux. Elle contient la médiane.

Exemples : la médiane est 42 (chaussures) / la classe médiane est [100 ; 1000 [(villes).

2.4) Caractéristiques de dispersion

On s'intéresse désormais à la dispersion du caractère autour des valeurs de référence.

Définition (étendue)

On appelle **étendue** du caractère x la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série statistique. Elle donne une idée de son étalement.

Exemples : 12 pour les chaussures / 80 000 pour les villes.

Remarque : l'étendue est très sensible aux modalités extrêmes de la série.

Définition (variance et écart-type)

- On appelle **variance** de x le réel positif $V_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p n_k (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^p f_k (x_k - \bar{x})^2$.
- On appelle **écart-type** du caractère x le réel positif $s_x = \sqrt{V_x}$.

Remarques :

- ❶ la variance est en fait **la moyenne des écarts quadratiques**. Elle mesure la dispersion de la série statistique autour de sa moyenne et est peu sensible aux rares valeurs extrêmes.
- ❷ L'écart-type s_x possède la même unité que le caractère x , et il est nul uniquement pour un caractère constant.

Proposition (formule de Kœnig-Huygens)

On a $V_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$: la variance est la moyenne du carré moins le carré de la moyenne.

Proposition

Soient x et y deux caractères d'une même population tels que $y = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $V_y = a^2 V_x$ et $s_y = |a| s_x$.

On généralise la notion de médiane en découpant la population en 4 puis en 10 parties.

Définition (quartiles)

- Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur de x telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- Le **deuxième quartile** Q_2 est la médiane.
- Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur de x telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série lui soient inférieures.
- L'**écart interquartile** est la différence $Q_3 - Q_1$. C'est la longueur de l'**intervalle interquartile** $[Q_1 ; Q_3]$, qui contient environ la moitié de la population.

Remarque : graphiquement, le k^e quartile Q_k est en fait l'abscisse du point d'intersection du polygone des fréquences cumulées croissantes et de la droite d'équation $y = k/4$.

Définition (déciles)

- Pour $k \in \llbracket 1 ; 10 \rrbracket$, le k^e **décile** D_k est la plus petite valeur de x telle qu'au moins $10k$ % des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
- L'**écart interdécile** est la différence $D_9 - D_1$. C'est la longueur de l'**intervalle interdécile** $[D_1 ; D_9]$, qui contient environ 80 % de la population.

Remarque :

- ❶ Graphiquement, le k^e décile D_k est l'abscisse du point d'intersection du polygone des fréquences cumulées et de la droite d'équation $y = k/10$.
- ❷ L'écart interdécile est un indicateur que l'on préfère à l'étendue car on s'est débarrassés des valeurs extrêmes souvent peu significatives (erreurs de mesure, etc...)

On retrouve ces différents indicateurs sur les « boîtes à moustache » croisées dans le secondaire.

3/ Statistiques bivariées

Dans toute cette partie, une population d'effectif total N est étudiée à travers deux caractères quantitatifs discrets x et y dont les modalités $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_q)$ sont rangées dans l'ordre croissant.

3.1) Effectifs et fréquences conjoints

Définition (effectifs conjoints et marginaux)

- Soient $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 1; q \rrbracket$. Le couple (x_k, y_ℓ) est une **modalité conjointe** de (x, y) et son **effectif conjoint** est le nombre $n_{k,\ell}$ d'individus pour lesquels $x = x_k$ et $y = y_\ell$.
- Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle **effectif marginal** de x_k le nombre $n_{k,\bullet}$ d'individus pour lesquels le caractère x prend la valeur x_k . Il vérifie $n_{k,\bullet} = \sum_{\ell=1}^q n_{k,\ell}$.
- Pour tout $\ell \in \llbracket 1; q \rrbracket$, on appelle **effectif marginal** de y_ℓ le nombre $n_{\bullet,\ell}$ d'individus pour lesquels le caractère y prend la valeur y_ℓ . Il vérifie $n_{\bullet,\ell} = \sum_{k=1}^p n_{k,\ell}$.

Remarques :

- ❶ L'ensemble de ces données constitue la série statistique double de (x, y) .
- ❷ On peut ranger les effectifs conjoints dans un tableau à double entrée, en rajoutant les effectifs marginaux au bout des lignes et des colonnes (ce sont les sommes des effectifs de la ligne ou de la colonne correspondante).
- ❸ Les effectifs marginaux ont pour somme l'effectif total.

Définition (fréquences conjointes et marginales)

On définit de la même façon la **fréquence conjointe** et la **fréquence marginale** en divisant les effectifs conjoints et marginaux par l'effectif total.

3.2) Représentation graphique

Pour visualiser une série statistique double, on utilise un **nuage de points** défini de la manière suivante : chaque modalité (x_k, y_ℓ) est représentée par un disque de centre $C_{k,\ell}(x_k, y_\ell)$ et de surface proportionnelle à la fréquence conjointe $f_{k,\ell}$.

Définition (point moyen)

Le **point moyen** de la série statistique double de (x, y) est le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

Remarques :

- ❶ Le point moyen est le barycentre des points du nuage pondérés par leurs fréquences.
- ❷ C'est le seul indicateur de position dont on dispose en statistique bivariée.

3.3) Covariance et coefficient de corrélation

On cherche maintenant à savoir si les caractères x et y sont liés. On va pour cela généraliser aux couples la notion de variance.

Définition (covariance)

On appelle **covariance** des caractères x et y le réel

$$s_{x,y} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq q}} n_{k,\ell} (x_k - \bar{x})(y_\ell - \bar{y}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq q}} f_{k,\ell} (x_k - \bar{x})(y_\ell - \bar{y})$$

Remarque : c'est une mesure de l'influence mutuelle de x et y , qui ont tendance à varier dans le même sens lorsqu'elle est positive et dans des sens opposés lorsqu'elle est négative.

Proposition (formule de Kœnig-Huygens)

On a $s_{x,y} = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}$: la covariance est la moyenne du produit moins le produit des moyennes.

Proposition

On a $s_{x,x} = V_x$ et $V_{x+y} = V_x + 2s_{x,y} + V_y$.

Définition (coefficient de corrélation)

On appelle **coefficient de corrélation (affine)** des caractères x et y le réel $r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y}$.

Remarque : c'est un nombre sans unité qui a le même signe que la covariance.

Proposition

- Le coefficient de corrélation appartient à l'intervalle $[-1; 1]$.
- Il vaut ± 1 si, et seulement si, il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $y = ax + b$.

Remarque : le coefficient de corrélation affine indique si les caractères x et y sont liés.

- S'il est proche de 1 ou -1 , ils sont fortement liés ou **corrélés** et le nuage de points se concentre autour d'une droite.
- S'il est proche de 0, ils ne sont pas corrélés et le nuage de points mérite son nom.

Attention cependant, il n'y a pas forcément de lien de causalité entre deux caractères corrélés, qui peuvent tout simplement dépendre d'un tiers caractère.

3.4) Ajustement affine

On suppose dans cette dernière partie que l'on a mesuré les caractères x et y sur les N individus de la population, et que l'on dispose des N couples deux à deux distincts $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$.

Les effectifs conjoints $n_{k,l}$ valent dans ce cas 1 si $k = l$ et 0 sinon. De plus, le nuage de points est constitué de points et non plus de disques de tailles variées.

Lorsque le coefficient de corrélation est proche de ± 1 , le nuage de points se concentre autour d'une droite ... que l'on va chercher à déterminer.

Définition (droite de régression)

On appelle **droite de régression linéaire** de y par rapport à x la droite passant par le point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$ et de pente $a = \frac{S_{x,y}}{V_x}$.

Proposition

La droite de régression linéaire a pour équation $Y = aX + b$, avec $a = \frac{S_{x,y}}{V_x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Théorème

Cette droite est l'unique droite d'équation $Y = aX + b$ qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre la droite et les points du nuage, c'est-à-dire la grandeur

$$S = \sum_{k=1}^N (y_k - (ax_k + b))^2$$

Remarque : on dit pour cette raison que l'on obtient la droite de régression linéaire à l'aide de la **méthode des moindres carrés**. C'est une bonne approximation du nuage de points lorsque le coefficient de corrélation est grand.

Autres ajustements

On est amenés à croiser d'autres relations entre les caractères x et y , que l'on peut déterminer à l'aide d'un ajustement affine sur d'autres caractères. Par exemple :

- ❶ Si l'on penche pour une relation de la forme $y = C \exp(ax)$, on étudie alors $(x, \ln y)$.
- ❷ Si l'on opte pour une relation de la forme $y = Cx^a$, on étudie $(\ln x, \ln y)$.

Tout dépend du modèle qui se cache derrière les caractères.

XVI – Les polynômes réels

1/ Les fonctions polynomiales

1.1) Définitions

Définition On appelle *fonction polynomiale* ou *polynôme* toute fonction réelle de la forme

$$P : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ avec } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suite de réels nulle à partir d'un certain rang.}$$

Remarques :

- ❶ Un tel polynôme se note formellement $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ à l'aide d'une **indéterminée** X .
- ❷ Les nombres (a_n) sont appelés les **coefficients** du polynôme.
- ❸ Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul** et noté 0.
- ❹ L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et d'indéterminée X se note $\mathbb{R}[X]$.

Proposition

L'écriture d'un polynôme est unique. Par conséquent :

- Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux.

Définition On associe à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ son **degré** noté $\deg(P)$ et défini par

$$\deg(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P = 0 \\ n & \text{si } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0 \end{cases}$$

Exemples : on a $\deg(4) = 0$ et $\deg(X + 4X^3 - 5X^2 + 3) = 3$.

Remarques :

- Si $P \neq 0$, le coefficient $a_{\deg(P)}$ s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme P .
- Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est appelé **polynôme unitaire**.

Définition *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.*

Exemple : montrer que cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.2) Opérations sur les polynômes

Théorème

Les sommes, produits, composées et dérivées de polynômes sont encore des polynômes.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, P et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

- $\deg(P + Q) \leq \max \{ \deg(P); \deg(Q) \}$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$.

Exemple : pour $P = X^2 + 1$ et $Q = -X^2$, on a $\deg(P) = \deg(Q) = 1$ mais $\deg(P + Q) = 0$.

Proposition

Soient P et Q deux polynômes tels que $P \neq 0$, $Q \neq 0$ et $P \circ Q \neq 0$.

On a $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Remarque : attention quand on applique cette formule avec Q constant, le polynôme $P \circ Q$ peut être nul ou pas et la formule $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ est invalide.

Contre-Exemples : $Q = 2$ et $P = X - 2$; $Q = 0$ et $P = X^3 + 1$.

Proposition

Soit $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. Son polynôme dérivé est $P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$.

Remarque : on retrouve toutes les règles de calcul classiques sur les dérivées.

Exemple : Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée m -ième de X^n .

Proposition

Soit P un polynôme. Si P est constant, $P' = 0$. Sinon, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

En particulier, $P^{(m)} = 0$ pour tout entier $m > \deg(P)$.

2/ Racines d'un polynôme

2.1) Définitions

Définition Un réel α est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
On dit que c'est une solution de l'équation algébrique $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : $X^2 - 1$ a pour racines 1 et -1 , mais $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.

Proposition

Tout polynôme P de degré **impair** admet au moins une racine réelle.

PREUVE – en effet, sa continuité et ses limites impliquent que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Théorème (factorisation)

Un réel α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, P se factorise par $(X - \alpha)$.

Remarque : cela marche aussi avec plusieurs racines distinctes.

Exemple : 2 est racine de $X^2 - 3X + 2$, qui se factorise en $(X - 2)(X - 1)$

On dispose de trois méthodes pour effectuer la factorisation :

- 1) procéder par identification (pas terrible, source d'erreurs multiples)
- 2) poser la division euclidienne (mieux ... cela permet aussi de simplifier des quotients)
- 3) utiliser l'algorithme de Horner (très puissant et sans danger !)

Exemple : factoriser si possible $P = X^3 + 4X^2 - 4X + 5$ par $X + 5$ et par $X - 3$.

2.2) Nombre de racines

On peut noter que le polynôme nul possède une infinité de racines sur $\mathbb{R}$. C'est le seul :

Proposition

Un polynôme de degré n possède au plus n racines.

PREUVE – notons m le nombre de racines du polynôme P . Comme P est divisible par un produit de m facteurs de degré 1, alors $\deg(P) \geq m$.

Corollaire

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

Exemple : deux polynômes de degré n qui ont $n + 1$ valeurs en commun sont égaux.

Proposition

Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant exactement n racines s'écrit sous la forme

$$P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$$

Remarque : c'est le cas des trinômes de discriminant strictement positif.

2.3) Racines multiples

Définition Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est racine de P de multiplicité m lorsque l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$
- (ii) P est divisible par $(X - \alpha)^m$ mais pas par $(X - \alpha)^{m+1}$.

Remarque : une racine α est racine multiple ssi $P'(\alpha) = 0$.

Exemple : déterminer les racines de $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ avec leurs multiplicités. On pourra montrer que l'algorithme de Horner permet d'effectuer des factorisations.

Proposition

Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant exactement n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité s'écrit sous la forme

$$P = a_n (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_r)^{m_r}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$ et $\sum_{i=1}^r m_i = n$.

XVII – Les développements limités

1/ Définition et premières propriétés

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0, sur un intervalle I

1.1) Développements limités en 0

Définition On dit que f admet **un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0** s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

On parlera en abrégé de **DL_n en 0**. Cette expression sert aussi à désigner la somme.

Exemple : on a $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$ donc $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Que dire alors de $\frac{1+x}{1-x}$?

Proposition (unicité du DL)

Si f admet un DL_n en 0, celui-ci est unique.

Corollaire (troncature de DL)

On suppose que la fonction f admet $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ pour DL_n en 0.

Pour tout $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, elle admet alors $\sum_{k=0}^p a_k x^k$ pour DL_p en 0

Corollaire (DL et parité)

On suppose que f admet un DL_n en 0.

- Si la fonction f est paire, alors son DL_n est pair.
- Si la fonction f est impaire, alors son DL_n est impair.

Exemples : les DL des fonctions sin et cos, que l'on verra plus bas. Cas des polynômes.

DL et régularité

On montre facilement les propriétés suivantes :

- Si f admet un DL_0 en 0, elle est continue en 0.
- Si f admet un DL_1 en 0, elle est dérivable en 0.

Attention, une fonction ayant un DL_2 en 0 n'est pas forcément deux fois dérivable en 0. Penser au cas de la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x)$.

1.2) Développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor-Young nous assure que si f est n fois dérivable et de dérivée n -ième continue sur I , alors

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

C'est le cas des fonctions usuelles, pour lesquelles on obtient les DL_n suivants en 0 :

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$... car $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$
- $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$... car $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha+1-n)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

1.3) Développements limités en a et en l'infini

Si l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un réel a , on pose $h = x - a$ et l'on établit un DL en 0 de la fonction $g : h \mapsto f(a+h)$. Ceci nous fournit un développement de f en $x - a$, que l'on appelle **DL en a** .

Exemple : donner le DL_3 en 2 de $\exp$.

Si l'on veut étudier une fonction f au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $h = 1/x$ et l'on établit un DL en 0 de la fonction $g : h \mapsto f(1/h)$. Ceci nous fournit un développement de f en $1/x$, que l'on appelle **DL en l'infini**.

Exemple : donner le DL_2 en $+\infty$ de $f : x \mapsto x/(x+1)$.

2/ Opérations sur les DL

L'utilisation de la formule de Taylor-Young n'est pas la meilleure méthode pour obtenir des DL, car les dérivées n -ièmes peuvent s'avérer rapidement difficiles à calculer. Il faudra plutôt utiliser et combiner les DL des fonctions usuelles.

Proposition (manipulation des fonctions négligeables)

Soient n et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

- $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^p) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ si $p \geq n$ et $x^p + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ si $p > n$.
- $\underset{x \rightarrow 0}{o}(x^p) \times \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^{n+p})$ et $x^p \times \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^{n+p})$.

Remarque : ces règles de calcul permettent d'effectuer des sommes et produits de DL.

Proposition (opérations de base)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose qu'il existe P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(x) = P(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$. Alors :

- $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$.
- $(fg)(x) = R(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$, où $R \in \mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit PQ .

Exemples : déterminer les DL_3 en 0 de $\cos(x + 2)$ et de $\frac{e^x}{1+x}$.

Développement limité d'une composée

Pour calculer le DL_n en 0 de $f \circ g$ **dans le cas où $g(0) = 0$** , il suffit de remplacer f et g par leurs DL_n en 0 **sans oublier les $o(x^n)$** et d'utiliser les règles de calcul vues précédemment. Cela revient à injecter le DL_n de g dans celui de f . Attention toutefois à la valeur de $g(0)$.

Exemples : déterminer les DL_5 en 0 de $\ln(\cos x)$ et de $e^{\cos x}$.

Développement limité d'un quotient

Pour calculer le DL_n en 0 du quotient de deux fonctions, il suffit de se ramener à une expression de la forme $\frac{u(x)}{1-v(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0$. Les DL_n en 0 de u et v permettent alors de conclure par composition et produit.

Exemple : établir le DL_5 en 0 de $\tan$. Montrer la division selon les puissances croissantes.

Proposition (intégration de DL)

Si une fonction continue f admet en un DL_n de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, toute primitive F de f admet un DL_{n+1} en 0 de la forme $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$.

Remarque : attention, on peut intégrer terme à terme les DL mais **surtout pas les dériver!** Ceci nous permet d'établir de nouveaux DL usuels en 0 :

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$

3/ Applications des développements limités

3.1) Étude locale d'une fonction

Un DL à l'ordre n d'une fonction f en a nous permet :

- de calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

- de trouver un équivalent simple de f en a

Exemple : trouver un équivalent en 0 de $x(1 + \cos(x)) - 2 \tan x$.

- de trouver la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a ainsi que sa position (si $n \geq 2$).

Exemple : étudier cette tangente pour $a = 0$ et $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.

3.2) Étude asymptotique d'une fonction

Un DL en l'infini d'une fonction f nous permet encore d'étudier des limites et de trouver des équivalents simples en $+\infty$ ou en $-\infty$. De plus, il nous donne les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ ainsi que leurs positions relatives.

Exemple : étudier l'asymptote en $+\infty$ à la courbe de $f : x \mapsto x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

XVIII – Fonctions usuelles

1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière

1.1) La fonction valeur absolue

Proposition

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des deux demi-droites $[OI]$ et $[OI']$, où $I(1;1)$ et $I'(-1;1)$.

PREUVE – en effet, cette courbe a pour équation $y = x$ si $x \geq 0$ et $y = -x$ sinon.

Proposition

- *La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est pas dérivable en 0.*
- *Sa dérivée est la fonction f définie par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.*

PREUVE – ses restrictions à $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$ sont en effet des fonctions affines. Penser à donner le tableau de variations.

1.2) La fonction partie entière

Proposition

- *Sur chaque intervalle $[n ; n + 1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ la partie entière est constante et vaut n .*
- *Sa courbe est la réunion de segments horizontaux qui forment un escalier infini.*

2/ Logarithme népérien et exponentielle

2.1) La fonction logarithme népérien

Définition *On appelle **logarithme népérien** la primitive sur $]0 ; +\infty [$ de la fonction inverse qui s'annule en 1. On la note **ln**.*

Remarque : ainsi $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour tout $x > 0$; de plus, $\ln$ est dérivable et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Théorème

- La fonction $\ln$ est une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, $\ln < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln > 0$ sur $]1; +\infty[$.
- Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Exemple : montrer que la courbe de $\ln$ est située sous sa tangente en $A(1, 0)$.

Proposition (propriété caractéristique)

On a pour tous réels $x > 0, y > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{\ln(x)}{2}$$

PREUVE – pour la première relation, dériver à y fixé la fonction $g_y : x \mapsto \ln(xy) - \ln(x)$.

2.2) La fonction exponentielle

Définition La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée **la fonction exponentielle**. On la note **exp**.

Remarque : $\exp$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème

- La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
- De plus, elle est dérivable et $\exp' = \exp$.
- Enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition (propriété caractéristique)

On a pour tous réels x, y et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

PREUVE – il suffit de prouver l'égalité des logarithmes.

Définition On pose $\exp(1) = e$ et l'on note alors $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- Le réel e s'appelle le **nombre d'Euler** ; il vaut $e \simeq 2,72$.
- La notation $\exp(x) = e^x$ est motivée par le fait que $\exp(n) = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que l'exponentielle vérifie les mêmes règles de calcul que les puissances entières.

3/ Puissances réelles

3.1) Définition et premières propriétés

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$ si bien que $a^n = e^{n \ln(a)}$. Ceci nous pousse à définir les puissances réelles de a de la manière suivante :

Définition Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose alors $a^b = e^{b \ln(a)}$.

Corollaire Pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $a^b > 0$ et $\ln(a^b) = b \ln a$.

Remarque : on vient ainsi de définir les **puissances réelles de nombres strictement positifs** ; elles vérifient les mêmes règles de calcul que les puissances entières. Pour mémoire :

$$\begin{array}{lll} a^x a^y = a^{x+y} & \frac{1}{a^x} = a^{-x} & \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ (a^x)^y = a^{xy} & a^x b^x = (ab)^x & \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{array}$$

Méthode à retenir :

Lorsque une fonction est définie à l'aide de puissances réelles, on l'exprime comme composée d'exponentielle et de logarithme afin de l'étudier facilement.

3.2) Exponentielles et logarithmes de base quelconque

Définition Soit $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$. On appelle **exponentielle de base a** et l'on note $\exp_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a : x \mapsto a^x$.

Remarque : elle vérifie les mêmes règles de calcul que l'exponentielle « normale ».

Proposition

Pour tout $a > 0$, on a $a^x = e^{x \ln a} > 0$ et $\ln(a^x) = x \ln a$.

Proposition (comportement de $\exp_a$)

- La fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
- Elle se comporte comme $\exp$ si $a > 1$ et comme $1/\exp$ si $0 < a < 1$.
- Dans tous les cas, $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'_a(x) = a^x \ln a$.

Définition On appelle **logarithme décimal** et l'on note **log** la bijection réciproque de $\exp_{10}$.

Elle est définie sur $]0; +\infty[$ par $\log : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Corollaire Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Alors $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$ et

$$y = 10^x \iff x = \log(y)$$

$$\log(10^x) = x$$

$$10^{\log(y)} = y$$

Proposition (comportement de log)

- La fonction $\log$ est une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.

3.3) Fonctions puissances et racines

Définition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance d'exposant α** la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Remarque : ne pas confondre les fonctions puissances et les fonctions exponentielles!!!

Proposition

La fonction f_α est dérivable sur $]0; +\infty[$ et l'on a $(f_\alpha)'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x > 0$.

Exemple : donner les courbes et discuter les prolongements en 0 selon les valeurs de α .

Théorème (cas particulier)

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection entre $]0; +\infty[$ et $]0; +\infty[$.
 - Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.
- Sa bijection réciproque est appelée **racine $n^{\text{ième}}$** et notée $g_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Elle vérifie de plus les relations $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pour tout $x > 0$.

Exemple : montrer que $\sqrt[4]{16^{11}} = 2048$ et que $\sqrt[n]{x} = (-x)^{\frac{1}{n}}$ pour $x < 0$ lorsque n est impair.

3.4) Les croissances comparées

Théorème

Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a |\ln x|^b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^{bx} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty$$

Remarques :

- ❶ Lorsque a et b sont de signes opposés, ces limites ne sont pas des formes indéterminées.
- ❷ Attention à bien se ramener à l'une de ces formes pour les calculs de limites.

Exemple : étudier les limites des fonctions suivantes

(a) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(b) $g : x \mapsto \frac{\sqrt{e^{x+1}}}{x}$

(c) $h : x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + x^2}$

4/ Les fonctions circulaires

4.1) Rappels

Les fonctions sinus et cosinus sont appelées **fonctions circulaires** car elles permettent de repérer la position d'un point sur le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Proposition

- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π -périodiques.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- La fonction $\sin$ est impaire et la fonction $\cos$ est paire.
- Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Exemple : montrer que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|\tan y| \geq |y|$ pour tout $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Proposition

- La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et elle est π -périodique.
- La fonction $\tan$ est impaire.
- Elle est dérivable sur son ensemble de définition et $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$.

Remarque : donner la courbe de la fonction $\tan$ pour visualiser tout ça.

4.2) Les fonctions Arcsinus et Arccosinus

Définition

- La fonction sinus est une bijection continue et croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.
Sa bijection réciproque est appelée Arcsinus et notée $\arcsin$.
- La fonction cosinus est une bijection continue et décroissante de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$.
Sa bijection réciproque est appelée Arccosinus et notée $\arccos$.
- On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x = \arcsin(y) \\ y \in [-1; 1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \arccos(y) \\ y \in [-1; 1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Exemples : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

Théorème

- La fonction $\arcsin$ est une bijection impaire et croissante de $[-1; 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- La fonction $\arccos$ est une bijection décroissante de $[-1; 1]$ sur $[0; \pi]$.
- La fonction $\arcsin$ est dérivable sur $] -1; 1 [$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in] -1; 1 [$.
- Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.

Exemple : tracer les courbes, grâce à la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4.3) La fonction Arctan

Définition La fonction tangente est une bijection continue et croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque est appelée Arctangente et notée $\arctan$. On a donc :

$$\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Théorème

- La fonction $\arctan$ est une bijection impaire et croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : insister sur la symétrie entre les asymptotes des courbes.

Argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$

Afin de stopper la propagation d'idioties que l'on peut trouver sur internet, je vous donne la seule et unique façon de calculer proprement et simplement l'argument d'un nombre complexe à l'aide des fonctions trigonométriques réciproques.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Alors $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ donc $\tan \arg(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ et

$$\begin{cases} \arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

sans oublier que ceci est valable à 2π près.

Exemples : déterminer les arguments de $z_1 = -6 + 6i$ et $z_2 = -12 - 4i$.

XIX – Les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ et ou $\mathbb{C}$: c'est le corps des **scalaires**.

1/ Espaces de matrices

1.1) Les matrices de type (n, p)

Définition Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de type (n, p)** ou encore **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi, le nombre $a_{i,j}$ est le terme situé sur la i -ème ligne et la j -ième colonne de A .

Remarques :

- On parle de matrice ligne lorsque $n = 1$ et de matrice colonne lorsque $p = 1$;
- On assimile en général $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$: on parle alors de **vecteur colonne**.
- On note $0_{n,p}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls : c'est la **matrice nulle**.

Le Mystère des Origines

En fait, les matrices permettent de manipuler les applications linéaires de plusieurs variables. Par exemple, l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - z, x + 3y + 2z)$ est entièrement déterminée par sa matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition La **transposée** de $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice ${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où $a'_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Remarque : tA est ainsi obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Proposition

Pour toute matrice M , on a ${}^t({}^tM) = M$.

1.2) Les matrices carrées

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Exemple : on notera $0_n = 0_{n,n}$ la matrice nulle carrée d'ordre n .

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que **A est diagonale** lorsque $i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.
On note I_n la matrice diagonale dont les termes diagonaux $a_{i,i}$ valent tous 1.
- On dit que **A est triangulaire supérieure** lorsque $i > j \implies a_{i,j} = 0$.
- On dit que **A est triangulaire inférieure** lorsque $i < j \implies a_{i,j} = 0$.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est triangulaire supérieure si, et seulement si, la matrice tA est triangulaire inférieure.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que **A est symétrique** lorsque $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.
- On dit que **A est antisymétrique** lorsque $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- 1) La matrice A est symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$.
- 2) La matrice A est antisymétrique si, et seulement si, ${}^tA = -A$.

Remarque : les ensembles des matrices carrées d'ordre n diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, symétriques et antisymétriques sont notés respectivement $D_n(\mathbb{K})$, $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace de A** le nombre $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Remarque : c'est tout simplement la somme des termes diagonaux de cette matrice.

Exemple : quelle est la trace d'une matrice antisymétrique ?

2/ Opérations sur les matrices

2.1) Définitions

Définition Pour n et $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Motivation du produit matriciel

Une application linéaire de plusieurs variables est représentée à l'aide d'une matrice. Mais comment calculer l'image d'un vecteur par l'application en manipulant cette matrice et le vecteur ? Et que se passe-t-il quand on compose deux applications linéaires ? L'utilisation d'un produit matriciel subtilement défini permet de répondre à ces questions.

Exemple : s'intéresser à deux applications de matrices 2×2 à coefficients inconnus.

Définition Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. On appelle **produit de A par B** la matrice $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; m \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi, le terme $c_{i,j}$ s'obtient en effectuant le **produit scalaire de la i -ième ligne de la matrice A par la j -ième colonne de la matrice B**.

Remarque : il faut que les formats des matrices A et B soient compatibles pour pouvoir définir leur produit AB. En particulier, ce produit matriciel n'est pas du tout commutatif.

Exemples : $I_n A = A I_p = A$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.2) Propriétés des opérations

Proposition (associativité)

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $A(BC) = (AB)C$ que l'on note plus simplement ABC .

Proposition (bilinearité)

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$.

Alors $A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$ et $(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$.

Proposition (propriétés de la transposée)

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Cas des matrices carrées**Proposition**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$ ainsi que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; cependant $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \times \text{tr}(B)$ en général.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Exemple : calculer les puissances des matrices diagonales.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

Exemple : calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Application au système $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$

3/ Application aux systèmes linéaires**3.1) Écriture matricielle d'un système linéaire****Définition**

Considérons le système linéaire (S)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice associée au système (S)**. En lui ajoutant en dernière colonne les valeurs $b_1, b_2, \dots, b_n$, on obtient la **matrice augmentée du système**.

Exemple : prendre un système linéaire 3×3 et montrer sur cet exemple que les opérations sur les équations se traduisent au moyen d'opérations sur la matrice augmentée.

Proposition

Tout système linéaire (S) de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ s'écrit matriciellement

$$AX = B$$

avec $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sa matrice et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ son second membre.

Pour résoudre un système linéaire, on le transforme en un système équivalent à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. En l'occurrence :

Proposition

Si l'on passe d'un système linéaire (S) à un autre système (S') au moyen d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice augmentée de (S') s'obtient en faisant subir la même suite d'opérations à la matrice augmentée de (S).

Remarque : ceci justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

Exemple : mener un pivot de Gauss sous cette forme.

Définition Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes en lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre au moyen d'une suite finie d'opérations sur les lignes. On note alors $A \sim_L A'$.

3.2) Échelonnement et pivot de Gauss

Définition Une matrice est dite **échelonnée en lignes** si elle est triangulaire supérieure et que :

- dès qu'une ligne est entièrement nulle, toutes les suivantes le sont aussi
- le nombre de 0 en début de ligne croît d'une ligne non nulle à la suivante

On appelle alors **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes mais pas la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque : un système linéaire est échelonné ssi sa matrice est échelonnée en lignes.

L'algorithme du **pivot de Gauss-Jordan** permet d'échelonner un système linéaire quelconque. Appliqué à une matrice, il va de la même manière l'échelonner en lignes. Ainsi :

Proposition

Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée en lignes.

Remarque : lorsque l'on implémente la résolution d'un système linéaire, on fait travailler l'ordinateur sur la matrice augmentée du système.

Définition (rang d'une matrice)

- Le **rang** d'une matrice échelonnée en lignes est égal au nombre de pivots.
- Le rang d'une matrice est le rang de toute matrice échelonnée en lignes équivalente en lignes.

Remarque : le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice associée.

4/ Les matrices inversibles

Définition Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $MM' = M'M = I_n$. On la notera alors M^{-1} .
On note de plus $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : on verra plus tard que la condition $MM' = I_n$ implique $M'M = I_n$.

Proposition (inverse et opérations)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors A^{-1} , AB , λA et tA sont inversibles et

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Proposition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$.

Recherche pratique de l'inverse

Pour savoir si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et calculer le cas échéant son inverse, on cherche à résoudre pour $Y \in \mathbb{K}^n$ fixé le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. On exprime ainsi X en fonction de Y , ce qui nous donne $X = A^{-1}Y$.

Exemples : cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 ; la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème

Si A est inversible, le système $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Exemple : résoudre $AX = {}^t(4 \ 2 \ 1)$, où A est la matrice inversée plus haut.

Définition La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a pour **déterminant** le nombre $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Proposition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$.

XX – Nombres et suites réels

1/ Autour de la relation d'ordre

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1.1) Plus grand et plus petit élément

Définition

- On dit que $a \in A$ est le **plus grand élément** de A si $x \leq a$ pour tout $x \in A$.
Quand il existe, le plus grand élément de A est unique et se note **$\max(A)$** .
- On dit que $a \in A$ est le **plus petit élément** de A si $x \geq a$ pour tout $x \in A$.
Quand il existe, le plus petit élément de A est unique et se note **$\min(A)$** .

Exemples : chercher les max et min des intervalles $I_1 = [0; 1]$, $I_2 =]0; 1]$ et $I_3 =]0; 1[$.

1.2) Minorants et majorants

Définition

- On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si $x \leq a$ pour tout $x \in A$.
Dans ce cas, on dira que la partie A est **majorée**.
- On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si $x \geq a$ pour tout $x \in A$.
Dans ce cas, on dira que la partie A est **minorée**.

Remarque : une partie majorée / minorée admet une infinité de majorants / de minorants.

Exemple : déterminer les minorants et majorants de $I = [1; 2[$.

1.3) Borne inférieure, borne supérieure

Définition

- La **borne inférieure** de A est, s'il existe, le **plus grand des minorants** de A , noté **$\inf(A)$** .
- La **borne supérieure** de A est, s'il existe, le **plus petit des majorants** de A , noté **$\sup(A)$** .

Théorème (fondamental)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : ces bornes n'appartiennent pas toujours à l'ensemble (penser à $[0; 1[$). En fait, $\max(A)$ existe ssi $\sup(A) \in A$, et dans ce cas $\max(A) = \sup(A)$. Idem pour min et inf.

Proposition (caractérisation du sup)

Soient $M \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée.

$$\text{Alors } M = \sup(A) \iff \begin{cases} (1) \forall a \in A, a \leq M \\ (2) \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > M - \varepsilon \end{cases}$$

DÉMONSTRATION – la relation (1) signifie que M est un majorant de A . La relation (2) signifie qu'aucun réel strictement inférieur à M n'est un majorant de A . Ainsi, (1) & (2) signifient que M est le plus petit majorant de A , donc sa borne supérieure.

Proposition (caractérisation de l'inf)

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée.

$$\text{Alors } m = \inf(A) \iff \begin{cases} (1) \forall a \in A, a \geq m \\ (2) \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < m + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple : montrer que $\sup (]1;2]) = 2$ et $\inf (]0;+\infty[) = 0$.

2/ Généralités sur les suites

2.1) Définition

Définition

Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- On note u_n l'image de $n \in \mathbb{N}$ par u : c'est le **terme de rang n** (ou **terme général**) de u .
- La suite u est alors notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) .

Exemples : on peut définir les suites de deux manières.

- ① La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est définie **explicitement**.
On peut déterminer ses termes indépendamment les uns des autres.
- ② La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 - 3u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie **implicitement**.
Il faut calculer ses termes les uns après les autres.

Remarque : on peut aussi définir une suite sur $\mathbb{N}^*$ ou même sur $\{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou bien $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est :

- **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- **stationnaire** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geq n_0$;

Remarque : une suite stationnaire est tout simplement constante à partir d'un certain rang.

2.2) Sens de variation

Définition Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est :

- **croissante** lorsque $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **strictement croissante** lorsque $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **décroissante** lorsque $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **strictement décroissante** lorsque $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- ❶ On dira qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.
On parlera de même de suite strictement monotone.
- ❷ Une suite n'est en général ni croissante ni décroissante, comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il y a trois façons d'étudier les variations d'une suite réelle.

(a) Technique algébrique

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ afin de comparer u_{n+1} à u_n .

Dans certains cas, il pourra être intéressant d'écrire $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$.

Exemples : $u_n = -2n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Technique fonctionnelle

Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par une formule du style $u_n = f(n)$, on peut déduire les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de celles de la fonction f .

- Si f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et de même monotonie.
- Cependant, la réciproque est fautive : penser à la fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x) - x$.

Exemples : $u_n = 1 + n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n = -n^2 + 6n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Raisonnement par récurrence

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on représente graphiquement ses premiers termes afin d'observer son comportement avant d'établir par récurrence le résultat pressenti (en général, un encadrement permettant d'étudier les variations ... mais pas forcément).

Exemple : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3) Suites bornées

Définition Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée (c'est-à-dire que $|u_n|$ est majorée).

Exemples :

- ① la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
- ② les suites $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont majorées par 1 et minorées par -1 .
- ③ la suite $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni majorée ni minorée.

Remarque : la technique d'étude dépend de la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si elle est définie par une relation *explicite* $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier la fonction f .
- Si elle est définie par une relation *implicite* $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut procéder par récurrence.

3/ Limite d'une suite

3.1) Suites convergentes

Définition On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: c'est la **limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple : la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème

- Toute suite convergente admet une unique limite. On peut ainsi parler de **la** limite.
- Toute suite convergente est bornée. Attention, la réciproque est fausse.

Proposition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ .

Remarque : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, il suffit de vérifier que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des réels différents ... comme pour $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Une suite convergente de limite ℓ non nulle est de signe constant à partir d'un certain rang.

PREUVE – on applique la définition de la limite pour $\varepsilon = |\ell|/2$.

3.2) Suites divergentes

Définition On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge** si elle ne converge vers aucun réel.

Définition • On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $+\infty$** et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$$

• On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $-\infty$** et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq A$$

Remarque : il y a deux types de suites divergentes, les unes de limite infinie comme $(n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ et les autres sans limite, comme $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans le premier cas, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admettent encore la même limite.

3.3) Les suites de référence**Proposition (suites associées à une fonction)**

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$. Si la fonction f admet une limite en $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet aussi une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Proposition (suites géométriques de raison q)

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Remarque : lorsque $q \in \mathbb{C}$, la suite converge uniquement pour $q = 1$ et $|q| < 1$.

4/ Opérations sur les limites

Aucune différence avec les limites de fonctions.

5/ Comparaisons de suites

5.1) Règles de passage à la limite

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et convergentes.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Corollaire

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq b$.
- Si $u_n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq a$.

Remarque : attention, ceci n'est valable qu'avec des inégalités larges.

5.2) Règles de comparaison

Théorème (des gendarmes)

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel ℓ tels que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Corollaire

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et un réel ℓ tels que :

- $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : étudier les suites de termes généraux $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n = \frac{\sin n}{n}$.

Corollaire Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle converge vers 0.

Théorème (de minoration / de majoration)

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N_0 .

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemple : étudier les suites de termes généraux $u_n = 2n - \sqrt{n^2 + 1}$ et $v_n = 3n + 2 + \cos n$.

5.3) Utilisation des relations de comparaison

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = o(v_n)$ et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ (réelle ou infinie) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

DÉMONSTRATION – on écrit à chaque fois $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$.

Théorème (croissances comparées spécifiques aux suites)

Soient $a > 1$ et $b > 0$ deux réels. Alors $n^b = o_{n \rightarrow +\infty}(a^n)$ et $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$

6/ Les suites monotones

6.1) Limites des suites monotones

Théorème (suites croissantes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

- 1) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$.
- 2) Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : c'est un des théorèmes les plus puissants du chapitre. Il permet en particulier d'établir les convergences de suites récurrentes, dont l'étude était jusque là frustrante.

Exemples :

- ① En comparant $\frac{1}{(n+1)^2}$ à $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}$ converge.
- ② Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (suites décroissantes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante.

- 1) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers $\ell = \inf \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$.
- 2) Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

6.2) Les suites adjacentes

Définition Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** lorsque :

- l'une des suites est croissante et l'autre est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante. Alors :

- il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$;
- on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – notons $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- D'après les hypothèses du théorème, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et de limite nulle. On déduit alors que $0 = \sup \{w_n / n \in \mathbb{N}\}$ d'où $w_n \leq 0$ soit $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $v_n \leq v_0$ si bien que $u_n \leq v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle converge vers un réel ℓ .
- Comme $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en tant que somme de suites convergentes et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell + 0 = \ell$.
- Enfin, $\ell = \sup \{u_n / n \in \mathbb{N}\} = \inf \{v_n / n \in \mathbb{N}\}$ si bien que $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : attention, ce résultat ne permet pas en général de déterminer la limite.

Exemple : cas des suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6.3) Comparaison de sommes et d'intégrales

Soient f une fonction monotone positive définie sur $]0; +\infty[$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de cette suite.

- ❶ Grâce à la monotonie de f , on encadre $f(k)$ entre $\int_k^{k+1} f(t) dt$ et $\int_{k-1}^k f(t) dt$ pour $k > 1$.
- ❷ On déduit en sommant que $S_n - f(1)$ est encadré entre $I_n = \int_1^n f(t) dt$ et $\int_2^{n+1} f(t) dt$.
- ❸ La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante, deux cas se présentent.
 - Si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante majorée donc convergente.
 - Sinon, I_n tend vers $+\infty$ et S_n aussi d'après le théorème de minoration.

Exemple : étudier la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

XXI – Limites et continuité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point ou une borne de I .

1/ Étude locale d'une fonction

1.1) Limite finie

Définition Soit ℓ un réel.

- Si $a \in \mathbb{R}$: on dit que f tend vers ℓ en a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
- Si $a = +\infty$: on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
- Si $a = -\infty$: on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq m \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque : c'est simplement la traduction rigoureuse de la notion intuitive de limite vue précédemment. Elle permet de retrouver les limites usuelles et les opérations sur les limites.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

1.2) Limites infinies

- Définition**
- Si $a \in \mathbb{R}$: on dit que f tend vers $+\infty$ en a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) \geq M$$
 - Si $a = +\infty$: on dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists M_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq M_1 \implies f(x) \geq M$$
 - Si $a = -\infty$: on dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et l'on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq m \implies f(x) \geq M$$

Remarque : autrement dit, la fonction f est minorée par tout réel au voisinage de a .

Définition On dit que f tend vers $-\infty$ en a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = +\infty$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

1.3) Limites et suites

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Si la fonction f admet une limite ℓ en a , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Utilisation pratique : pour montrer que f n'admet pas de limite en a , il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$.

Exemples : étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \lfloor x \rfloor$.

2/ Propriétés des limites

2.1) Généralités

Théorème (unicité de la limite)

Si une fonction f admet une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, celle-ci est unique.
On parle alors de **la** limite de f en a .

Proposition

Les limites de f à gauche et à droite de a sont celles de ses restrictions à $I \cap]-\infty; a[$ et $I \cap]a; +\infty[$.

Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$

Remarque : c'est un résultat essentiel dès que f est définie par différentes expressions.

2.2) Cas des limites finies

Proposition (continuité ponctuelle)

Supposons que f admette une limite finie en un point $a \in I$. Nécessairement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

PREUVE – on applique la définition de la limite dans le cas $x = a$ pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.

Proposition

Si la fonction f admet une limite finie $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en a , elle est bornée au voisinage de a .

Plus précisément : pour $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, si $m < \ell < M$ alors $m < f(x) < M$ au voisinage de a .

Remarque : ainsi, une fonction de limite non nulle en a ne s'annule pas et reste de signe constant (celui de la limite bien évidemment) au voisinage de a .

2.3) Fonctions monotones

Théorème

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]a; b[$.

- 1) Si f est majorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in]a; b[} f(x) \in \mathbb{R}$. Sinon, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
- 2) Si f est minorée sur $]a; b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a; b[} f(x) \in \mathbb{R}$. Sinon, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème

On suppose que f est croissante et que I est un intervalle ouvert. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite de tout point a de I et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x).$$

Remarque : on a des résultats analogues pour une fonction décroissante f .

Exemple : soit f une fonction croissante sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ et telle que la fonction $g : x \mapsto f(x)/x$ soit décroissante sur I . Montrer que f est continue en tout point de I .

3/ Continuité

3.1) Généralités

Définition

- On dit que la fonction f est continue en $a \in I$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On parlera de même de continuité à gauche et à droite en a .
- On dit que la fonction f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I .

Exemples : les fonctions usuelles vues au lycée sont continues sur leurs ensembles de définition. Par contre, la fonction partie entière est discontinue à gauche en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition

Si une fonction f est continue sur un intervalle I , on peut tracer sa courbe sans lever le crayon. Ce n'est évidemment plus le cas pour une fonction définie sur une réunion d'intervalles.

Théorème (opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors les fonctions fg et $\lambda f + \mu g$ sont continues sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors la fonction f/g est également continue sur I .

Exemple : les polynômes et quotients de polynômes sont des fonctions continues.

Théorème (de composition)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I .

Remarque : la plupart des fonctions définies par une expression explicite sont obtenues par composition, produit et somme des fonctions continues, ce qui prouve leur continuité.

Exemple : étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = 2x$ si $x > 0$ et $f(x) = x^3 - 3$ si $x \leq 0$;
- $g(x) = -2x^2$ si $x \leq 0$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$ si $x > 0$.

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers $a \in I$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarque : si f est une fonction continue, une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne peut donc converger que vers un point fixe de f , c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : illustration graphique avec la suite définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

3.2) Restrictions et prolongements**Proposition**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset J$, et f une fonction définie sur J . Si la fonction f est continue sur J , alors sa restriction à I est continue sur I .

Proposition

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a; c[$ et b un point de I . Si f est continue sur $]a; b]$, en b et sur $[b; c[$, alors elle est continue sur $]a; c[$.

Remarque : on utilise ceci quand f est définie par différentes expressions selon les intervalles. Par exemple, étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x \lfloor x \rfloor$ sur l'intervalle $] -1; 1[$.

Théorème (prolongement par continuité)

Soit f une fonction continue, définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_f$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit la fonction F sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$ par $F(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$ et $F(a) = \ell$. Alors cette fonction F est continue et vérifie $f = F|_{\mathcal{D}_f}$: elle **prolonge f par continuité**.

Exemples : prolonger les fonctions définies par $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$.

3.3) Fonctions continues sur un intervalle

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel. On suppose que :

- 1) la fonction f est continue sur $[a; b]$;
- 2) le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe alors un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

DÉMONSTRATION – on construit par récurrence une suite croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\mathcal{P}(n)$: « $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ et k est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$ » soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la manière suivante (méthode de **dichotomie**) :

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, de sorte que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et posons $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.
 - Si k est compris entre $f(c_n)$ et $f(a_n)$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
 - Si k est compris entre $f(c_n)$ et $f(b_n)$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, ces deux suites sont adjacentes et convergent ainsi vers un même réel $c \in [a_0; b_0] = [a; b]$. La fonction f étant continue, la proposition « k est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ » nous conduit après passage à la limite à $k = f(c)$.

Application à la résolution d'équations de la forme $f(x) = k$.

On montre l'existence de solutions avec le TVI et les cerne par balayage avec la calculatrice. De plus, la démonstration du TVI est à la base d'un algorithme de résolution approchée.

Exemple : étudions l'équation $x^3 - 3x - 4 = 0$ sur $[2; 4]$ et cernons ses solutions.

Remarque : on peut également énoncer le TVI avec des limites en a ou en b et non plus des images par f . Une formulation plus générale permet d'englober tous les cas de figure :

Théorème (image d'un intervalle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.

Définition On appelle **segment** tout intervalle fermé borné, c-à-d de la forme $[a; b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème (image d'un segment)

L'image d'un segment par une fonction continue (sur ce segment) est un segment.

En particulier, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Remarque : Si la fonction f est continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, on a donc $f(I) = [m; M]$ où $m = \min_{x \in I} f(x)$ et $M = \max_{x \in I} f(x)$. Il ne reste qu'à débusquer ces extrema.

3.4) Continuité et bijectivité

Théorème (de la bijection)

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel. On suppose que :

- 1) la fonction f est continue sur $[a; b]$
- 2) la fonction f est strictement monotone sur $[a; b]$
- 3) le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Il existe alors un **unique** réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : on peut maintenant dénombrer les solutions d'une équation $f(x) = k$ en se restreignant à des intervalles où f est strictement monotone.

Théorème (bijection entre deux intervalles)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- 1) f réalise une bijection entre I et l'intervalle $J = f(I)$.
- 2) Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
- 3) f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f .

Exemple : définition et courbes des racines n -èmes, de $\ln$.

3.5) Continuité et valeur moyenne

Proposition

La valeur moyenne sur un segment d'une fonction continue fait partie des valeurs atteintes par la fonction. Autrement dit, elle admet un antécédent par f .

PREUVE – en effet, elle est comprise entre le minimum et le maximum de la fonction.

XXII – Dérivabilité

1/ Dérivée en un point et fonction dérivée

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I .

1.1) Définitions

Définition • On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ lorsque la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a . Celle-ci est notée $f'(a)$ et s'appelle le **nombre dérivé en** a .
• On dit que f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I .

Définition • On dit que f est **dérivable à gauche en** a si sa restriction à $I \cap]-\infty; a]$ est dérivable en a . On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$ sa dérivée à gauche.
• On dit que f est **dérivable à droite en** a si sa restriction à $I \cap [a; +\infty[$ est dérivable en a . On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$ sa dérivée à droite.

Exemple : la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0.

Théorème

Soit a un point de I qui n'est pas une de ses bornes. Alors f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$, cette valeur commune étant $f'(a)$.

Exemple : dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto x^\alpha$ si $x > 0$, 0 si $x \leq 0$. Notion de point anguleux.

1.2) Fonction dérivée

Définition L'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **la fonction dérivée de** f .

Théorème

Si f est dérivable en $a \in I$, alors elle est continue en a . **La réciproque est fausse.**

Remarque : de même, la dérivabilité à gauche/droite implique la continuité à gauche/droite.

Exemples : la fonction partie entière n'est pas continue, donc pas dérivable à gauche en 1. Les fonctions valeur absolue et racine carrée sont continues, mais pas dérivables en 0.

2/ Opérations sur les fonctions dérivables

2.1) Développement limité à l'ordre 1

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $a \in I$. Il y a équivalence entre :

- ❶ la fonction f est dérivable en a ;
- ❷ il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(a) + (x - a)\ell + o_{x \rightarrow a}(x - a)$ (c'est le DL_1 de f en a).

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, alors $f'(a) = \ell$. De plus, l'expression $f(a) + (x - a)f'(a)$ s'appelle l'**approximation affine** de f en a .

Remarque : l'approximation affine est la fonction affine la plus proche de f au voisinage du point considéré ; elle permet de calculer des ordres de grandeur et des valeurs approchées. On la retrouve dans l'équation de la tangente, ce qui n'a rien de surprenant puisque celle-ci est la droite la plus proche de $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point considéré.

Exemples : $\sin h = h + o_{h \rightarrow 0}(h)$, $\sqrt{1+h} = 1 + h/2 + o_{h \rightarrow 0}(h)$ et $1/(1+h) = 1 - h + o_{h \rightarrow 0}(h)$.

Remarque : en utilisant le DL_1 , on retrouve facilement les dérivées des sommes, produits, quotients et composées de fonctions dérivables.

Exemple : retrouver les dérivées de sommes et de composées.

2.2) Dérivée d'une réciproque

Considérons une fonction f continue et strictement monotone sur I : c'est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$ et sa réciproque f^{-1} est continue.

Proposition

On suppose de plus que cette fonction f est dérivable en un point $a \in I$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et l'on a $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Remarque : ceci provient de la symétrie des courbes de f et f^{-1} par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ et de la dérivation de la relation $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Théorème

Plus généralement, on suppose que f est dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I .

Sa réciproque f^{-1} est alors dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque : cette formule se retrouve en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \text{Id}$.

3/ Dérivées successives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition On définit la suite des **dérivées successives** de f de la manière suivante :

- On pose tout d'abord $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; si $f^{(n)}$ est dérivable sur I , on définit sur I la fonction $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarques : ainsi, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, etc... on notera également $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemples : si $f = \sin$, alors $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ pour tout réel x .

Définition • Si f est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I .
• Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'elle est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I .

Remarque : l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I se note $\mathcal{C}^n(I)$.

Exemples : la plupart des fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de déf.

Proposition

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarque : les dérivées successives de sommes / combinaisons linéaires ne posent pas de problème. Pour les produits, la formule qui suit se démontre par récurrence.

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions n fois dérivables.

1) On a $f^{(n)} = (f^{(p)})^{(n-p)}$ pour tout $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

2) De plus, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (c'est la formule de Leibniz - **Hors-programme**).

Exemple : déterminer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto (2x + 1)e^{-x}$.

Remarque : pour les composées, ça devient vite affreux car on est amenés à dériver des produits de plus en plus complexes. Si tout se passe bien, une formule « simple » apparaît lors des dérivations successives ; il ne reste qu'à la prouver par récurrence.

Exemple : soit $\omega = a + ib$ une racine n -ième de l'unité. Calculer la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$.

4/ Propriétés des fonctions dérivables

4.1) Le théorème de Rolle

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$.
Si f admet un extremum local en $c \in]a; b[$, alors $f'(c) = 0$.

PREUVE – les dérivées à gauche et à droite de c sont de signes opposés, donc nulles.

Théorème (de Rolle)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$.
Si $f(a) = f(b)$, il existe alors $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

PREUVE – si f est constante, c'est évident. Sinon, elle admet un max. et un min. sur $[a; b]$; l'un d'eux étant distinct de $f(a) = f(b)$, il est local et f' s'annule.

Remarque : si f s'annule n fois sur $[a; b]$, alors f' s'annule $n - 1$ fois sur $]a; b[$.

Exemple : soient $n \geq 2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $P(x) = x^n + ax + b$. Montrer que le polynôme P ne peut admettre plus de trois racines réelles distinctes.

4.2) Formule des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$.
Il existe alors $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

PREUVE – on applique le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto f(x) - (x - a) \times \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque : ceci permet de faire le lien entre sens de variation et signe de la dérivée.

Corollaire (inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$.

- Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a; b[$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- Si $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a; b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$.

Remarques :

- ❶ Ce résultat hors-programme doit être établi à partir du TAF à chaque utilisation ; on le retrouve également en appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction f' .

- ② Il permet d'établir des encadrements relativement fins et pratiques. En particulier, lorsque f laisse I stable et que $k < 1$, on peut facilement montrer que f admet un unique point fixe sur I et construire une suite récurrente convergeant vers celui-ci.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x/2)$ sur l'intervalle $[0; 1]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0; 1]$. On le note α .
- 2) Établir que $|f(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|/2$ pour tout $x \in [0; 1]$.
- 3) Prouver enfin que $|u_n - \alpha| \leq 1/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.3) Limites de dérivées

Théorème

Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et sa dérivée vaut $f'(a) = \ell$.

En particulier, la fonction f' est continue en a .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a .

Remarque : attention, lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ n'existe pas, on ne peut pas conclure.

Exemple : on définit la fonction f par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

- 1) Déterminer l'expression de sa dérivée $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- 2) Montrer que $f'(x)$ n'admet pas de limite en 0 mais que $f'(0)$ existe.

XXIII – Les espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E désigne $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{K}\}$.

1/ Structure vectorielle de $\mathbb{K}^n$

On va munir l'ensemble E d'opérations qui généralisent les opérations sur les vecteurs du plan (soit $\mathbb{R}^2$) ou de l'espace (c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$).

Définition

- Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. On les note parfois avec une flèche.
- L'élément $(0, \dots, 0)$ de E est appelé **vecteur nul** et noté 0_E ou simplement $\vec{0}$.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.

Remarque : c'est un vocabulaire que l'on a déjà croisé dans le cours de géométrie.

Définition

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{u}(u_1, \dots, u_n) \in E$ et $\vec{v}(v_1, \dots, v_n) \in E$.

- On définit l'**addition de deux vecteurs** par $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in E$.
- On définit le **produit d'un vecteur par un scalaire** par $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) \in E$.

Remarque : pas de surprise ici, cela correspond bien aux opérations sur les vecteurs du plan ou de l'espace. Attention toutefois, **on ne multiplie pas les vecteurs entre eux!**

Théorème (propriétés fondamentales)

Pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, on a les relations suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ | 5) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ |
| 2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ | 6) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$ |
| 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ | 7) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ |
| 4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ | 8) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ |

On dit alors que $(E, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** ou encore un **$\mathbb{K}$ -ev**.

Remarque : plus généralement, on dit qu'un ensemble possède une structure de $\mathbb{K}$ -ev s'il est muni d'une addition interne $+$ et d'une multiplication externe $\cdot$ vérifiant les huit propriétés ci-dessus. Ainsi $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$ -ev, de même que l'ensemble des suites réelles et l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène. Ils sont partout !!!

Proposition (propriétés du produit)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in E$. Alors :

$$(-\lambda) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (-\vec{u}) = -\lambda \cdot \vec{u}$$

$$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

Remarque : ainsi, $(-1) \cdot \vec{u}$ vaut $-\vec{u}$, l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

Définition Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \in E^p$. On appelle **combinaison linéaire** de ces

vecteurs tout vecteur $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \vec{u}_i$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Remarque : c'est encore un élément de E grâce à la structure d'espace vectoriel. On dira ainsi qu'un $\mathbb{K}$ -ev est **stable par combinaison linéaire**.

Exemple : tout complexe est combinaison linéaire de 1 et i .

2/ Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

2.1) Définition et premières propriétés

Définition

Soit F une partie de E . Si F est aussi un $\mathbb{K}$ -ev, on dit que c'est un **sous-espace vectoriel** de E .

Exemple : les droites et les plans passant par 0 sont des sous-ev de $\mathbb{R}^3$.

Théorème

Soient F une partie de E . Alors F est un sous-ev de E si, et seulement si :

- 1) $\vec{0} \in F$
- 2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F$

Exemples : $A = \{(a+b, 2b, b-a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z\}$ sont des sous-ev mais pas $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z + 1\}$ ni $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 2z\}$.

Proposition

L'intersection de deux sous-ev de E est également un sous-ev de E .

Remarque : attention, c'est faux pour la réunion de deux sous-ev. Penser à $(0x) \cup (0y)$.

Exemple : soient $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-ev de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F_1 \cap F_2$.

2.2) Sous-espace engendré

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ une famille de p vecteurs de E .

Définition L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est noté $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$.

Exemples : $\mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i)$; l'ensemble des solutions d'une équ. diff. homogène.

Proposition

- $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ est un sous-ev de E et s'appelle le **sous-espace engendré par $\mathcal{F}$** .
On dit aussi que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de cet espace vectoriel
- C'est l'intersection de tous les sous-ev de E contenant $\mathcal{F}$.
- C'est le plus petit sous-ev de E contenant $\mathcal{F}$.

Remarque : établir que $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ permet de prouver facilement que l'ensemble F est un sous-ev de E , donc un $\mathbb{K}$ -ev. C'est le cas lorsque l'on résout un système linéaire par exemple.

Exemple : montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

3/ Familles finies de vecteurs

On conserve les notations du paragraphe précédent.

3.1) Familles libres

Définition • On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{0} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont **linéairement indépendants**.

• On dit que cette famille est **liée** dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque

$$\exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} \quad \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{0}$$

Dans ce cas, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque : la famille $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{0}$ est de rang p . Cela signifie aussi que tout vecteur de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Exemple : deux vecteurs non colinéaires; les familles étagées; les familles orthogonales.

Proposition

- Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Remarque : une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul ou deux vecteurs colinéaires.

3.2) Familles génératrices

- Définition**
- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
 - Dans ce cas, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\forall \vec{v} \in E \quad \exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i$$

Remarque : la famille $\mathcal{F}$ est génératrice si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{v}$ est compatible quel que soit $\vec{v} \in E$.

Exemple : la famille $\{(1, 0); (0, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

3.3) Bases d'un sous-espace vectoriel

Définition Soit F un sous-ev de E . Une **base de F** est une famille libre et génératrice de F .

Exemples :

- 1) La famille $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Les familles étagées de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont des bases.

Théorème (admis)

Tout sous-ev de E autre que $\{\vec{0}\}$ admet une base.

Remarque : par convention, on dit que $\emptyset$ est une base de $\{\vec{0}\}$.

Proposition

Si l'on ajoute un vecteur à une base, elle devient liée.
Si l'on retranche un vecteur à une base, elle devient non-génératrice.

Théorème

Soit F un sous-ev de E . La famille $\mathcal{F}$ est une base de F si, et seulement si,

$$\forall \vec{v} \in F \quad \exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i$$

On appelle alors $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ les **coordonnées** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$.

Remarque : la famille $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{v}$ est de rang $p = n$.

Méthode pratique pour déterminer Vect ($\mathcal{F}$)

On effectue un pivot sur les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans une base de E afin de faire apparaître une famille étagée puis éventuellement des vecteurs nuls.

- Les vecteurs de la famille étagée constituent une base du sous-ev engendré par $\mathcal{F}$.
- Si des vecteurs nuls apparaissent, la famille $\mathcal{F}$ est liée. Sinon, elle est libre.

En effet, $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \{a_1 \vec{x}_1, a_2 \vec{x}_2 + b_2 \vec{x}_1, \dots, a_p \vec{x}_p + b_p \vec{x}_1\}$ pour $a_1 a_2 \dots a_p \neq 0$.

4/ Dimension d'un espace vectoriel**4.1) Notion de dimension****Théorème (de la dimension)**

Toutes les bases d'un sous-ev E de $\mathbb{K}^n$ ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **dimension de E** et noté $\dim(E)$.

Exemples : $\dim \{0\} = 0$; $\dim(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim(\mathbb{C}) = 2$ (en tant que $\mathbb{R}$ -ev).

Remarque : on en déduit que tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension n est en bijection avec $\mathbb{K}^n$, via l'application qui associe à tout vecteur ses coordonnées dans une base donnée.

Proposition (familles libres)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

- Toute famille libre de E peut se compléter en une base de E .
- Toute famille libre de E contient au plus n éléments.
- Une famille libre de E à n éléments est une base de E .

Exemples : une famille de trois vecteurs du plan est liée ; cas des familles orthogonales.

Proposition (familles génératrices)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

- On peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E .
- Toute famille génératrice de E contient au moins n éléments.
- Une famille génératrice de E à n éléments est une base de E .

Exemple : trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace.

Remarque : si $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E contenue dans $\mathcal{G}$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Ceci permet de construire des bases à notre convenance.

4.2) Sous-espaces vectoriels en dimension finie**Théorème**

Soient E et F deux sous-ev de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset E$.

- 1) On a $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- 2) Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemples :

- ❶ Les seuls sous-ev de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.
- ❷ Un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ strictement plus grand qu'un plan est égal à $\mathbb{R}^3$ entier.

Définition

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

On appelle **rang** de cette famille la quantité $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque : ce rang se calcule grâce à un pivot sur les coordonnées dans une base de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- 1) $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est libre.
- 2) $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est génératrice.

PREUVE – c'est un bon exercice !

- 1) La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\text{card}(\mathcal{F}) = p \geq \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{rg}(\mathcal{F})$.
L'égalité a lieu uniquement si $\mathcal{F}$ est une base, donc une famille libre.
- 2) On a $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{K}^n$ donc $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathbb{K}^n) = n$.
L'égalité a lieu uniquement si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{K}^n$, donc si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice.

XXIV – Les applications linéaires

On notera E, F et G les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ (pour p, n et $m \in \mathbb{N}^*$).

1/ Définitions et premières propriétés

Définition • Une application $f : E \longrightarrow F$ est appelée **application linéaire** si elle vérifie

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

• On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque : lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme linéaire** (comme l'intégrale sur $[a; b]$).

Exemples : les applications $f \mapsto f'$ sur $\mathcal{C}^\infty(I)$ et $\vec{v} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ sur $\mathbb{R}^2$ (on fixe $\vec{u}$).

Définition • Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme de E** .
L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$.

• Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

• Un endomorphisme bijectif de E est appelé **automorphisme de E** .
L'ensemble des automorphismes de E se note $GL(E)$.

Exemple : que dire des exemples précédents ?

Proposition (combinaisons d'applications linéaires)

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Remarque : l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ a en fait une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition (compositions d'applications linéaires)

• Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

• Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Corollaire

La composée de deux automorphismes de E et la réciproque d'un automorphisme de E sont également des automorphismes de E .

2/ Noyaux et images

On considère dans cette section une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

2.1) Définition et premières propriétés

Définition

- On appelle **noyau de f** l'ensemble $\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$.
- On appelle **image de f** l'ensemble $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{u}) \in F \mid \vec{u} \in E\}$.

Proposition

$\text{Ker}(f)$ est un sous-ev de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-ev de F .

Exemple : pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ fixé, on considère $\varphi : \vec{v} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

Théorème

- f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.
- f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

Exemple : montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, x - 3y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2.2) Caractérisation et étude pratique

Déterminer $\text{Ker}(f)$

Par définition,

$$\vec{u} \in \text{Ker}(f) \iff f(\vec{u}) = \vec{0}$$

De ce fait,

$\text{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions dans E du système linéaire $f(\vec{u}) = \vec{0}$

Déterminer $\text{Im}(f)$

Par définition,

$$\vec{v} \in \text{Im}(f) \iff \exists \vec{u} \in E, \vec{v} = f(\vec{u})$$

De ce fait,

$\text{Im}(f)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v} \in F$ pour lesquels le système linéaire $f(\vec{u}) = \vec{v}$ est compatible

Exemple : appliquer ceci à $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, 5x - 2y + 3z)$.

2.3) Équations linéaires

Définition Une *équation linéaire* est une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

Exemples : systèmes linéaires ; équations différentielles ; suites récurrentes.

Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $u(x) = 0$.

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ est un sous-ev de E . Il est donc non vide.
- Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, on considère $x_0 \in \mathcal{S}$: alors $\mathcal{S} = \{x_0 + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$.

Remarque : on retrouve ici la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire ... que de souvenirs !

3/ Applications linéaires en dimension finie

On considère dans cette section une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

3.1) Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème

Soient $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ une base de E et $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_p\}$ une famille de F . Il existe alors une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$.

Remarque : une application linéaire est ainsi entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ. Mieux : cette image nous donne les propriétés de l'application linéaire.

Théorème

Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

- 1) On a $\text{Im}(f) = \text{Vect } f(\mathcal{B})$.
- 2) f est injective si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B})$ est libre dans F .
- 3) f est surjective si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F .
- 4) f est bijective si, et seulement si, la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

Remarque : on commencera par effectuer un pivot sur les vecteurs de la famille $f(\mathcal{B})$ afin de voir si elle est libre et de faire apparaître une base de $\text{Im}(f)$.

3.2) Rang d'une application linéaire

Définition On appelle *rang de f* le réel $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$.

Proposition

On a $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.

Remarque : si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ est une base de E, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p)\}$.

Théorème

- f est injective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
- f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
- f est bijective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F) = \dim(E)$.

3.3) Le théorème du rang et ses conséquences

Théorème (du rang)

On a $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$.

Exemple : une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$ a pour noyau un plan.

Corollaire Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors $f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$.

Exemple : cas de l'endomorphisme $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, x - 3y)$.

4/ Matrice d'une applications linéaire

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p\}$, $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ et $\mathcal{B}'' = \{g_1, \dots, g_m\}$ des bases de E, F et G.

4.1) Définition et propriétés fondamentales

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$: on appelle *matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$* la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j -ième colonne fournit les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Ainsi, l'écriture $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ signifie que $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$ pour $1 \leq j \leq p$.

Exemple : donner les matrices des applications croisées précédemment.

Corollaire

Les vecteurs colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ sont les coordonnées des vecteurs de $u(\mathcal{B})$.

Remarque : par conséquent, ils forment une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u + v) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.

Remarque : l'application $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition (Écriture matricielle d'une application linéaire)

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sa matrice. Pour tout $x \in E$, on pose $y = u(x) \in F$ et l'on note :

- $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
- $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{B}'$.

Alors :

$$Y = AX$$

Remarque : c'est la notation la plus couramment adoptée car elle est très pratique pour les calculs. Cependant, tout ceci va fortement dépendre des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ choisies.

Exemple : reprendre les exemples précédents et calculer une ou deux images.

4.2) Matrice d'une composée**Proposition**

Pour tous $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$.

PREUVE – Soient U et V les matrices de u et v , $x \in E$, $y = v(x) \in F$ et $z = u(y)$ de coordonnées X , Y et Z . Alors $Y = VX$ et $Z = UY = (UV)X$, si bien que $u \circ v$ a pour matrice UV .

Remarque : on conserve l'ordre de l'écriture, bien que u soit appliquée **après** v .

Théorème

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible si, et seulement si, u est un isomorphisme. Dans ce cas, son inverse est $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u^{-1})$.

5/ Rang d'une matrice

5.1) Définition et premières propriétés

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de A** le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Remarque : on calcule le rang en effectuant un pivot sur les vecteurs colonnes de la matrice. Ceci fait également apparaître une base de $\text{Im}(u)$ où u est le morphisme associé à A .

Théorème

- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang du morphisme associé de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- Ils sont tous deux inversibles lorsque leur rang r vérifie $r = n = p$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$.
En particulier, le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.

5.2) Opérations élémentaires sur les matrices

Définition On appelle **opérations élémentaires sur les matrices** les actions suivantes :

- 1) L'échange de deux lignes ou de deux colonnes.
- 2) La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire non nul.
- 3) L'addition d'une ligne ou d'une colonne à une autre.

Remarque : ce sont les opérations que l'on effectue pour résoudre les systèmes d'équations et pour calculer les rangs de familles de vecteurs.

Théorème

Les opérations élémentaires sur les matrices conservent le rang.

Ainsi, pour déterminer le rang d'une matrice, on va essayer de se ramener à une matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires : c'est encore une fois le pivot de Gauss. Rien de surprenant ici puisque le rang d'une matrice est simplement le rang du système associé.

XXV – Probabilités sur un univers fini

1/ Généralités

1.1) Introduction

Considérons une expérience. On dit que c'est une **expérience aléatoire** quand on ne peut pas prédire avec certitude son résultat et que le hasard entre en ligne de compte.

Exemples : lancer de dés ; corrections de copies ; tirage de boules dans une urne.

Prenons une expérience aléatoire qui ne possède qu'un ensemble fini $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ d'**issues** possibles. Supposons que l'on répète N fois cette expérience : si l'on note N_i le nombre d'occurrences de l'issue x_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la **fréquence statistique** de cette issue est alors $f_i = \frac{N_i}{N} \in [0; 1]$. On a de plus $\sum_{i=1}^n f_i = 1$.

On définit une probabilité sur Ω en associant à chaque issue x_i la **fréquence attendue** ou **probabilité** de cette issue notée p_i . On a nécessairement $p_i \in [0; 1]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ ainsi que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Les valeurs des p_i vont en outre dépendre du modèle aléatoire choisi (définition des issues, protocole expérimental, etc...)

Exemple : on lance deux fois de suite un dé équilibré.

- 1) Représenter au moyen d'un tableau toutes les issues possibles.
- 2) Celles-ci ayant toutes la même probabilité, calculer les probabilités d'obtenir :

A « un double » B « des numéros consécutifs » C « une somme égale à 7 »

Le modèle aléatoire choisi est bon si les fréquences statistiques se rapprochent des fréquences attendues quand on répète un grand nombre de fois l'expérience. Ainsi, on peut tester si une pièce est bien équilibrée en répétant les lancers et en calculant les fréquences des événements "Pile" et "Face".

1.2) Univers et événements

Définition Soit Ω l'ensemble **fini** des issues d'une expérience aléatoire.

- On dit que cet ensemble Ω est un **univers**.
- Un **événement** de l'univers Ω est une partie A de Ω .
- Un **événement élémentaire** est un événement de cardinal 1 (une des issues).

Exemple : on lance un dé à six faces ; l'univers est $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, Ω désigne un univers fini.

Définition Soient A et B deux événements de l'univers Ω .

- L'événement « A ou B » est l'événement $A \cup B$.
- L'événement « A et B » est l'événement $A \cap B$.
- L'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$.

Exemple : donner les événements élémentaires composant A , B , $A \cup B$ et $A \cap B$ dans le premier exemple. Comment décrire en français les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

Définition

- Deux événements A et B de Ω sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.
- L'ensemble Ω est l'événement **certain**.
- L'ensemble $\emptyset$ est l'événement **impossible**.

Exemple : les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles mais l'événement $A \cup \overline{A}$ est certain.

Définition On appelle **système complet d'événements** de l'univers Ω un ensemble d'événements $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tels que :

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_i \neq \emptyset$
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Utiliser un tel système revient à raisonner par disjonction des cas.

Exemple : soit A un événement de Ω ; alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.

2/ Calculs de probabilités

2.1) Notion de probabilité

Définition Une (loi de) **probabilité sur Ω** est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit alors que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**.

Proposition

- Pour toute partie A de Ω , on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Pour toutes parties A et B de Ω telles que $A \subset B$, on a $P(A) \leq P(B)$.
- Pour toutes parties A et B de Ω , on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Proposition

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements deux à deux disjoints de l'espace probabilisé (Ω, P) .

Alors $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Corollaire

- Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements de (Ω, P) . Alors $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$.
- En particulier, si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$.

Exemple : on lance un dé pas vraiment équilibré, pour lequel $P(1) = P(2) = P(3) = 0.2$ et $P(4) = P(5) = 0.15$. Que vaut $P(6)$?

Théorème

Soient $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ un univers fini et $p_1, p_2, \dots, p_n$ des réels positifs de somme 1.

- Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $P(x_i) = p_i$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
- De plus, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ pour tout événement A de Ω .

Exemple : reprenons l'exemple précédent. Calculer alors les probabilités des événements A : « obtenir 2 », B : « obtenir un impair » et C : « obtenir un diviseur de 6 ».

2.2) Équiprobabilité**Définition**

- Deux événements A et B de Ω sont dits **équiprobables** si $P(A) = P(B)$.
- La probabilité P est dite **équiprobable** ou **équirépartie** lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Remarque : c'est le cas des lancers ou tirages lorsqu'il n'y a pas de trucage. Attention, tout dépend de la définition des événements élémentaires : si l'on lance 2 dés sans noter l'ordre des numéros obtenus, on obtient 21 événements élémentaires non équiprobables. Ainsi, il vaudra mieux tenir compte de l'ordre.

Théorème

Soient Ω un univers fini et P une probabilité équiprobable sur Ω .

- Pour tout événement A de Ω , on a $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$
- En particulier, tout événement élémentaire est de probabilité $\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$

3/ Conditionnement et indépendance

3.1) Événements conditionnés

Définition Soit A un événement de Ω de **probabilité non nulle**. On appelle **probabilité conditionnée par A** l'application $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ définie par

$$\text{Pour tout } B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La quantité $P_A(B)$ se lit **probabilité de B sachant A** et se note aussi $P(B/A)$.
C'est la probabilité que **B ait lieu sachant que A a eu lieu**.

Remarque : elle correspond à la fréquence de l'événement B au sein de l'univers A .

Exemple : on lance deux dés cubiques équilibrés. L'un des dés donne 3, tandis que l'autre est caché. Montrer que la probabilité que le second dé donne 6 est $2/11$.

Proposition

Reprenons les hypothèses précédentes : la fonction P_A définit une probabilité sur l'univers Ω .

Remarque : dans beaucoup de problèmes, la probabilité $P_A(B)$ se calcule directement. On accède alors à $P(A \cap B)$ en utilisant la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Théorème (formule de Bayes)

Soient A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles. Alors $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$.

Exemple : au lycée, 40% des garçons et 10% des filles mesurent plus de 1m75 (talons compris). De plus, 60% des élèves sont des filles. Si l'on prend au hasard un élève de plus de 1m75, quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

3.2) Arbres de probabilité

Quand on effectue plusieurs tirages successifs, on peut représenter les différentes issues de l'expérience aléatoire au moyen d'un **arbre de probabilité** construit de la manière suivante :

- Au premier niveau, on représente par des branches toutes les issues du premier tirage ; sur chaque branche, on note la probabilité de l'issue correspondante.
- Au second niveau, on trace, à partir de chaque issue du premier tirage, de nouvelles branches représentant les issues du second tirage ; sur chaque branche, on note une probabilité conditionnée par l'issue du premier tirage.
- Et ainsi de suite.

Exemple : on tire successivement et sans remise deux boules dans une urne qui en contient 5 vertes, 3 jaunes et 2 rouges indiscernables au toucher. Tracer l'arbre de probabilités.

Une fois l'arbre fini, chaque chemin nous donne une des issues de l'expérience. Sa probabilité est alors égale au produit des probabilités rencontrées en cours de route :

Théorème (formule des probabilités composées)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de Ω tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple : 13 garçons et 31 filles sortent de manière désordonnée de la salle ES105. Calculer la probabilité que les 3 premiers dehors soient des filles et le quatrième un garçon.

On procède de même lorsque l'on considère un groupe d'objets ou d'individus et que l'on s'intéresse aux valeurs prises par plusieurs critères. Chaque critère correspond alors à un niveau de l'arbre.

Exemple : le quart de la population française a été vaccinée contre la grippe A.

- Parmi les personnes vaccinées, un douzième sont tombées malades.
- Parmi les personnes malades, un cinquième n'est pas vacciné.

Calculer la probabilité pour qu'une personne non-vaccinée soit malade.

3.3) La formule des probabilités totales

Théorème

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé (Ω, P) .

- Pour tout événement B de Ω , on a
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

- Si en outre $P(A_i) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, alors
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B) \times P(A_i)$$

Remarque : sur un arbre de probabilités, il suffit donc d'additionner les probabilités de tous les chemins conduisant à l'événement B pour obtenir la probabilité de celui-ci.

Exemple : un pâtissier confectionne des gâteaux à la crème et d'autres au chocolat ; les uns sont parfumés au grand marnier et les autres au rhum. On sait que : 60% des gâteaux sont au chocolat ; 30 % des gâteaux à la crème sont au grand marnier ; 40 % des gâteaux au chocolat sont au rhum. Quelle est la proportion de gâteaux au rhum ?

3.4) Indépendance d'événements

Définition Deux événements A et B de Ω sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : lorsque l'on répète des lancers ou des tirages **avec remise**, les résultats sont indépendants. Attention, ce n'est plus du tout le cas en absence de remise.

Proposition

Considérons deux événements A et B de Ω tels que $P(B) \neq 0$.

Alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_B(A) = P(A)$.

Théorème

Soient A et B deux événements indépendants. Alors $\bar{A}$ et B , A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exemple : dans un avion trimoteur, les moteurs fonctionnent avec la probabilité $P_1 = \frac{199}{200}$ pour le central et $P_2 = \frac{9}{10}$ pour ceux des ailes, indépendamment les uns des autres. Sachant qu'un seul moteur lui permet de tenir en l'air, quelle est la probabilité que l'avion s'écrase ?

Définition Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de Ω .

- On dit que ces événements sont **deux à deux indépendants** si, et seulement si,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

- On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si,

$$\forall I \subset \llbracket 1; n \rrbracket \quad (\text{avec } I \neq \emptyset) \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Remarque : il est clair que des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants. Par contre, la réciproque est fautive et il faut faire attention à ce que l'on fait dès que l'on manipule plus de deux événements.

Exemple : on lance deux dés équilibrés. Soient les événements A : « le premier dé est pair », B : « le second est pair » et C : « les deux dés ont même parité ». Alors $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ mais $P(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Théorème

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements de Ω mutuellement indépendants.

Soient $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements de Ω tels que $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Alors les événements $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants.

Remarque : c'est la généralisation du théorème précédent.

XXVI – Variables aléatoires, lois usuelles

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé fini (Ω, P) .

1/ Variables aléatoires

1.1) Définitions

Définition • Une *variable aléatoire sur Ω* est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
• L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X s'appelle **le support** de X .

Exemple : le nombre de "Pile" obtenus quand on lance 3 pièces.

Cas des fonctions indicatrices

Définition Soit $A \subset \Omega$. On appelle *fonction indicatrice de l'événement A* et l'on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

Proposition (règles de calcul)

Soient A et B deux événements de Ω . On a alors :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

Remarque : si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ correspond au **nombre d'événements réalisés**. C'est une idée fréquemment utilisée en pratique.

Dans toute la suite du chapitre, on considère une variable aléatoire X sur Ω .

Définition (notations usuelles)

- Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note « $X \in A$ » l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on utilisera de même les notations « $X = x$ », « $X \leq x$ », « $X > x$ », ...

Proposition

Les événements « $X = x$ », avec $x \in X(\Omega)$, forment un système complet d'événements de Ω . On l'appelle **système complet d'événements associé à la variable aléatoire X** .

Remarque : cela revient à regrouper les issues selon les valeurs prises par X .

1.2) Loi d'une variable aléatoire

Définition (loi de probabilité d'une v.a.)

L'application $P_X : \begin{cases} X(\Omega) \longrightarrow [0; 1] \\ x \longmapsto P(X = x) \end{cases}$ s'appelle **la loi de probabilité de X**.

Exemple : on lance 3 fois une pièce équilibrée. On touche 100 € si l'on obtient 3 "Pile", 50 € si l'on obtient 2 "Pile" et l'on perd 75 € sinon. Déterminer la loi de probabilité du gain.

Théorème

La loi de probabilité de X définit une probabilité sur l'univers $X(\Omega)$.
Pour toute partie A de $X(\Omega)$, on a $P_X(A) = P(X \in A)$.

Exemple : loi de 1_A

Proposition

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels distincts et $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
Il existe alors une variable aléatoire X sur un univers fini Ω telle que
$$X(\Omega) = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(X = x_i) = p_i$$

Définition (fonction d'une v.a.)

Soit f une application numérique définie sur l'ensemble $X(\Omega)$.
L'application $f \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω notée **f(X)**.

Remarque : attention, la notation $f(X)$ désigne non pas une valeur mais une **fonction**.

Exemple : on lance trois fois de suite une pièce équilibrée ; soient X le nombre de "Pile" obtenus et $Y = (X - 1)^2$. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.

1.3) Fonction de répartition

Définition On appelle **fonction de répartition de X** la fonction $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1] \\ x \longmapsto P(X \leq x) \end{cases}$

Proposition (lien avec la loi)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \sum_{a \in X(\Omega), a \leq x} P(X = a)$.
- Pour tout $a \in X(\Omega)$, on a $P(X = a) = F_X(a) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} F_X(x)$

Théorème

- 1) La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- 3) $P(X > a) = 1 - F_X(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- 4) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ pour tous réels a et b tels que $a \leq b$.

Cas où $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

1) La fonction F_X est caractérisée par :

- (a) $F_X = 0$ sur $] -\infty ; x_1 [$.
- (b) $F_X = \sum_{i=1}^k P(X = x_i)$ sur $[x_k ; x_{k+1} [$ pour tout $k \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$.
- (c) $F_X = 1$ sur $[x_n ; +\infty [$.

C'est une fonction en escalier dont la courbe présente n sauts aux abscisses x_i .

2) La fonction P_X est caractérisée par :

- (a) $P(X = x_1) = F_X(x_1)$
- (b) $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$ pour tout $i \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$.

On peut la représenter graphiquement à l'aide d'un diagramme en bâtons.

2/ Espérance et variance

2.1) Définitions

Soit X une variable aléatoire sur l'univers Ω .

Définition

On appelle *espérance de X* le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Interprétation : $E(X)$ est la moyenne théorique des valeurs prises par X lorsque l'on répète l'expérience *un grand nombre de fois*. Dans le cas d'un jeu d'argent où X représente le gain, alors $E(X)$ correspond au *gain moyen* attendu par partie.

- 1) Si $E(X) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur.
- 2) Si $E(X) = 0$, le jeu est **équilibré**.
- 3) Si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable** au joueur.

Remarque : l'espérance de X n'est en rien une valeur typique de cette variable, ni la valeur la plus probable, ni même une valeur permettant d'estimer une probabilité.

Exemple : si A est un événement de Ω , on a $E(1_A) = P(A)$.

Définition

- On appelle **variance de X** le réel

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x - E(X)]^2 P(X = x).$$

- On appelle **écart-type de X** le nombre réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Interprétation : $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des paramètres de dispersion, qui mesurent les écarts de X par rapport à son espérance $E(X)$. Ils n'ont pas de sens en soi, mais peuvent être utilisés pour comparer deux variables aléatoires ou deux stratégies différentes.

Exemple : on lance deux dés et l'on considère les deux jeux suivants

1) Jeu n°1 : on gagne 8 € si l'on sort un 5 ou un 6, on perd 10 € sinon.

2) Jeu n°2 : on gagne 350 € si le double-6 sort, on perd 10 € sinon.

On note X le gain réalisé. Calculer l'espérance et la variance de X pour chaque jeu.

2.2) Propriétés**Proposition**

L'espérance de X s'écrit également

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Théorème (formule de König-Huygens)

La variance de X vaut

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Remarque : ceci simplifie grandement les calculs de variance ... cf. exemple précédent.

Proposition (effet d'une transformation affine)

Pour tous les réels a et b , on a

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

$$\text{et } V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition

- On dit que X est une **variable centrée** si $E(X) = 0$.
- On dit que X est une **variable réduite** si $V(X) = 1$.

Proposition

- On appelle **variable centrée associée à la variable X** la variable $X^+ = X - E(X)$.
- On appelle **variable centrée réduite associée à la variable X** la variable $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Remarque : on retrouve grâce à cette formule que lorsque $V(X)$ est faible, les valeurs de X sont concentrées autour de $E(X)$. Elle est très pratique lorsque $\text{card}(X(\Omega))$ est grand.

Exemple : on lance 1000 fois de suite une pièce équilibrée et l'on note X le nombre de "Pile" obtenus ; en admettant les résultats sur les lois binomiales, majorer $P(|X - 500| \geq 50)$.

Théorème (de transfert)

Soit f une fonction numérique définie sur l'ensemble $X(\Omega)$.

L'espérance de la variable aléatoire $Y = f(X)$ est $E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$.

Exemple : un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On extrait simultanément 2 jetons et l'on note Y le plus petit des numéros obtenus. Déterminer la loi de Y . Calculer $E(Y)$, $E(Y(Y + 1))$ puis $V(Y)$.

2.3) Indépendance de variables aléatoires**Définition**

On dit que deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Remarques :

- ❶ Si l'on effectue simultanément des expériences aléatoires totalement indépendantes, les variables aléatoires associées aux diverses expériences sont indépendantes.
- ❷ Il suffit de trouver deux valeurs $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$ telles que $P((X = i) \cap (Y = j)) \neq 0$ pour justifier que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Exemple : une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire une et note X son numéro. On la remet et enlève toutes les boules de numéros strictement supérieurs. On tire une nouvelle boule dont le numéro est noté Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Théorème

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall A \subset X(\Omega) \quad \forall B \subset Y(\Omega) \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Remarque : on va surtout utiliser l'implication directe en pratique.

Cas des fonctions indicatrices

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, 1_A et 1_B le sont aussi.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires f(X) et g(Y) sont également indépendantes.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω .

- Pour tous les réels a et b, on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple : on tire successivement et sans remise deux boules dans une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n ; on note X_1 le premier numéro tiré et X_2 le second. Calculer alors $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_1 X_2)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Définition

Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies sur Ω sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$, les événements $(X_i = x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants.

Théorème

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires de Ω mutuellement indépendantes.

- Toute sous-famille de $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires $(f_i(X_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont encore mutuellement indépendantes.
- Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de plusieurs variables.
Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont alors indépendantes.
- On a $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$ et $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

3/ Lois usuelles**3.1) Loi certaine**

Définition On dit que X suit une **loi certaine** si $X(\Omega) = \{x\}$ et que $P(X = x) = 1$.

Théorème

Dans ce cas, on a $E(X) = x$ et $V(X) = 0$.

Réciproquement, si $V(X) = 0$ alors X suit une loi certaine.

3.2) Loi uniforme

Définition Soit E un ensemble fini de $\mathbb{R}$. On dit que X suit la **loi uniforme sur E** si

$$\boxed{X(\Omega) = E} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in E \quad P(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}}$$

Ceci se note $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Remarque : c'est tout simplement une situation d'équiprobabilité sur l'univers $X(\Omega)$.

Exemple : si l'on lance un dé équilibré, le chiffre obtenu suit la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

Théorème

On suppose que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$: alors $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$ et $\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

Exemple : si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a ; b \rrbracket)$, retrouver $E(X)$ et $V(X)$ en considérant $Y = X + 1 - a$.

3.3) Loi de Bernoulli

Soit désormais $p \in]0 ; 1[$.

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p** toute expérience aléatoire ne comportant que deux issues possibles, le succès S et l'échec E de probabilités respectives p et $1 - p$.

Exemple : lancer d'une pièce de monnaie.

Définition

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si $\boxed{X(\Omega) = \{0, 1\}}$ et $\boxed{P(X = 1) = p}$.
Ceci se note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque : lorsque l'on a affaire à une épreuve de Bernoulli, il suffit de poser $X(S) = 1$ et $X(E) = 0$ pour obtenir une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli.

Exemple : miser à la roulette (sur une couleur / sur un numéro) ; $\mathbb{1}_A$.

Théorème

On suppose que $X \sim \mathcal{B}(p)$: alors $\boxed{E(X) = p}$ et $\boxed{V(X) = p(1 - p)}$.

Exemple : effectuer les calculs dans les cas précédents.

3.4) Loi binomiale

Définition Lorsque l'on répète plusieurs fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p , on dit que l'on a affaire à un **schéma de Bernoulli**.

Dans ce cas, notons X le nombre de succès obtenus. Quelle est donc la loi suivie par X ?

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$$

et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ceci se note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : les curieux noteront que $P(\Omega) = 1$. On a donc bien défini une loi de probabilité.

Proposition

On répète n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p .
Soit X le nombre de succès obtenus : la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple : on lance 20 fois de suites une pièce parfaitement équilibrée ; quelle est la probabilité d'obtenir 13 fois le côté « pile » ? au moins 3 fois le côté « pile » ?

Théorème

On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$: alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple : on extrait au hasard $2n$ lapins de leur cage. Chaque animal possède, indépendamment des autres, la probabilité 0.5 d'être un mâle. Soient M le nombre de mâles extraits de la cage et C le nombre de couples mâle-femelle formés avec les $2n$ animaux.

- Quelle loi suit la variable aléatoire M ?
- Exprimer C en fonction de M . En déduire la loi de C .
- A l'aide de la formule de transfert, calculer $E(C)$.

Théorème

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sur Ω . Alors la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Théorème

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_m$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω . On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, la variable X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et p fixé. Alors la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p)$.

XXVII – Fonctions de deux variables

1/ Généralités

1.1) Sous-ensembles fondamentaux de $\mathbb{R}^2$

Définition On appelle *disque ouvert* de $\mathbb{R}^2$ de centre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\}$.

Définition On appelle *pavé ouvert* tout ensemble $I \times J$ avec I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition (demi-plans ouverts)

Les axes (Ox) et (Oy) partagent le plan $\mathbb{R}^2$ en quatre demi-plans ouverts :

- $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{E}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Ce sont en fait des pavés ouverts particuliers, tout comme $\mathbb{R}^2$.

Remarque : on dira que ces ensembles sont des **ensembles ouverts**. Cela signifie que chacun de leurs points est au centre d'un disque ouvert qui est totalement contenu dans l'ensemble. En pratique, on peut tendre vers ce point selon toutes les directions possibles et cela permet d'étudier les comportements de fonctions au voisinage de ce point.

Contre-Exemple : si l'on prend un disque fermé, les points du cercle ne vérifient plus cette propriété (on dit qu'ils sont *au bord* de notre ensemble).

1.2) Fonction de deux variables

Définition On appelle *fonction de deux variables réelles* une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la notera $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$.

Exemples :

- ❶ La fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
- ❷ La fonction $g : (x, y) \mapsto x \ln(y)$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$.
- ❸ La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{y^2 - x^2}$ est définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \geq 0\}$.

On considère dans la suite une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition Les *applications partielles de f au point $(a, b) \in \mathcal{D}$* sont les fonctions suivantes :

- $f(\cdot, b) : x \mapsto f(x, b)$ définie sur $\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in \mathcal{D}\}$.
- $f(a, \cdot) : y \mapsto f(a, y)$ définie sur $\mathcal{D}_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in \mathcal{D}\}$.

Remarque : cela revient simplement à fixer l'une des variables.

Exemple : reprendre les fonctions précédentes avec $(a, b) = (1, 2)$.

Les applications partielles étant des fonctions numériques d'une variable réelle, on peut leur appliquer tous les résultats vus en cours d'année. Attention cependant, la connaissance de ces applications ne nous fournit que des **informations partielles** et parfois trompeuses.

Exemple : que dire des applications partielles de $f : (x, y) \mapsto xy$ en $(0, 0)$?

1.3) Représentation graphique

Définition L'ensemble $\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y)\}$ s'appelle la **surface représentative de f** . On dit encore que $\mathcal{D}_f$ est la **surface d'équation $z = f(x, y)$** .

Remarque : sans trop de surprise, les fonctions d'une variable sont représentées par des courbes (un paramètre) et celles de deux variables par des surfaces (deux paramètres).

Exemples : voici trois surfaces usuelles et les fonctions associées

- ① $\mathcal{S}_f$ est une demi-sphère lorsque $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ sur le disque unité.
- ② $\mathcal{S}_f$ est un cône lorsque $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- ③ $\mathcal{S}_f$ est un plan lorsque $f(x, y) = 2x + y + 1$.

Il n'est pas toujours évident de bien visualiser la surface représentative d'une fonction. Pour remédier à cela, on utilise des **sections** de cette surface, c'est-à-dire des intersections avec des plans simples qui vont nous permettre de mieux appréhender la surface.

Définition On appelle **courbe de niveau $\lambda \in \mathbb{R}$** l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = \lambda\}$.

Exemple : pour la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$, on obtient des hyperboles.

Remarque : c'est la projection sur le plan (Oxy) de l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan $\mathcal{P} : z = \lambda$. On les utilise en cartographie pour visualiser les reliefs (cf. cartes IGN).

Proposition (courbes des applications partielles)

- La courbe de $f(\cdot, b)$ est la projection sur (Oxz) de l'intersection de $\mathcal{S}_f$ et du plan $\mathcal{P} : y = b$.
- La courbe de $f(a, \cdot)$ est la projection sur (Oyz) de l'intersection de $\mathcal{S}_f$ et du plan $\mathcal{P} : x = a$.

Exemple : avec la fonction précédente, on obtient des droites cette fois.

2/ Limites et continuité

Commençons par définir la notion de limite finie en un point du plan. Pour une fonction d'une variable, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ signifie que $|f(x) - \ell|$ tend vers 0 lorsque $|x - a|$ tend vers 0. Pour une fonction de deux variables, c'est la même chose en utilisant la norme euclidienne dans le plan à la place de la valeur absolue.

Définition On dit que f admet le réel ℓ pour limite en (a, b) et l'on note $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D} \quad \|(x, y) - (a, b)\| < \eta \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple : ainsi, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x + 2y = 5$.

Remarques :

- ❶ On ne s'intéressera ni aux limites infinies, ni aux limites en l'infini.
- ❷ Les opérations sur les limites déjà croisées restent valables.
- ❸ Rappelons quand même que $\|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

Définition

- On dit que f est **continue en un point** $(a, b) \in \mathcal{D}$ si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.
- On dit que f est **continue sur** $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont également continues.

Exemples : les fonctions croisées jusqu'ici sont continues ... avec les justifications habituelles !

Proposition

Si f est continue en un point $(a, b) \in \mathcal{D}$, ses applications partielles en (a, b) sont continues en a et en b respectivement. Attention, la réciproque est fausse.

Contre-Exemple : la fonction $f : (x, y) \mapsto [xy]$ n'est pas continue en $(0, 0)$ bien que les applications partielles $f(\cdot, 0)$ et $f(0, \cdot)$ soient toutes deux continues en 0.

Remarque : les applications partielles vont ainsi nous servir de contre-exemples pour prouver l'absence de limite ou de continuité. Plus généralement, pour prouver que « ça cloche » en un point (a, b) , on étudiera le comportement de f le long de différentes droites passant par ce point à l'aide des fonctions $\varphi : t \mapsto f(a + th, b + tk)$, avec $\vec{u}(h, k)$ un vecteur non nul.

Exemple : considérer $t \mapsto f(t, -t)$ et $t \mapsto f(t, t)$ pour prouver que f n'a pas de limite en 0.

3/ Dérivées partielles du premier ordre

3.1) Définitions

Dans toute la suite, on considère $\mathcal{D} = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathcal{D}$.

Définition

- Si $f_1 = f(\cdot, b)$ est dérivable en a , on dit que f est **dérivable par rapport à x en a** et l'on note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_1'(a)$ sa **première dérivée partielle**.
- Si $f_2 = f(a, \cdot)$ est dérivable en b , on dit que f est **dérivable par rapport à y en b** et l'on note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_2'(b)$ sa **seconde dérivée partielle**.

Remarque : ce sont des dérivées de fonctions d'une variable, donc on retrouve toutes les règles de calcul et propriétés usuelles. En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

Par contre, ne pas perdre de vue que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont encore des fonctions de deux variables définies sur l'ensemble $\mathcal{D}' = \left\{ (a, b) \in \mathcal{D} \mid \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \text{ existent} \right\}$.

Exemples : reprendre les fonctions croisées précédemment.

Définition On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$** si elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$ et que ces dérivées sont continues sur $\mathcal{D}$.

Remarque : on note alors $\mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

3.2) Propriétés des applications dérivables

Proposition

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. Alors $f + g$, fg et f/g (si $g \neq 0$) sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et l'on retrouve les règles de calcul usuelles.

Proposition

Soient $f : \mathcal{D} \mapsto I$ et $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. Alors la fonction $h = \varphi \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \varphi'(f) \times \frac{\partial f}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \varphi'(f) \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

DÉMONSTRATION – en effet, $h(x, y) = \varphi(f(x, y))$ de sorte que $h(\cdot, y) = \varphi \circ f(\cdot, y) \dots$

Proposition

Soient $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi :]a; b[\mapsto I$ et $\psi :]a; b[\mapsto J$ trois fonctions dérivables.
Alors la fonction $F : t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$ est dérivable sur $]a; b[$ et

$$\forall t \in]a; b[\quad F'(t) = \varphi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) + \psi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))$$

Remarque : on a fait le tour des différents types de composées que l'on peut croiser.

Définition Une fonction admet un **extremum local** en un point si c'est un extremum sur un disque ouvert le contenant.

Remarque : c'est la même notion que pour une fonction d'une seule variable.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$. Si f admet un extremum local en $(a, b) \in \mathcal{D}$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Attention, **la réciproque est fautive** : il faut prouver que $(h, k) \mapsto f(a+h, b+k) - f(a, b)$ est de signe constant au voisinage de $(0, 0)$ pour montrer que f admet un extremum local en (a, b) .

Exemple : $f(x, y) = (x-1)^2(y+2)^2 + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

3.3) Approximation locale

Dans toute la suite, on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$.

Théorème

La fonction f admet un **développement limité à l'ordre 1** en (a, b) qui s'écrit

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times (y - b) + o_{(x,y) \rightarrow (a,b)}(\|(x, y) - (a, b)\|)$$

En particulier, la fonction f est continue.

Remarque : la proposition et le théorème précédents en découlent.

Définition On appelle **plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (a, b)** le plan d'équation

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times (y - b)$$

Il passe par le point $(a, b, f(a, b))$ et a pour vecteur normal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$.

Remarque : c'est le plan passant par $(a, b, f(a, b))$ le plus proche de la surface $\mathcal{S}_f$.

3.4) Gradient

Définition On appelle **gradient de f en (a, b)** le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$.

Remarque : d'après le DL₁, on a $f(x, y) - f(a, b) \simeq \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot (x - a, y - b)$ et cette quantité est maximale lorsque les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ indique **la direction de la plus forte variation de f** .

Point de vue topographique

Dans ce cas, la surface représentative de la fonction f correspond à un relief. Les courbes de niveau permettent de visualiser les points de même altitude, comme sur une carte IGN, et le **gradient donne la direction de la pente la plus forte**.

Pour aller plus loin, supposons que la courbe de niveau λ ait pour paramétrage $x = x(t)$ et $y = y(t)$ avec $t \in I_0$. En dérivant la relation $f(x(t), y(t)) = \lambda$ sur l'intervalle I_0 , on obtient

$$x'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$$

ce qui montre que $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est orthogonal au vecteur tangent à la courbe $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$. Ainsi, **les lignes de niveau sont orthogonales au gradient en tout point**.

Exemple : le champ électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ est normal aux équipotentielles.

Définition On appelle **point critique** tout point d'annulation du gradient.

Exemple : les extrema locaux sont des points critiques mais la réciproque est fausse.

4/ Dérivées partielles du second ordre

Définition Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$. On définit, lorsqu'elles existent, les **dérivées partielles d'ordre deux**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Définition On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^2$** si ces dérivées partielles existent et sont continues.

Théorème (de Schwarz)

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur $\mathcal{D}$.

Contre-Exemple : considérons la fonction définie par $f(x, y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$ et 0 sinon.