

Suites de fonctions – TD₉

Exercices pratiques

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \frac{1}{n}.$$

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc,

(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$.

Donc, $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi,

(f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(f_n(x))^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$.

Donc,

(f_n^2) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g : x \mapsto x^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n^2(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \times \left(2x + \frac{1}{n}\right).$$

D'où, prenons $x = n^2$, on a :

$$\frac{1}{n} \times \left(2n^2 + \frac{1}{n}\right) \leq \|f_n^2 - g\|_\infty.$$

Or,

$$\frac{1}{n} \times \left(2n^2 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \times 2n^2 \sim 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc,

$$\|f_n^2 - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi,

(f_n^2) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Comme précédemment,

(f_n^2) converge simplement sur $[0, a]$ vers $g : x \mapsto x^2$.

Pour tout $x \in [0, a]$,

$$|f_n^2(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \times \left(2x + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \times \left(2a + \frac{1}{n}\right).$$

Donc,

$$0 \leq \|f_n^2 - g\|_{[0,a]} \leq \frac{1}{n} \times \left(2a + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par encadrement, $\|f_n^2 - g\|_{[0,a]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Autrement dit,

(f_n^2) converge uniformément sur $[0, a]$ vers $g : x \mapsto x^2$.

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{n \times x}{1 + n^2 \times x^2}$.

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a, +\infty[$.

Réponse

Convergence simple.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Cas 1 : $x \neq 0$. On a $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \times x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Cas 2 : $x = 0$. On a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

(f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme.

En notant $x_n = \frac{1}{n}$, où $n \geq 1$, on remarque que,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\frac{1}{2} \leq \|f_n - f\|_{\infty}.$$

Donc, $\|f_n - f\|_{\infty}$ ne tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi,

(f_n) ne converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto n^\alpha \times x \times (1-x)^n$.

Discuter selon les valeurs de α de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) .

Réponse

Convergence simple.

Soit $x \in [0, 1]$.

- Cas 1 : $x \in]0, 1[$. Par croissances comparées, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Cas 2 : $x = 0$. On a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Cas 3 : $x = 1$. On a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

(f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme.

On cherche à calculer ou majorer $\|f_n - f\|_\infty$.

Pour cela, on étudie les variations de $\varphi_n : x \mapsto \varphi_n(x) = f_n(x) - f(x) = n^\alpha \times x \times (1-x)^n$.

La fonction φ_n est dérivable sur $[0, 1]$ et, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\varphi'_n(x) = n^\alpha \times x^{n-1} \times (1 - (n+1) \times x).$$

Donc,

x	0	$\frac{1}{n+1}$	1
$\varphi'_n(x)$	0	+	0
φ_n	0	$\varphi_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$	0

On en déduit que

$$\|f_n - f\|_\infty \times \frac{1}{n+1} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

De plus,

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \times \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Or, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $-\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$n \times \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

Par composition des **limites** :

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Donc,

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\alpha-1} \times e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ e^{-1} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Donc,

(f_n) converge uniformément vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} x \times \sqrt{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n \times (x-1)}{1 - n \times \sqrt{n}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) .

Réponse**Convergence simple.**

Soit $x \in [0, 1]$.

► Cas 1 : $x = 1$. On a $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

► Cas 2 : $x \in [0, 1[$.

Pour n assez grand, on a $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, donc,

$$f_n(x) = \frac{n \times (x-1)}{1 - n \times \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x-1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

(f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme.

On cherche à calculer ou majorer $\|f_n - f\|_\infty$.

Soit $x \in [0, 1]$

► Cas 1 : $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. On a : $|f_n(x) - f(x)| = x \times \sqrt{n} \leq \frac{1}{n} \times \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

► Cas 2 : $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. On a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n \times (1-x)}{n \times \sqrt{n} - 1} \leq \frac{n}{n \times \sqrt{n} - 1}.$$

Donc,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \max\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n}{n \times \sqrt{n} - 1}\right).$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{n}{n \times \sqrt{n} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, $\max\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n}{n \times \sqrt{n} - 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis, par encadrement,

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

(f_n) converge uniformément vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : on a aussi la majoration :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{n}{n \times \sqrt{n} - 1}.$$

Exercice 5 :

Déterminer la limite, si elle existe de la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(x \times e^{-n \times x^2}) dx$.

Réponse

On note $f_n(x) = \cos(x \times e^{-n \times x^2})$.

Soit $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(0) = 1$.

Donc, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 1$ sur $[0, 1]$.

1. Méthode 1 : convergence dominée.

Les fonctions f_n et f sont continue sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq 1$.

De plus, la fonction $\varphi x \mapsto 1$ est continue, positive et intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

2. Méthode 2 : convergence uniforme.

Exercice 6 :

On note $I = [0, 2]$ et, pour tout $t \in I$, $f_0(t) = t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$. Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réponse

Convergence simple : soit $t \in [0, 2]$.

On note $u_n = f_n(t)$. La suite (u_n) est une suite récurrente définie par :

$$u_0 = f_0(t) = t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

On considère $g : x \mapsto \sqrt{2+x} - x$. La fonction g est dérivable sur $[0, 2]$ et, pour tout $x \in [0, 2]$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{2+x}}{2\sqrt{2+x}}.$$

Or, $x \geq 0$, donc $2\sqrt{2+x} \geq 2\sqrt{2} > 1$.

Donc, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante.

De plus, $g(0) = \sqrt{2}$ et $g(2) = 0$, donc, g est positive.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$.

Donc, (u_n) est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou tend vers $+\infty$.

De plus, par récurrence (je vous la laisse), on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Donc, (u_n) est majorée.

Ainsi, (u_n) converge. On a montré que, pour tout $t \in [0, 2]$, la suite $(f_n(t))$ converge vers une limite $f(t) \in [0, 2]$.

la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 2]$.

Convergence uniforme :

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$, on a $f(t) = \sqrt{2 + f(t)}$.

D'où, pour tout $t \in [0, 2]$,

$$|f_{n+1}(t) - f(t)| = \left| \sqrt{2 + f_n(t)} - \sqrt{2 + f(t)} \right| = \frac{|f_n(t) - f(t)|}{\sqrt{2 + f_n(t)} + \sqrt{2 + f(t)}}.$$

Or, on a montré que $f(t) \geq 0$, donc, $\sqrt{2 + f_n(t)} + \sqrt{2 + f(t)} \geq \sqrt{2 + f(t)} \geq \sqrt{2} > 0$.

Par passage à l'inverse,

$$|f_{n+1}(t) - f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_n(t) - f(t)\|_\infty.$$

Donc,

$$\|f_{n+1} - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_n - f\|_\infty.$$

Par récurrence (je vous la laisse encore),

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \|f_0 - f\|_\infty.$$

D'où, par théorème d'encadrement,

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 2]$.

Exercice 7 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t^2 - t) dt.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0, 1]$.
 3. Montrer que f n'est pas la fonction nulle.
 4. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
 5. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercices théoriques
Exercice 8 :

Soient $a < b$ des réels et (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, b]$.

On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère (x_n) une suite d'éléments de $[a, b]$ qui converge vers $x \in [a, b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Réponse

Par inégalité triangulaire :

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|.$$

Or, la suite (f_n) converge uniformément vers f . Donc, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et f est continue, donc, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Donc, par théorème d'encadrement,

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exercice 9 :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I .

1. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I . Étudier le caractère borné de la fonction f .
 2. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I . Étudier le caractère borné de la fonction f .

Réponse

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note $f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \in [n, +\infty[. \end{cases}$

Montrons que les fonctions f_n sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- si $x \in [0, n[$, alors $|f_n(x)| = |x| \leq n$.
- si $x \in [n, +\infty[$, alors $|f_n(x)| = 0 \leq n$.

Donc, f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (et $\|f_n\|_\infty \leq n$).

Étudions la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x \in [0, n[$, donc, $f_n(x) = x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto x$.

La fonction limite f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

On ne peut rien dire quant au caractère borné d'une limite simple de suite de fonctions.

2. On sait que la suite de fonction f_n converge uniformément vers f , donc, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_N - f\|_\infty \leq 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in I$,

$$|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \|f_N - f\|_\infty + |f_N(x)| \leq 1 + |f_N(x)|.$$

Or, f_N est bornée, donc il existe $C > 0$ tel que $\|f_N\|_\infty \leq C$.

D'où,

$$|f(x)| \leq 1 + \|f_N\|_\infty \leq 1 + C.$$

Donc, f est bornée.

La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.

Exercice 10 :

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que les fonctions f_n sont convexes.

On suppose que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I .

Montrer que f est convexe.

Réponse

Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que :

$$f((1 - \lambda) \times x + \lambda \times y) \leq (1 - \lambda) \times f(x) + \lambda \times f(y).$$

On sait que les fonctions f_n sont convexes, donc,

$$f_n((1 - \lambda) \times x + \lambda \times y) \leq (1 - \lambda) \times f_n(x) + \lambda \times f_n(y).$$

Or, la suite de fonction (f_n) converge simplement vers f sur I , donc, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, on a :

$$f((1 - \lambda) \times x + \lambda \times y) \leq (1 - \lambda) \times f(x) + \lambda \times f(y).$$

Donc,

f est convexe.

Exercice 11 :

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

On se place dans le cadre d'application du théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (ii) (f_n) converge simplement sur I vers f ,
- (iii) (f'_n) converge uniformément sur I vers g ,

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f .

Réponse

Le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f' = g$.
Soit $[a, b] \subset I$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$f_n(x) - f(x) = \int_a^x f'_n(t) - g(t) \, dt + f_n(a) - f(a).$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \left| \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| \, dt \right| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \left| \int_a^x \|f'_n - g\|_\infty \, dt \right| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |x - a| \times \|f'_n - g\|_\infty + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |b - a| \times \|f'_n - g\|_\infty + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|f_n - f\|_{[a,b]}^\infty \leq |b - a| \times \|f'_n - g\|_\infty + |f_n(a) - f(a)|.$$

Or, par (ii), $f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$; et par (iii), $\|f'_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_{[a,b]}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi,

la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f .