

Mathématiques – DS₁

Les problèmes sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Bon travail!

1 point sera accordé aux copies qui répondent aux exigences ci-dessus.

Problème 1 : Algèbre linéaire

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et a et b sont deux nombres réels.

La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X - a) \times (X - b) \times P' - n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \times P.$$

Partie 1 : Étude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on pose :

$$\varphi_1(P) = (X - a) \times (X - b) \times P' - \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \times P.$$

Q1. Montrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

Q2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.

Q3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

Q4. On suppose dans cette question seulement que $a \neq b$.

(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X - a, X - b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b) Calculer $\varphi_1(X - a)$ et $\varphi_1(X - b)$, puis en déduire $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.

(c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$.

Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$.

(d) Donner sans démonstration, une égalité reliant les matrices M , M_1 , $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$.

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question **Q4.(d)**, une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

Q5. On s'intéresse dans cette question au sous-espace vectoriel

$$\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3).$$

(a) Montrer que M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2 .

(b) Déterminer une base de Γ .

Q6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question **Q5.(a)**, déterminer l'application φ_1^2 . En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Réponse

Q1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda.P + Q) &= (X-a) \times (X-b) \times (\lambda.P + Q)' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \times (\lambda.P + Q) \\ &= \lambda \cdot \left((X-a) \times (X-b) \times P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \times P\right) + (X-a) \times (X-b) \times Q' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \times Q \\ &= \lambda \cdot \varphi_1(P) + \varphi_1(Q).\end{aligned}$$

Donc,

φ_1 est linéaire.

On note $P = a_0 + a_1 X$. On a :

$$\varphi_1(P) = (X-a) \times (X-b) \times a_1 - \left(X - \frac{a+b}{2}\right) \times (a_0 + a_1 X) = -\left(\frac{a+b}{2} \times a_1 + a_0\right) X + aba_1 + \frac{a+b}{2} \times a_0 \in \mathbb{R}_1[X].$$

Donc,

φ_1 est un endomorphisme.

Q2. On a : $\varphi_1(1) = -X + \frac{a+b}{2}$ et $\varphi_1(X) = -\frac{a+b}{2}X + ab$

Donc,

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.$$

Q3. On sait que φ_1 est bijective si, et seulement si, la matrice M_1 est inversible.

De plus, M_1 est inversible si, et seulement si, $\det(M_1) \neq 0$.

Or, on a :

$$\det(M_1) = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab = -\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Donc,

φ_1 est bijective si, et seulement si, $a \neq b$.

Q4. (a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda.(X-a) + \mu.(X-b) = 0$.

En évaluant en a , il vient $\mu \times (a-b) = 0$.

Comme $a \neq b$, $\mu = 0$.

De même, en évaluant en b , on a $\lambda = 0$.

Donc, $\mathcal{B}$ est libre. De plus, cette famille est composée de $2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_1[X]$.

Par théorème

la famille $\mathcal{B} = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b) On a :

$$\varphi_1(X-a) = (X-a) \times (X-b) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(X-a) = (X-a) \times \left(X-b-X+\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a-b}{2} \times (X-a),$$

et, de même,

$$\varphi_1(X-b) = -\frac{a-b}{2} \times (X-b).$$

Donc,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{a-b}{2} \end{pmatrix} = \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par définition :

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$$

(d) Par la formule de changement de base :

$$M = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} M_1 P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}.$$

(e) Comme M est diagonale,

$$M^p = \left(\frac{a-b}{2} \right)^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix}.$$

Or, par la formule de changement de base :

$$M_1 = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$$

Or,

$$M_1^p = (P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1})^p = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} \times \cdots \times P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}.$$

De plus, comme $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1})^{-1}$, on a :

$$M_1^p = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p I_2 \times M^p I_2 \times M^p I_2 \times \cdots \times M^p I_2 P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1} = \cdots = \frac{(a-b)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} a + (-1)^{p+1}b & ab(1 + (-1)^{p+1}) \\ -1 + (-1)^p & (-1)^p a - b \end{pmatrix}.$$

Q5. (a) Par la question précédente,

$$M_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4} I_2 \quad \text{et} \quad M_1^3 = M_1^2 \times M_1 = \frac{(a-b)^2}{2} M_1.$$

(b) Par la question précédente,

$$\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1).$$

Donc, la famille (I_2, M_1) engendre Γ , de plus, les vecteurs I_2 et M_1 ne sont pas colinéaires.

Donc,

$$(I_2, M_1) \text{ est une base de } \Gamma.$$

Q6. On a : $M_1^2 = I_2$, donc, $\varphi_1^2 = \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}$.

Ainsi,

$$\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à } \text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}).$$

Base de $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

La matrice de $\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}$ dans $\mathcal{B}_1$ est $A = M_1 - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

On remarque que $-4C_1 + C_2 = 0$, donc, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1)$. De plus, comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(A) = 1$.

D'où, par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = \dim(\text{Ker}(A)) = 2 - \text{rg}(A) = 1$$

De plus, en revenant aux vecteurs $X - 4 \in \text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

Donc,

$$\text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}) = \text{Vect}(X - 4) \text{ et } (X - 4) \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi_1 - \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}).$$

Base de $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

La matrice de $\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}$ dans $\mathcal{B}_1$ est $A = M_1 + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On remarque que $-2C_1 + C_2 = 0$, donc, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$ et $\text{Im}(B) = \text{Vect}(C_1)$. De plus, comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(B) = 1$.
D'où, par le théorème du rang,

$$\dim((\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = \dim(\text{Ker}(B)) = 2 - \text{rg}(B) = 1$$

De plus, en revenant aux vecteurs $X - 2 \in \text{Ker}(\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

Donc,

$$\text{Ker}(\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}) = \text{Vect}(X - 2) \text{ et } (X - 2) \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi_1 + \text{id}_{\mathbb{R}_1[X]}).$$

Partie B : Quelques généralités sur φ_n

Q7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. On se propose dans cette question de déterminer $\text{Ker}(\varphi_n)$.

On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.

- (a) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{2x - (a + b)}{x^2 - (a + b)x + ab}$ est continue sur I .
- (b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .
- (c) Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} y = 0.$$

- (d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Dédire de la question **Q8.(c)** une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p})$.
- (e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Dédire de la question **Q8.(c)** une base de l'espace vectoriel $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$ lorsque cela est possible.
On pourra discuter suivant les valeurs de a et b .

Réponse

Q9. La linéarité de φ_n se montrer de la même manière que dans **Q1**, je vous laisse la rédiger.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par définition $\deg(P) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans P .

On sait alors que $\deg(P') \leq n - 1$ et le coefficient de X^{n-1} est na_n .

D'où $(X - a) \times (X - b) \times P'$ est de degré au plus $n + 1$ et le coefficient de X^{n+1} est na_n .

De plus, $n \left(X - \frac{a+b}{2} \right) \times P$ est de degré au plus $n + 1$ et le coefficient de X^{n+1} est aussi na_n .

On en déduit que le coefficient de X^{n+1} de $\varphi_n(P)$ est nul et donc, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

φ_n est un endomorphisme.

Q10. (a) Pour tout $x \in I$, $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$. Or, $x > \max(a, b)$, donc, $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b) \neq 0$, donc,

la fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{2x - (a + b)}{x^2 - (a + b)x + ab}$ est continue sur I .

- (b) Une primitive F de la fonction f sur I est $F : x \mapsto \ln(|x^2 - (a + b)x + ab|)$.
Or, $x > \max(a, b)$, donc, $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b) > 0$.
Donc,

$$F : x \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab).$$

(c) On remarque que (E) est équivalente à :

$$y' - \frac{n}{2} \times \frac{2x - (a+b)}{(x-a)(x-b)} y = 0.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto \lambda \times e^{\frac{n}{2} \ln(x^2 - (a+b)x + ab)} = \lambda \times (x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $P \in \text{Ker}(\varphi_{2p})$. On sait alors que :

$$(X-a) \times (X-b) \times P' - n \times \left(X - \frac{a+b}{2}\right) P = 0.$$

Donc, pour tout $x > \alpha$,

$$P'(x) - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} P(x) = 0.$$

Donc, par la question (c), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x > \alpha$,

$$P(x) = \lambda \times (x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}}.$$

Comme n est pair, on sait que $\frac{n}{2} \in \mathbb{R}$ et l'expression de droite est bien polynomiale.

De plus, les polynômes P et $\lambda \times (X^2 - (a+b)X + ab)^{\frac{n}{2}}$ coïncident pour une infinité de réel, donc, les deux polynômes sont égaux :

$$P = \lambda \times (X^2 - (a+b)X + ab)^{\frac{n}{2}}.$$

D'où,

$$\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Vect} \left((X^2 - (a+b)X + ab)^{\frac{n}{2}} \right).$$

En calculant, on a :

$$\varphi \left((X^2 - (a+b)X + ab)^{\frac{n}{2}} \right) = \dots = 0.$$

Donc,

$$\text{Ker}(\varphi_{2p}) = \text{Vect} \left((X^2 - (a+b)X + ab)^{\frac{n}{2}} \right).$$

(e) Soit $P \in \text{Ker}(\varphi_{2p+1})$.

Comme précédemment, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x > \alpha$,

$$P(x) = \lambda \times (x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}} = \lambda \times ((x-a)(x-b))^{\frac{n}{2}}.$$

Attention : comme n est impair, alors l'expression $((x-a)(x-b))^{\frac{n}{2}}$ n'est pas toujours polynomiale. En effet $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$.

Cas 1 : $a \neq b$. Dans ce cas, $((x-a)(x-b))^{\frac{n}{2}}$ n'est pas une expression polynomiale en x .

Comme P est un polynôme, on a nécessairement $\lambda = 0$.

Donc, $P = 0$ et

$$\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \{0\}.$$

Cas 1 : $a = b$. Dans ce cas, l'expression $((x-a)(x-b))^{\frac{n}{2}} = (x-a)^n$ est polynomiale et on montre comme dans la première question que :

$$\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \text{Vect}((X-a)^n).$$



Problème 2 : Intégrale généralisée

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale généralisée :

$$I_{n,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^n}{t^\alpha} dt.$$

Pour tout $t > 0$, on note : $f_{n,\alpha}(t) = \frac{(\sin(t))^n}{t^\alpha}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

De plus, dans le cas où $\alpha \leq 1$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Partie 1 : Étude du cas où $n = 1$

On s'intéresse à la convergence de $I_{1,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

Dans cette sous-partie, on suppose que $\alpha > 1$.

Q1. On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ diverge.

Q2. On suppose $1 < \alpha < 2$. Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge absolument.

Réponse

Q1. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Or, $\alpha - 1 \geq 1$, donc, $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann).

Donc, par théorème de comparaison, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable en 0.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ ne converge pas absolument, autrement dit, que l'intégrale $\int_0^1 \left| \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right| dt$ diverge. *Remarque : le choix de la borne « 1 » est arbitraire ici mais sera utile dans la justification suivante.*

Or, sur $]0, 1]$, le sinus est positif, donc, $\left| \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right| = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$, et, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ ne converge pas.

Ainsi,

L'intégrale $I_{1,\alpha}$ diverge.

Q2. ► L'intégrande est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

► De plus, au voisinage de 0,

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Comme $1 < \alpha < 2$, on sait que $\alpha - 1 < 1$, donc (intégrale de Riemann), $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable en 0.

► Au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Or, $\alpha > 1$, donc (intégrale de Riemann), $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$I_{1,\alpha}$ converge absolument.

Dans cette sous-partie, on suppose que $0 < \alpha \leq 1$.

Q3. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge absolument.

Q4. Soit $x \geq 1$. Montrer que :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \times \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Q5. En déduire que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ convergent.

Q6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} |\sin(t)| dt = 2$.

Indication : Discuter selon la parité de n pour simplifier la valeur absolue.

Q7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \frac{2}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}$.

Indication : Minorer $\frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \in [n \times \pi, (n+1) \times \pi]$.

Q8. En déduire que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ ne converge pas absolument.

Réponse

Q3. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$.

De plus,

$$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha}.$$

Or, $1 - \alpha \geq 0$, donc, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0^{1-\alpha} \in \mathbb{R}$.

Donc, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable en 0.

Donc,

$$\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \text{ converge.}$$

Q4. Soit $x \geq 1$. On intègre par parties. On note $u(t) = \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ et $v(t) = -\cos(t)$, avec $u'(t) = -\alpha \times t^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et $v'(t) = \sin(t)$.

On a :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\alpha \times \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Donc,

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \times \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Q5. Comme $\alpha > 0$ et $\cos$ est bornée,

$$\frac{\cos(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0.$$

De plus, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et

$$\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right),$$

où $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $1 + \alpha > 1$).

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ converge.

Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \text{ converge.}$$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si n est pair, alors $\sin$ est positive sur $[n \times \pi, (n+1) \times \pi]$ et

$$\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} |\sin(t)| dt = \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} = -\cos((n+1) \times \pi) + \cos(n \times \pi) = 2.$$

Si n est impair, alors $\sin$ est négative sur $[n \times \pi, (n+1) \times \pi]$ et

$$\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} |\sin(t)| dt = - \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \sin(t) dt = -[-\cos(t)]_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} = \cos((n+1) \times \pi) - \cos(n \times \pi) = 2.$$

Dans les deux cas,

$$\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} |\sin(t)| dt = 2.$$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [n \times \pi, (n+1) \times \pi]$, $t \leq (n+1) \times \pi$.

Donc, comme $\alpha > 0$,

$$\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}.$$

Donc, comme $|\sin(t)| \geq 0$,

$$\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \geq \frac{|\sin(t)|}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}.$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha} dt \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha} \times \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} |\sin(t)| dt.$$

Par la question précédente,

$$\int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \frac{2}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}.$$

Q8. On somme les inégalités précédentes pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ où $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(N+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \sum_{n=0}^N \frac{2}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha}.$$

Or, par le rappel,

$$\sum_{n=0}^N \frac{2}{(n+1)^\alpha \times \pi^\alpha} = \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, par théorème de minoration, $\int_0^{(N+1) \times \pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi,

l'intégrale $I_{1,\alpha}$ ne converge pas absolument.

Partie 2 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie, on prend $n = 1$ et $\alpha = 1$ et l'objectif est de calculer :

$$I_{1,1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note

$$J_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)} dt.$$

Q9. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale J_N converge.

Q10. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Q11. Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculer $J_{N+1} - J_N$.

Q12. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $J_N = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note

$$K_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2N+1) \times t)}{t} dt.$$

Q13. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale K_N converge et que $K_N = \int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Q14. En déduire que $K_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} I_{1,1}$.

On considère la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Q15. Montrer que $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{6}$ et en déduire que h est prolongeable par continuité en 0. On donnera la valeur de $h(0)$.

Q16. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et que $h'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6}$.

Q17. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Q18. Soient $a < b$ des réels et $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(Nt) dt = 0$.

Indication : on pourra intégrer par parties dans $\int_a^b g(t) \sin(Nt) dt$.

Q19. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin((2N+1) \times t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Q20. En déduire que $I_{1,1} = \frac{\pi}{2}$.

Réponse

Q9. La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

De plus, $\frac{\sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2N+1 \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)}$ est donc prolongeable par continuité en 0, donc, est intégrable en 0.

Ainsi,

l'intégrale J_N converge absolument, donc converge.

Q10. On a :

$$\sin(a) - \sin(b) = \operatorname{Im}(e^{ia}) - \operatorname{Im}(e^{ib}) = \operatorname{Im}(e^{ia} - e^{ib}).$$

En factorisant par l'angle moitié, on fait apparaître une formule d'Euler :

$$\sin(a) - \sin(b) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Q11. Par linéarité,

$$J_{N+1} - J_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2N+3) \times t) - \sin((2N+1) \times t)}{\sin(t)} dt.$$

Or,

$$\sin((2N+3) \times t) - \sin((2N+1) \times t) = 2 \cos\left(\frac{2N+3+2N+1}{2} \times t\right) \times \sin\left(\frac{2N+3-2N-1}{2} \times t\right) = 2 \sin(t) \times \cos((2N+2) \times t).$$

Donc,

$$J_{N+1} - J_N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2N+2) \times t) dt = 2 \left[\frac{1}{2N+2} \times \sin((2N+2) \times t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{N+1} \times (\sin((N+1) \times \pi) - \sin(0)) = 0.$$

Donc,

$$J_{N+1} - J_N = 0.$$

Q12. La suite (J_N) est constante, donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $J_N = J_0$.

$$\text{Or, } J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Donc,

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, J_N = \frac{\pi}{2}.$$

Q13. On applique le changement de variable $u = (2N+1) \times t$. La fonction $t \mapsto (2N+1) \times t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $t = \frac{1}{2N+1} \times u$, $dt = \frac{1}{2N+1} du$ et $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline u & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & \frac{\pi}{2} \\ \hline & (2N+1)\frac{\pi}{2} \end{array}$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge (**Q5**), l'intégrale $\int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge.

Donc, par la formule de changement de variable,

$$K_N \text{ converge et que } K_N = \int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Q14. D'après **Q5**,

$$K_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = I.$$

Q15. On a :

$$h(t) = \frac{t - \sin(t)}{t \times \sin(t)}.$$

$$\text{Or, } t - \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^3}{6} + o(t^3). \text{ Donc, } t - \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6}.$$

Donc,

$$h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^3}{6}}{t \times t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{6}.$$

On en déduit que $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R}$.

Donc,

$$h \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } h(0) = 0.$$

Q16. La fonction $\sin$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

De plus, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(t) = -\frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2 \times \cos(t) + (\sin(t))^2}{t^2 \times (\sin(t))^2}.$$

Or, $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$. Donc, $(\sin(t))^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$.

De plus, $-t^2 \times \cos(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^4)$.

Donc, $-t^2 \times \cos(t) + (\sin(t))^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} -t^2 + \frac{t^4}{2} + t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^4}{6} + o(t^4)$.

D'où, $-t^2 \times \cos(t) + (\sin(t))^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^4}{6}$.

Donc,

$$h'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^4}{6}}{t^2 \times t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6}$$

Q17. La fonction h est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, $h'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$.

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, h est dérivable en 0, $h'(0) = \frac{1}{6}$ et h' est continue en 0.

Ainsi,

$$h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Q18. On intègre par parties : $u(t) = g(t)$, $u'(t) = g'(t)$, $v(t) = -\frac{1}{N} \cos(Nt)$ et $v'(t) = \sin(Nt)$. On a :

$$\int_a^b g(t) \sin(Nt) dt = \left[-\frac{g(t) \cos(Nt)}{N} \right]_a^b + \int_a^b \frac{g'(t) \cos(Nt)}{N} dt = \frac{g(b) \cos(Nb)}{N} - \frac{g(a) \cos(Na)}{N} + \frac{1}{N} \int_a^b g'(t) \cos(Nt) dt.$$

Or,

$$\left| \frac{g(b) \cos(Nb)}{N} \right| \leq \frac{|g(b)|}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, par encadrement, $\frac{g(b) \cos(Nb)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. De même, $\frac{g(a) \cos(Na)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1}{N} \int_a^b g'(t) \cos(Nt) dt \right| \leq \frac{1}{N} \int_a^b |g'(t) \cos(Nt)| dt \leq \frac{1}{N} \int_a^b |g'(t)| dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $\frac{1}{N} \int_a^b g'(t) \cos(Nt) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(Nt) dt = 0.$$

Q19. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc par **Q15**,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin(N \times t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où, par extraction de suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin((2N+1) \times t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Q20. On a : $K_N - J_N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin((2N+1) \times t) dt$.

$$\text{Or, } J_N = \frac{\pi}{2}, \text{ donc, } K_N = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \times \sin((2N+1) \times t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, par **Q13**, $K_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} I$.

Donc, par unicité de la limite,

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$ et $\alpha = 2$

Q21. Montrer que la fonction $f_{3,2}$ est intégrable sur $]2, +\infty[$.

Q22. Soit $t \in \mathbb{R}$. Linéariser $(\sin(t))^3$.

Q23. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Q24. Montrer que, pour tout $t > 0$, $t - \frac{t^3}{3} \leq \sin(t) \leq t$.

Q25. En déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln(3)$, puis la valeur de $I_{3,2}$.

Réponse

Q21. La fonction $f_{3,2}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et,

$$f_{3,2}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemman avec $2 > 1$).

Par théorème,

la fonction $f_{3,2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$, donc sur $]2, +\infty[$.

Q22. On utilise les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} (\sin(t))^3 &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{e^{i(3t)} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-i(3t)}}{(2i)^3} \\ &= \frac{2i \sin(3t) - 3 \times 2i \sin(t)}{(2i)^3} \\ &= -\frac{\sin(3t) - 3 \sin(t)}{4}. \end{aligned}$$

$$(\sin(t))^3 = -\frac{\sin(3t) - 3\sin(t)}{4}.$$

Q23. On a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} -\frac{1}{4} \times \frac{\sin(3t)}{t^2} + \frac{3}{4} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

De plus, les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(3t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ sont continues sur $[\varepsilon, +\infty[$ et sont un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

Donc, par théorème, ces fonctions sont intégrables. On peut alors appliquer la linéarité de l'intégrale :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = -\frac{1}{4} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

Dans la première intégrale, on utilise le changement de variable $u = 3t$ (la fonction $t \mapsto 3t$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$).

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = -\frac{1}{4} \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u^2}{3^2}} \times \frac{1}{3} du + \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = -\frac{3}{4} \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

D'où, par relation de Chasles,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

Q24. On étudie les fonction $\psi : t \mapsto \sin(t) - t$ et $\phi : t \mapsto \sin(t) - t + \frac{t^3}{6}$.

Les fonction ψ et ϕ sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $t \geq 0$,

$$\psi'(t) = \cos(t) - 1 \leq 0, \quad \phi'(t) = \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad \phi''(t) = -\sin(t) + t.$$

Donc, ψ est décroissante et $\psi(0) = 0$. On en déduit que ψ est négative et que

$$\text{pour tout } t > 0, \sin(t) \leq t.$$

On en déduit que, ϕ'' est négative, donc ϕ' est croissante. Comme $\phi'(0) = 0$, on en déduit que ϕ' est positive, puis que ϕ est croissante.

Donc, comme $\phi(0) = 0$, ϕ est positive et,

$$\text{pour tout } t > 0, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t).$$

Q25. Comme $t^2 > 0$, on a, pour tout $t \geq \varepsilon$,

$$\frac{t - \frac{t^3}{6}}{t^2} \leq \frac{\sin(t)}{t^2} \leq \frac{t}{t^2}.$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{1}{t} - \frac{t}{6} dt \leq \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t} dt \leq \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{1}{t} dt.$$

Or,

$$\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{1}{t} - \frac{t}{6} dt = \left[\ln(t) - \frac{t^2}{12} \right]_{\varepsilon}^{3\varepsilon} = \ln(3\varepsilon) - \ln(\varepsilon) - \frac{(3\varepsilon)^2}{12} + \frac{\varepsilon^2}{12} = \ln(3) - \frac{(3\varepsilon)^2}{12} + \frac{\varepsilon^2}{12} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(3).$$

De même, $\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{1}{t} dt = \ln(3) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(3)$.

Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \ln(3).$$

Par Q11,

$$I_{3,2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^3}{t^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{3}{4} \times \ln(3).$$

Partie 4 : Étude du cas où $n = \alpha$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = I_{n,n} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt$. On admet que $A_1 = \frac{\pi}{2}$.

Q26. Calculer pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} dt$.

Q27. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'intégrale A_n converge absolument.

Q28. A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_2 .

Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = (\sin(t))^n$.

Q29. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe P_k une fonction polynomiale telle que : $g_n^{(k)}(t) = P_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k}$.

Q30. Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$ converge et vérifier que : $\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt$.

Q31. En déduire que : $A_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$.

Q32. Déterminer la valeur de A_3 .

Réponse

Q26. On applique le changement de variable $u = x \times t$ où $t \mapsto x \times t$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{x}} \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = A_1.$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Q27. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'intégrale A_n converge absolument.

La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

De plus,

$$\left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1^n \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1.$$

Donc, $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

D'autre part,

$$\left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^n}\right),$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $n > 1$).

Donc, $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

A_n converge absolument.

Q28. On a :

$$A_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos(2t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t^2} dt.$$

On note $u(t) = 1 - \cos(2t)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$. On a $u'(t) = 2 \sin(2t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$.

De plus, comme $\cos$ est bornée,

$$u(t) \times v(t) = -\frac{1 - \cos(2t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2t \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u(t) \times v(t) = -\frac{1 - \cos(2t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \quad (\text{car } \cos \text{ est bornée}).$$

Donc, par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} -\frac{2 \sin(2t)}{t} dt$ converge et

$$A_2 = \frac{1}{2} \times \left([u(t) \times v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{2 \sin(2t)}{t} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt.$$

Donc, par **Q26**,

$$A_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Q29. On note $\mathcal{H}_k$: « il existe P_k une fonction polynomiale telle que : $g_n^{(k)}(t) = P_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k}$. »

Initialisation. On a $g_n^{(0)}(t) = (\sin(t))^n$. Donc, $P_0 = 1$ convient. Donc, $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $k \in [0, n-1]$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, il existe P_k une fonction polynomiale telle que : $g_n^{(k)}(t) = P_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k}$.

En dérivant (toutes les fonctions sont dérivables), on a :

$$\begin{aligned} g_n^{(k+1)}(t) &= -\sin(t) \times P'_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k} + P_k(\cos(t)) \times (n-k) \times \cos(t) \times (\sin(t))^{n-k-1} \\ &= -P'_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^2 \times (\sin(t))^{n-k-1} + P_k(\cos(t)) \times (n-k) \times \cos(t) \times (\sin(t))^{n-k-1} \\ &= \left(P'_k(\cos(t)) \times (1 - (\cos(t))^2) + (n-k) \times P_k(\cos(t)) \times \cos(t) \right) \times \sin(t)^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

En notant $P_{k+1} = P'_k(X) \times (1 - X^2) + (n-k) \times P_k(X) \times X$, on a $\mathcal{H}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Q30. ► La fonction $t \mapsto \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

De plus,

$$\frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{P_k(\cos(t)) \times t^{n-k}}{t^{n-k}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} P_k(\cos(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} P_k(\cos(0)).$$

Donc, $t \mapsto \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est prolongeable par continuité en 0, donc, est intégrable en 0.

D'autre part, comme $\cos$ et $\sin$ sont bornées,

$$\frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t^{n-k}}\right).$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{n-k}}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $n-k \geq 2 > 1$).

Donc, $t \mapsto \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi,

$$t \mapsto \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt \text{ converge.}$$

On intègre par parties, en posant $u(t) = g_n^{(k)}(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{n-k-1} \times \frac{1}{t^{n-k-1}}$. On a $u'(t) = g_n^{(k+1)}(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^{n-k}}$.
On a

$$u(t) \times v(t) = -\frac{1}{n-k-1} \times P_k(\cos(t)) \times (\sin(t))^{n-k} \times \frac{1}{t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{P_k(\cos(t))}{n-k-1} \times \frac{t^{n-k}}{t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{P_k(\cos(t))}{n-k-1} \times t \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

De plus, $u(t) \times v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right)$.

Comme $n-k-1 \geq 1$, on a $\frac{1}{t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $u(t) \times v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, on peut intégrer par parties et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = 0 - \int_0^{+\infty} g_n^{(k+1)}(t) \times \left(-\frac{1}{n-k-1}\right) \times \frac{1}{t^{n-k-1}} dt.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt = \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt.$$

Q31. Par la question précédente,

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{g_n(t)}{t^n} dt = \frac{1}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(1)}(t)}{t^{n-1}} dt = \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(2)}(t)}{t^{n-2}} dt = \dots = \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times \dots \times \frac{1}{1} \times \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t^{n-(n-1)}} dt.$$

Ainsi,

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

Q32. On a :

$$A_3 = \frac{1}{2!} \int_0^{+\infty} \frac{g_3''(t)}{t} dt.$$

Or,

$$g_3(t) = (\sin(t))^3 = -\frac{\sin(3t) - 3\sin(t)}{4}.$$

Donc,

$$g_3''(t) = \frac{3^2 \sin(3t) - 3\sin(t)}{4}.$$

Donc,

$$A_3 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} \times \left(3^2 \times \frac{\sin(3t)}{t} - 3 \frac{\sin(t)}{t}\right) dt = \frac{9}{8} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t} dt - \frac{3}{8} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Donc, par **Q26**,

$$A_3 = \frac{9}{8} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2}$$

Ainsi,

$$A_3 = \frac{3\pi}{8}.$$

- Fin du sujet -

