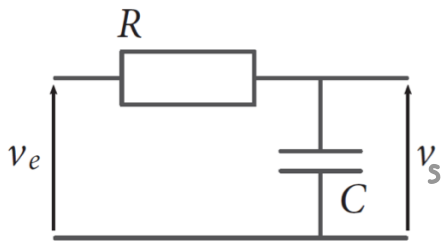
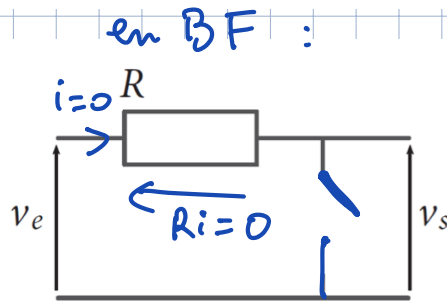


1 Détermination rapide de la nature d'un filtre

Déterminer sans calcul, mais en justifiant votre raisonnement, la nature des filtres ci-dessous :

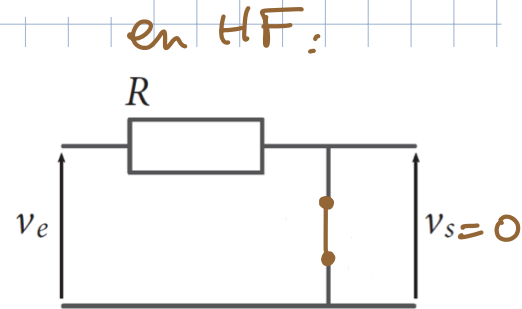


Filtre 1



Filtre 1

$$v_s = v_e - Ri = v_e$$



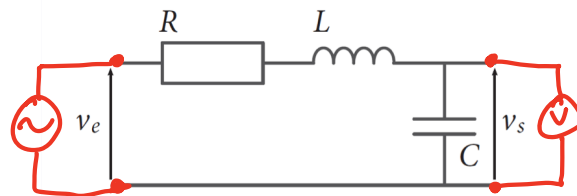
Filtre 1

$$v_s = 0$$

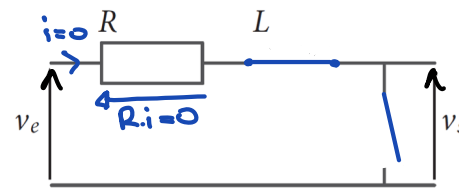
$\Rightarrow$ le filtre 1 est un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

en BF :

en HF :



Filtre 2



Filtre 2

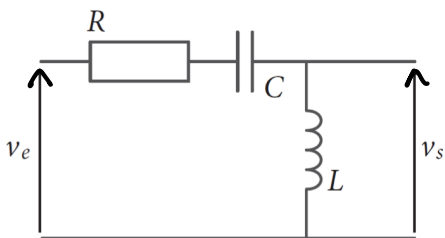
$$v_s = v_e - Ri = v_e$$

$\Rightarrow$ le filtre 2 est un filtre passe-bas du 2^{ième} ordre.

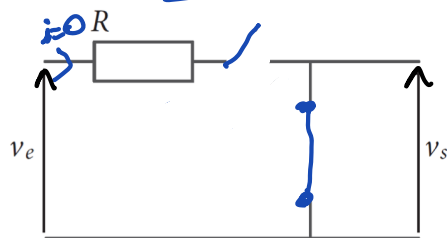
$$v_s = 0$$

BF :

en HF :

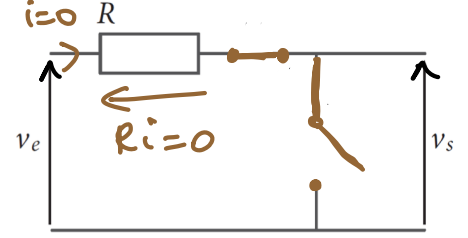


Filtre 3



Filtre 3

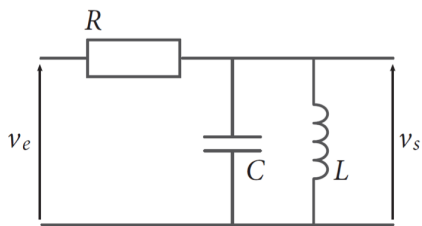
$$v_s = 0$$



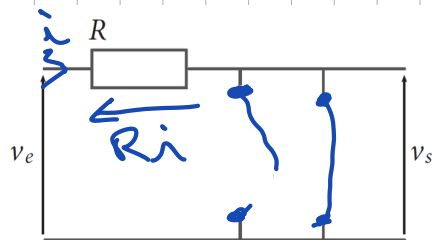
Filtre 3

$$v_s = v_e - Ri = v_e$$

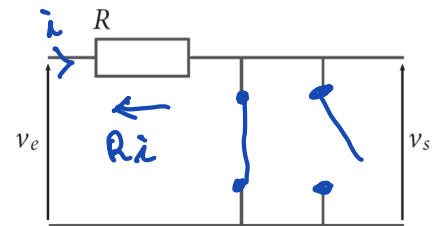
$\Rightarrow$ le filtre 3 est un filtre passe-haut du 2^{ième} ordre



Filtre 4



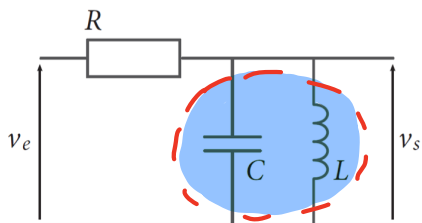
Filtre 4



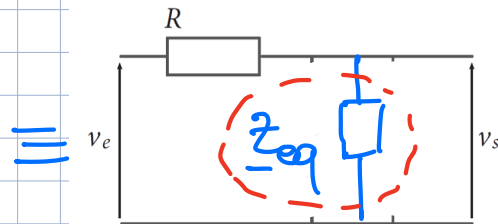
Filtre 4

$$V_s = 0$$

$$V_s = 0$$

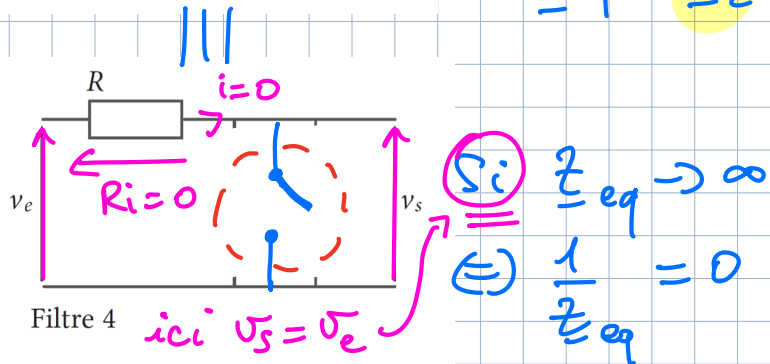


Filtre 4



Filtre 4

avec $z_{eq} = z_c \parallel z_L$.
 soit $\frac{1}{z_{eq}} = \frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_L}$.



Filtre 4

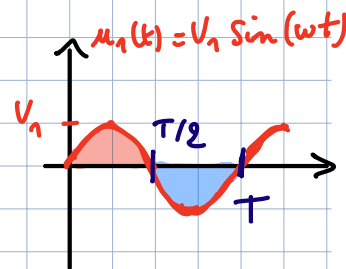
ici $v_s = v_e$

$$\Leftrightarrow j\omega + \frac{1}{jL\omega} = 0 \Leftrightarrow j^2\omega = -\frac{1}{L\omega}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

2 Valeur moyenne et valeur efficace

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace des tensions suivantes :



2.1. $u_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $V_1 = 5 \text{ V}$

Rappel : $\langle u_1(t) \rangle \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_1(t) dt$ avec t_0 quelconque (on choisit $t_0 = 0$).

et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (période de u_1)

d'où : $\langle u_1(t) \rangle = \langle V_1 \cos(\omega t + \varphi) \rangle = V_1 \underbrace{\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle}_0 = 0$

Rappel : $u_{1\text{eff}} \triangleq \sqrt{\langle u_1^2(t) \rangle}$: val. RMS (Root Mean Square).

$$= \sqrt{V_1^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{1/2}} = V_1 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{V_1}{\sqrt{2}} = 3,5 \text{ V}.$$

2.2. $u_2(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t + \varphi)$ avec $V_0 = V_1 = 1 \text{ V}$

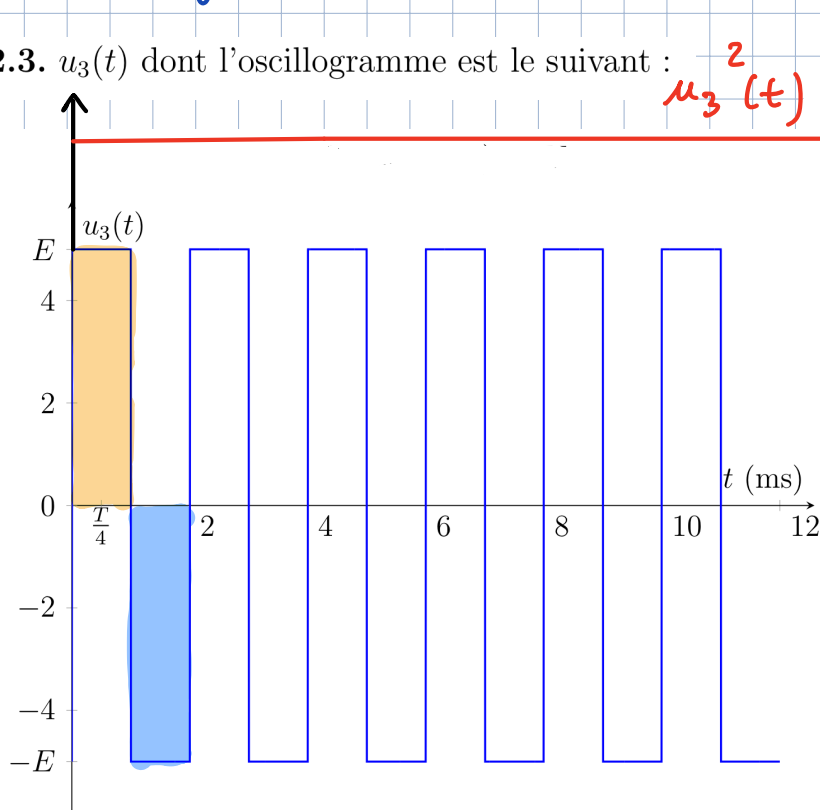
$$\begin{aligned} \langle u_2(t) \rangle &= \langle V_0 + V_1 \sin(\omega t + \varphi) \rangle = V_0 + V_1 \underbrace{\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle}_0 \\ &= V_0 \\ &= 1 \text{ V} \end{aligned}$$

$$u_{2\text{eff}} = \sqrt{\langle u_2^2(t) \rangle}$$

$$\begin{aligned} u_{2\text{eff}}^2 &= \langle u_2^2(t) \rangle = V_0^2 + 2V_0V_1 \underbrace{\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle}_0 + V_1^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{1/2} \\ &= V_0^2 + \frac{V_1^2}{2} \end{aligned}$$

$$U_{2\text{eff}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22 \text{ V}$$

2.3. $u_3(t)$ dont l'oscillogramme est le suivant :



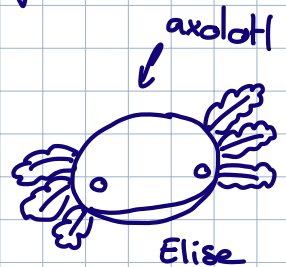
en V^2

$$25 = 5^2$$

graphiquement :

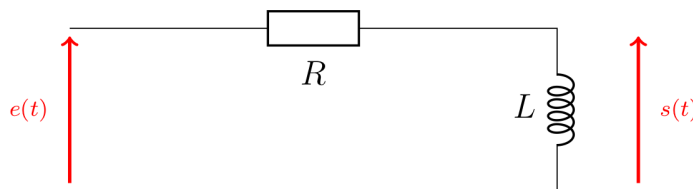
$$\langle u_3 \rangle = 0 \text{ V}$$

$$U_{3\text{eff}} = \sqrt{E^2} = E = 5 \text{ V}$$



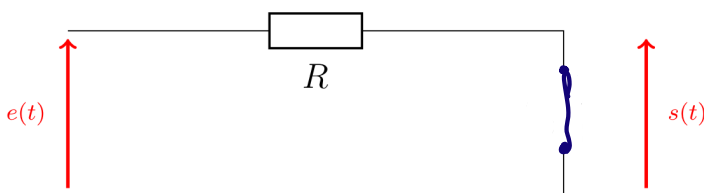
3 Filtre passe-haut

On considère le filtre RL ci-dessous dont la bobine est supposée parfaite avec $R = 100 \Omega$ et $L = 50 \text{ mH}$.



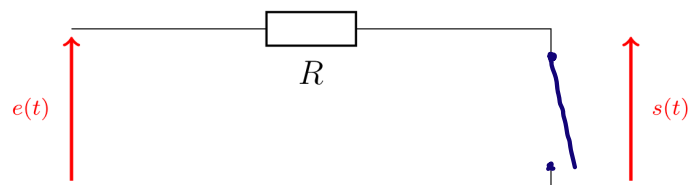
3.1. Prévoir sans calcul, mais en justifiant votre raisonnement, la nature de ce filtre.

en BF :



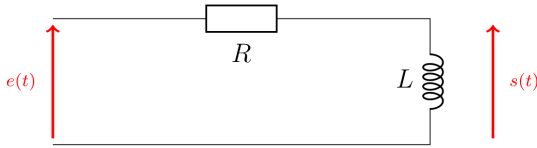
$$s(t) = 0$$

en HF :



$$s(t) = e(t) - Ri = e(t)$$

3.2. Déterminer sa fonction de transfert, sa pulsation de coupure ω_c et sa bande passante à -3 dB.

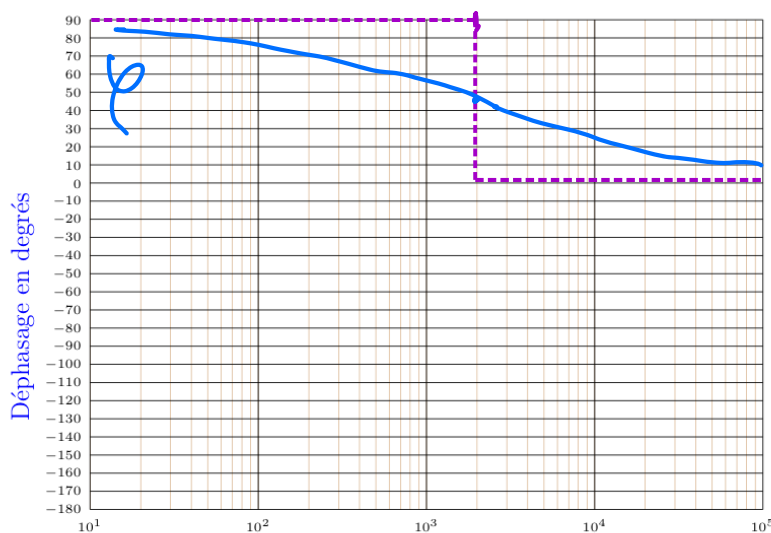
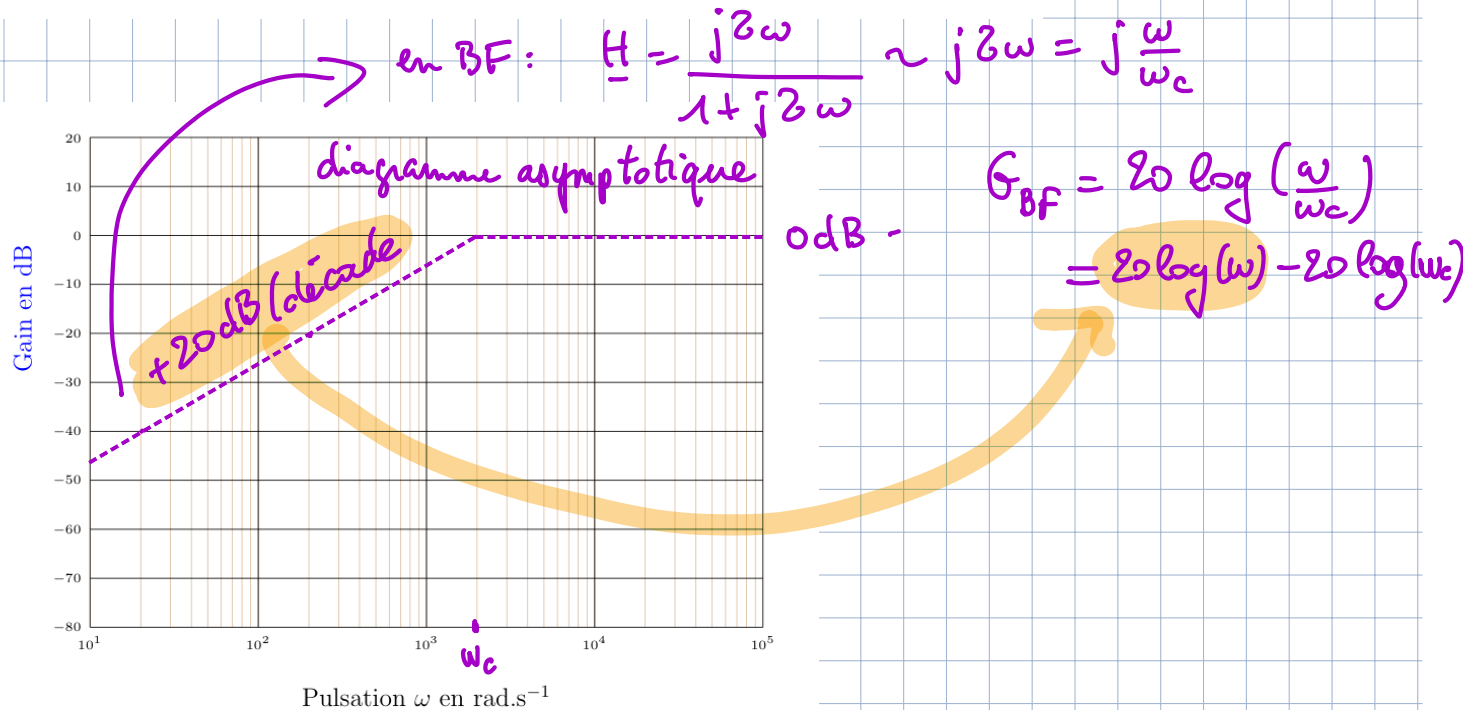


Diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + R}$

$\Rightarrow \underline{H} = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$ avec $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_c}$

$\omega_c = \frac{R}{L} = \frac{10^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ Bande passante = $[\omega_c; +\infty[$.

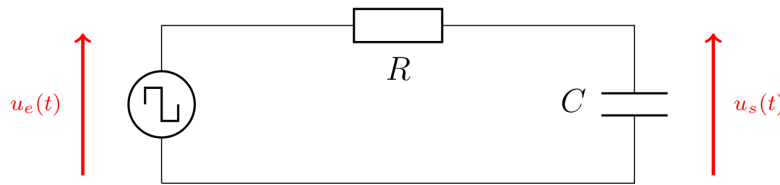
3.3. Tracer son diagramme de Bode sur le diagramme vierge ci-après :



$\varphi_{BF} = \text{Arg}(j) = \frac{\pi}{2}$

4 Filtre passe-bas

On impose une tension carrée $u_e(t)$ de rapport cyclique 0,5, allant de 0 V à 5 V à l'entrée du circuit électronique suivant :



Sachant qu'une tension carrée $u(t)$ d'amplitude E et de valeur moyenne nulle peut être décomposée en série de FOURIER par :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$$

4.1. Donner la décomposition en série de FOURIER de $u_e(t)$. L'harmonique de rang n sera noté $u_{en}(t)$ et son amplitude U_{enm} (valeur maximale, d'où le m en indice pour ne pas confondre avec la valeur efficace).

On a $u_e(t) = E + \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$ avec $E = 2,5 \text{ V}$.

On voit que $n = 2k+1$ est impair, et l'harmonique n s'écrit :

$$u_{en}(t) = \frac{4E}{\pi \times n} \sin(n\omega t) \quad \text{donc} \quad U_{enm} = \frac{4E}{\pi \times n}$$

4.2. Donner l'expression du fondamental de u_e , exprimer puis calculer son amplitude.

fondamental : $u_{e1}(t) = \frac{4E}{\pi} \sin(\omega t)$ et $U_{e1m} = \frac{4E}{\pi} = 3,2 \text{ V}$

4.3. Donner l'expression des harmoniques de rang 2 et 3 de u_e , exprimer puis calculer leur amplitude.

On a $u_{e2}(t) = 0$ (pas d'harmonique 2)

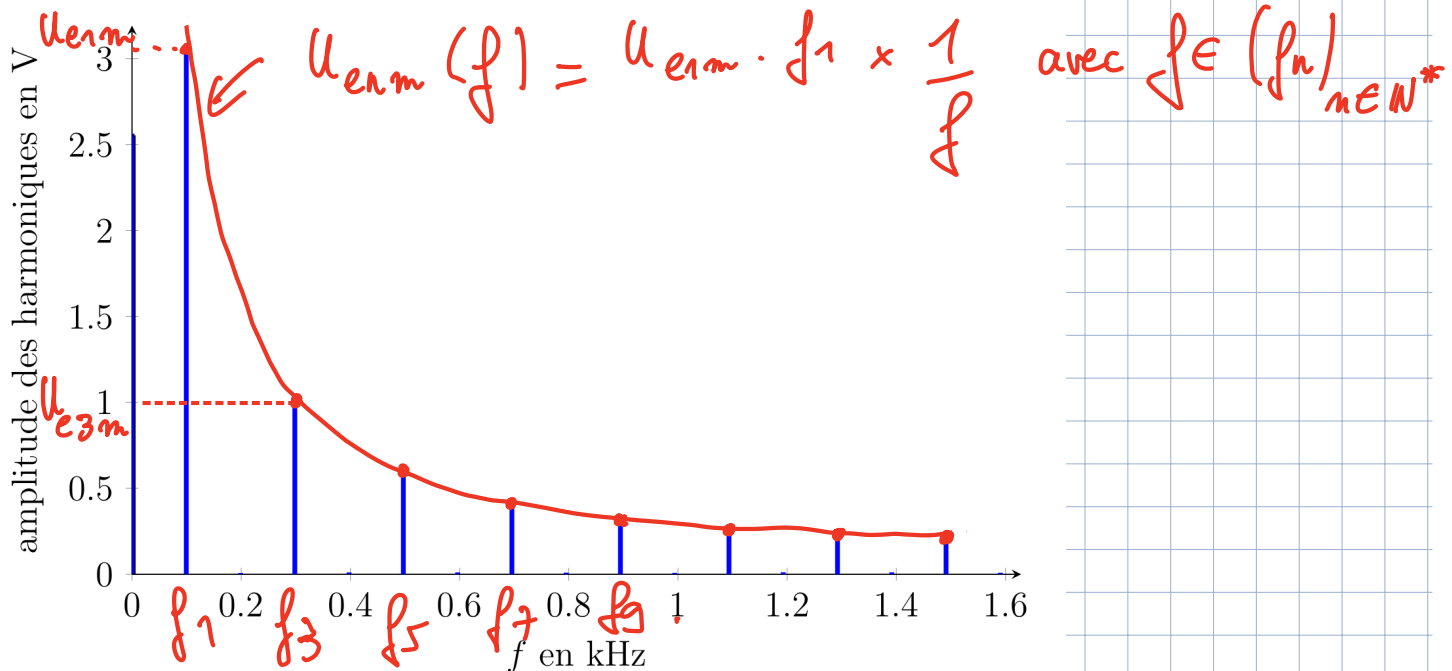
et $u_{e3}(t) = \frac{4E}{3\pi} \sin(3\omega t)$ et $U_{e3m} = \frac{U_{e1m}}{3} \approx 1,1 \text{ V}$.

4.4. Ce spectre est-il en accord avec les résultats précédents ? Donner l'expression de l'enveloppe du spectre puis tracer-la.

On remarque que $U_{enm} = \frac{U_{e1m}}{n}$ or $f_n = n f_1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{f_1}{f_n}$.

$\Rightarrow U_{enm} = \frac{U_{e1m} \cdot f_1}{f_n} = k \times \frac{1}{f_n}$.

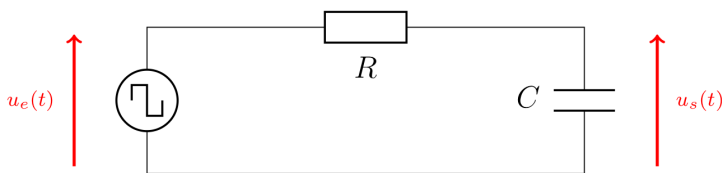
Spectre en amplitude de $u(t)$



4.5. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ est :

$$\tau \frac{du_s}{dt} + u_s = u_e \quad (1)$$

Donner l'expression de τ .



d'après la loi des mailles :

$$U_e = U_s + R i$$

$$\Leftrightarrow U_e = U_s + RC \frac{dU_s}{dt}$$

$$\Leftrightarrow U_e = U_s + \tau \frac{dU_s}{dt} \quad \text{avec } \tau = RC$$

On se place désormais en régime sinusoïdal pur avec $u_e = U_{em} \cos(\omega t)$

4.6. A partir de l'équation différentielle, montrer que la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de ce circuit, qui peut aussi être qualifié de filtre est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Donner l'expression de ω_c qui est appelée pulsation de coupure du filtre.

(1) en notation complexe : $\tau \frac{d\underline{u}_s}{dt} + \underline{u}_s = \underline{u}_e$

avec $\underline{u}_e(t) = U_{em} e^{j\omega t}$ et $\underline{u}_e = U_{em}$ (son amplitude compl)
 $\underline{u}_s(t) = \underline{U}_s e^{j\omega t}$ et $\underline{U}_s$: amplitude complexe de $\underline{u}_s(t)$.

(1) $\Rightarrow \tau j\omega \underline{U}_s e^{j\omega t} + \underline{U}_s e^{j\omega t} = \underline{u}_e e^{j\omega t}$
 $\Rightarrow (\tau j\omega + 1) \underline{U}_s \cancel{e^{j\omega t}} = \underline{u}_e \cancel{e^{j\omega t}}$
 $\Rightarrow \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$ or $\tau = \frac{1}{\omega_c}$ d'où $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$.

4.7. Exprimer le gain G et le déphasage φ .

$$\begin{aligned} G &= 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}\right) \quad \text{nb : } \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ &= 20 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \\ &= -10 \times \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ &= 0 - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\end{aligned}$$

Rappel si $\underline{z} = a + jb = |\underline{z}| e^{j\varphi}$ avec $\varphi = \arg(\underline{z})$

$$\Rightarrow a + jb = |\underline{z}| \cos \varphi + j |\underline{z}| \sin \varphi \Rightarrow \begin{cases} a = |\underline{z}| \cos \varphi \\ b = |\underline{z}| \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a} \text{ et } \cos \varphi \text{ du signe de } a.$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0$$

4.8. Exprimer puis calculer la fréquence de coupe f_c du filtre.

$$\omega_c = 2\pi f_c \quad \text{d'où} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot RC} = \frac{1}{2\pi \times 10 \times 10^3 \times 0,1 \times 10^{-6}}$$

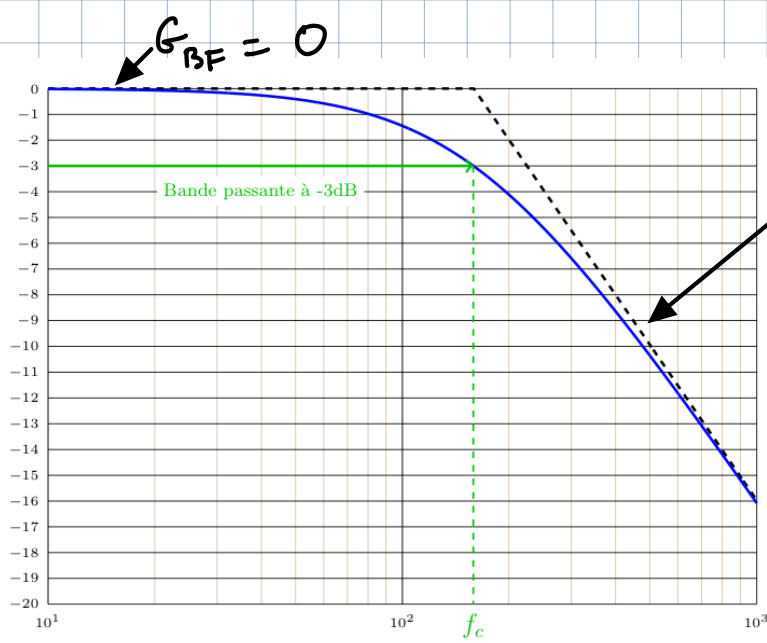
$$f_c = 159 \text{ Hz}$$

4.9. Trouver l'équation des asymptotes et les tracer.

Etude en BF :

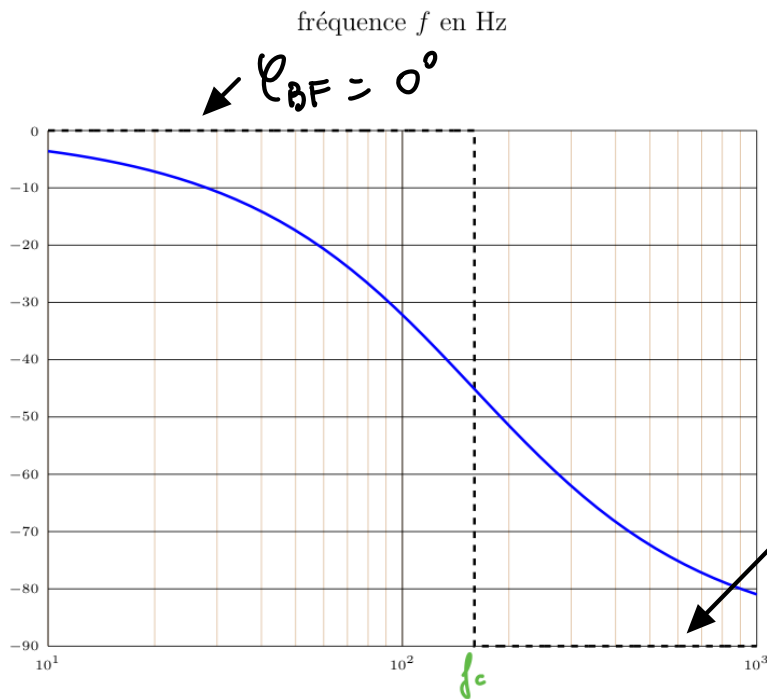
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\omega} \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{asympt BF}} = 0 \text{ dB} \\ \varphi_{\text{asympt BF}} = 0 \text{ rad} = 0^\circ \end{cases}$$

Gain en dB



$$G_{HF} = -20 \log \left(\frac{f}{f_c} \right)$$

Déphasage en degrés

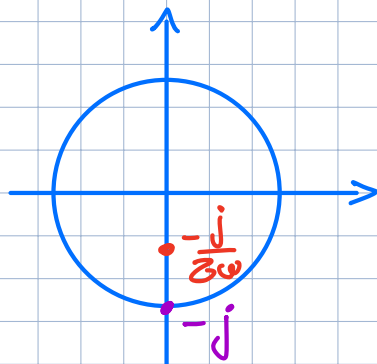


$$\varphi_{HF} = -90^\circ$$

En HF :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\omega} \stackrel{HF}{\approx} \frac{1 \times j}{j2\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{asympt HF} = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \\ \varphi_{asympt HF} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ \end{cases}$$

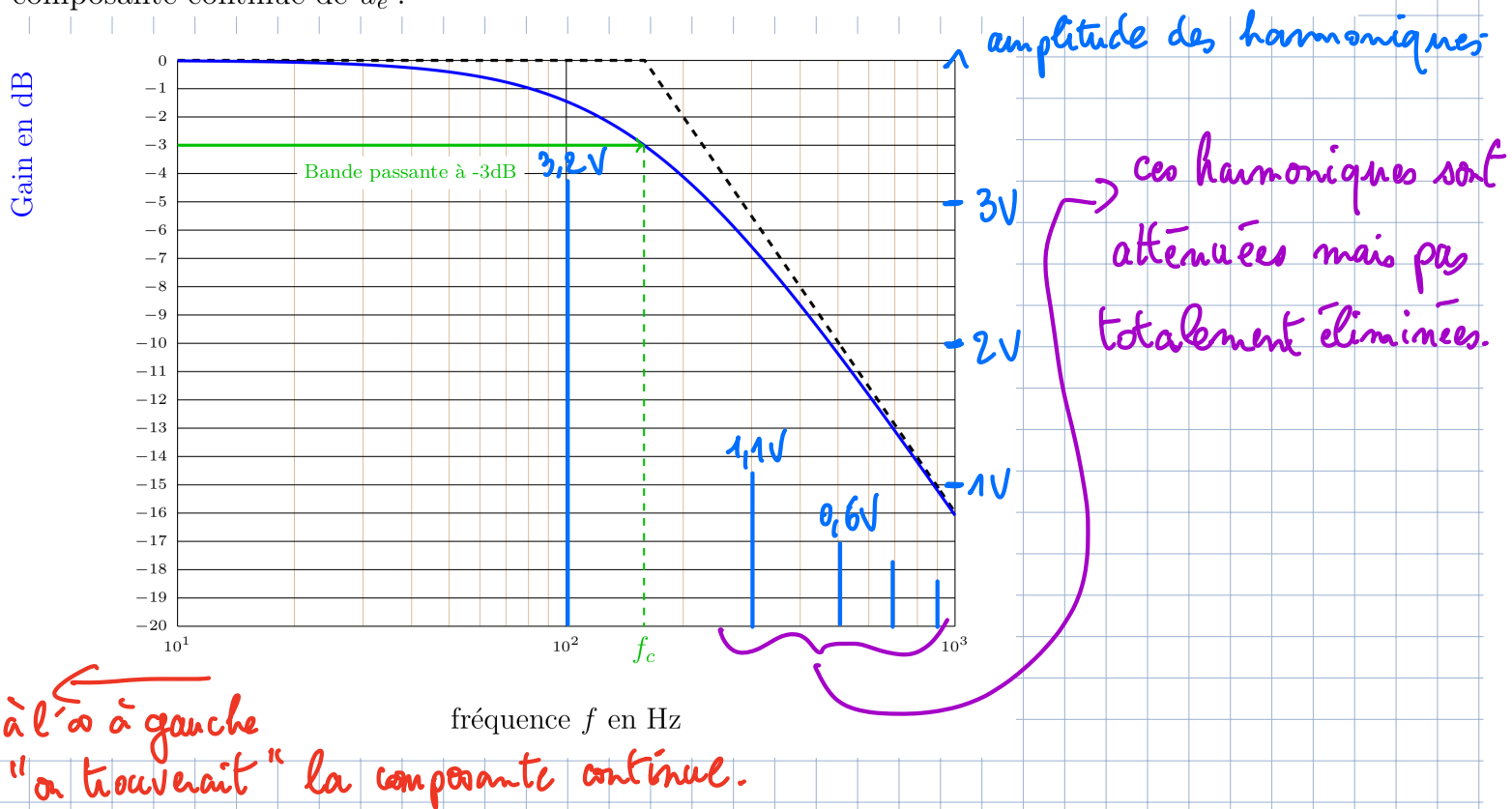
nb :



$$\arg(-j) = \arg\left(-\frac{j}{2\omega}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

On s'intéresse maintenant au cas où le circuit est alimenté par la tension u_e carrée étudiée en début d'exercice.

4.10. Placer, en superposition sur la courbe de gain, les harmoniques de rang $n \geq 1$ de u_e . Les harmoniques de rang $n \geq 3$ de u_e sont-elles efficacement filtrées? Qu'en est-il de la composante continue de u_e ?



la composante continue n'est pas filtrée car $G(\omega=0) = 0$ dB.

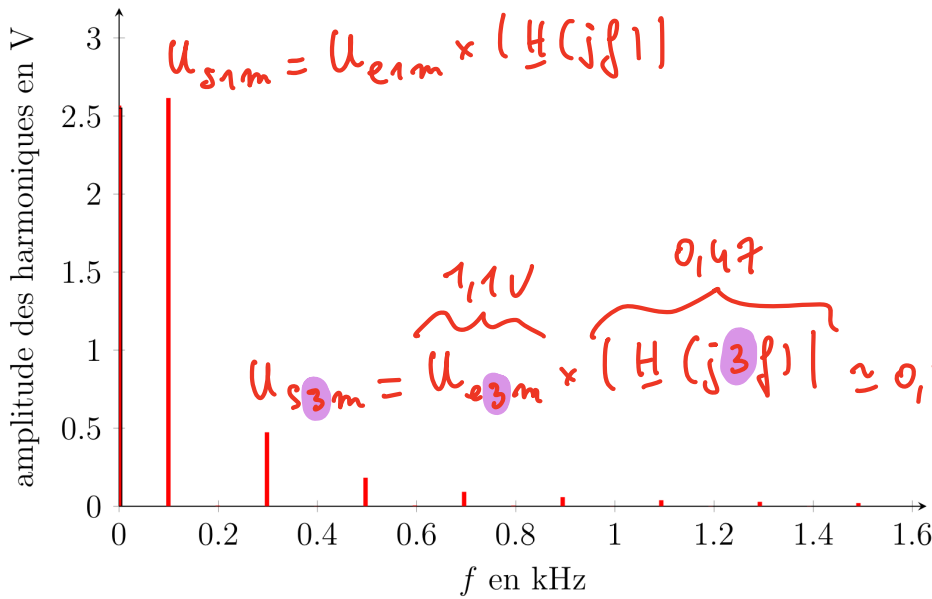
4.11. Exprimer puis calculer la composante continue de u_s notée U_{s0} , ainsi que l'amplitude de son fondamental notée U_{s1m} . On a relevé expérimentalement l'oscillogramme et le spectre de u_s :

On a $U_{s0} = U_{e0} \times |H(0)| = U_{e0} = 2,5$ V

et $U_{s1m} = U_{e1m} \times |H(jf)|$ avec $|H(jf)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$
 $= 2,7$ V $\approx 0,846$

4.12. Ce spectre est-il en accord avec les calculs précédents? De quel type de filtre s'agit-il?

Spectre en amplitude de $u_s(t)$

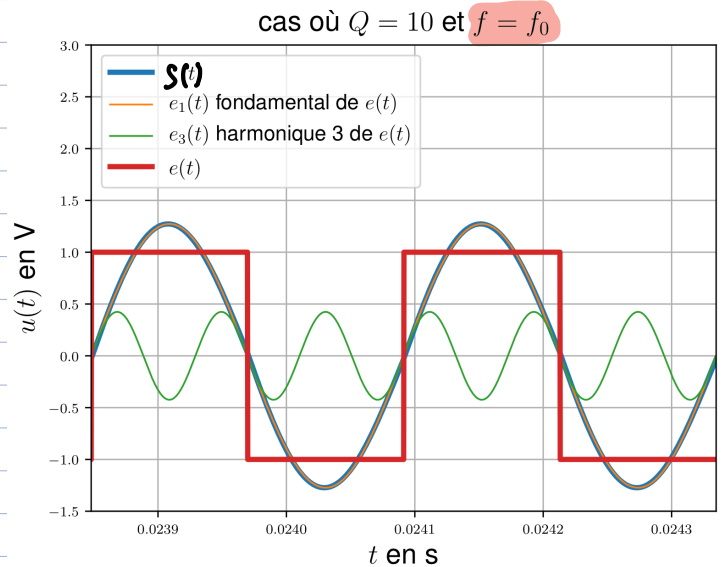
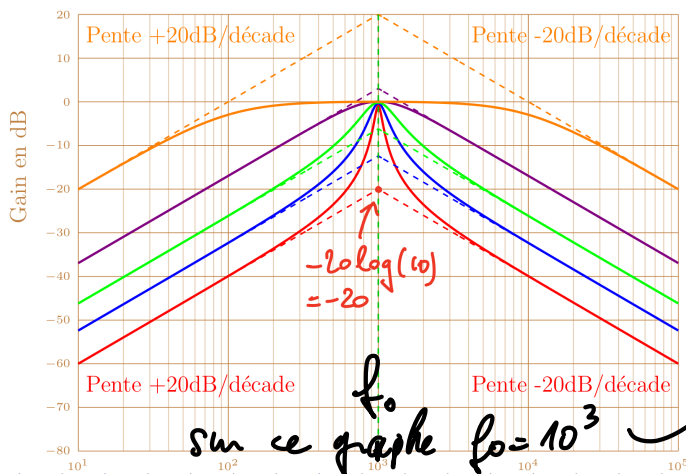
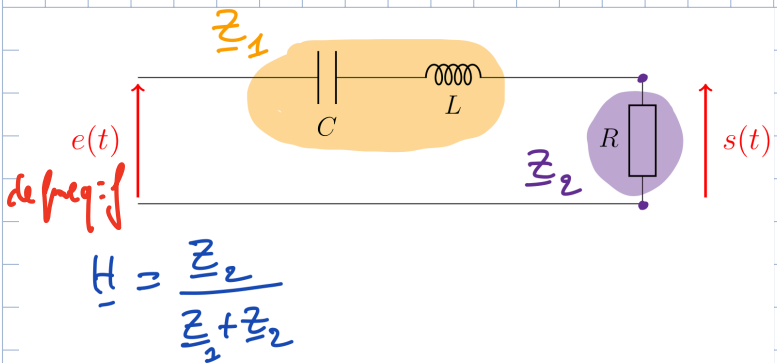


le spectre est en accord avec les résultats précédents

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

5 Utilisation d'un filtre passe bande

On souhaite récupérer le fondamental d'une tension carrée variant de 0 à 5V, de rapport cyclique 1/2 et de fréquence $f = 1300$ Hz à la sortie d'un filtre comportant uniquement une bobine d'inductance $L = 0,15$ H, un condensateur de capacité C et une résistance R . Proposer un montage avec les valeurs de C et R correspondantes.



ici on doit avoir $f_0 = f = 1300$ Hz
avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$
et Q grand. (par ex $Q=10$)

$$\omega_0 = 2\pi \times 1300 = 8168 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

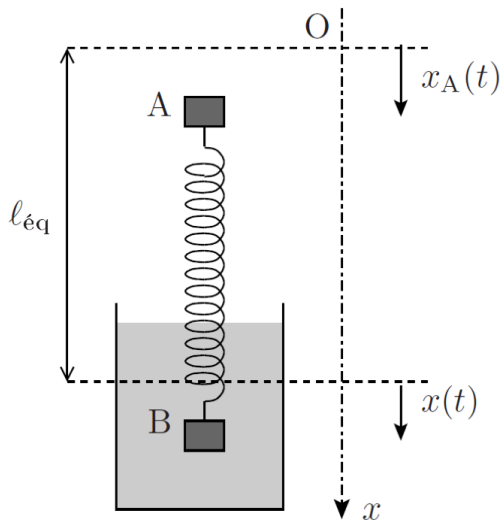
$$\text{ou } \frac{1}{LC} = 4\pi^2 f_0^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{0,15 \times (8168)^2} = 0,1 \mu\text{F}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow R = \frac{\omega_0 L}{Q} = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{2\pi \times 1300 \times 0,15}{10} = 123 \Omega$$

6 Oscillateur vertical en régime périodique non sinusoïdal



On considère l'oscillateur vertical amorti ci-contre. Une masselotte de masse m , plongée dans un liquide, est fixée à l'extrémité inférieure du ressort (l_0, k), alors qu'on impose un mouvement $x_A(t)$ (excitation) à la fixation supérieure du ressort. On considère le déplacement algébrique de la masse $x(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en l'absence d'excitation.

La masselotte est soumise à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$, à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -Mg\vec{u}_x$ (en notant M la masse du volume de fluide déplacé par la masselotte), à une force de frottements fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$ et à la force de rappel élastique du ressort.

L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ s'écrit :

$$m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = kx_A(t) \quad (1)$$

6.1. D'après (1), donner l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 . Ecrire (1) en fonction de ces paramètres uniquement.

L'oscillateur a pour fréquence propre $f_0 = 2 \text{ Hz}$.



$$m \ddot{x}(t) + R \dot{x}(t) + k x(t) = k x_A(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_A(t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$Q = \frac{m \omega_0}{R} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} m}{R} = \frac{\sqrt{k m}}{R}$$

Célia

6.2. Rappeler la condition pour qu'il y ait résonance et le cas échéant l'expression de la fréquence de résonance f_r , en fonction de Q et f_0 . La calculer pour $Q = 5$. Que remarque-t-on ?

Pour qu'il y ait résonance : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{k m} > \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow R < \sqrt{2 k m}$$

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 2,0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 25}} = 1,98 \text{ Hz} \approx f_0$$

6.3. Si l'oscillateur est soumis à une excitation $x_A(t) = X_{Am} \cos(\omega t + \varphi_A)$, montrer qu'en notation complexe, l'amplitude complexe $\underline{X}$ de $x(t)$ (la réponse de l'oscillateur) est :

$$\underline{X} = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{X}_A$$

où $\underline{X}_A$ est l'amplitude complexe de $x_A(t)$ et $\underline{H}(j\omega)$ la fonction de transfert de l'oscillateur. Donner l'expression de $\underline{X}_A$ et de $\underline{H}(j\omega)$.

$$\underline{X}_A = X_{Am} e^{j\varphi_A}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_A(t) = \underline{X}_A e^{j\omega t}$$

On note $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = X_m \exp(j\omega t + \varphi) = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\underline{X}} e^{j\omega t}$$

On écrit (1) en notation complexe :

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

$$\ddot{\underline{x}}(t) = j\omega \dot{\underline{x}}(t)$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \underline{x}(t)$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 \underline{x} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} e^{j\omega t} (-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) = \omega_0^2 \underline{X}_A e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{\omega_0^2}{(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)} \underline{X}_A$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \underline{H}(j\omega) \underline{X}_A \quad \text{avec} \quad \underline{H} = \frac{1 \times Q}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}\right) \times Q}$$

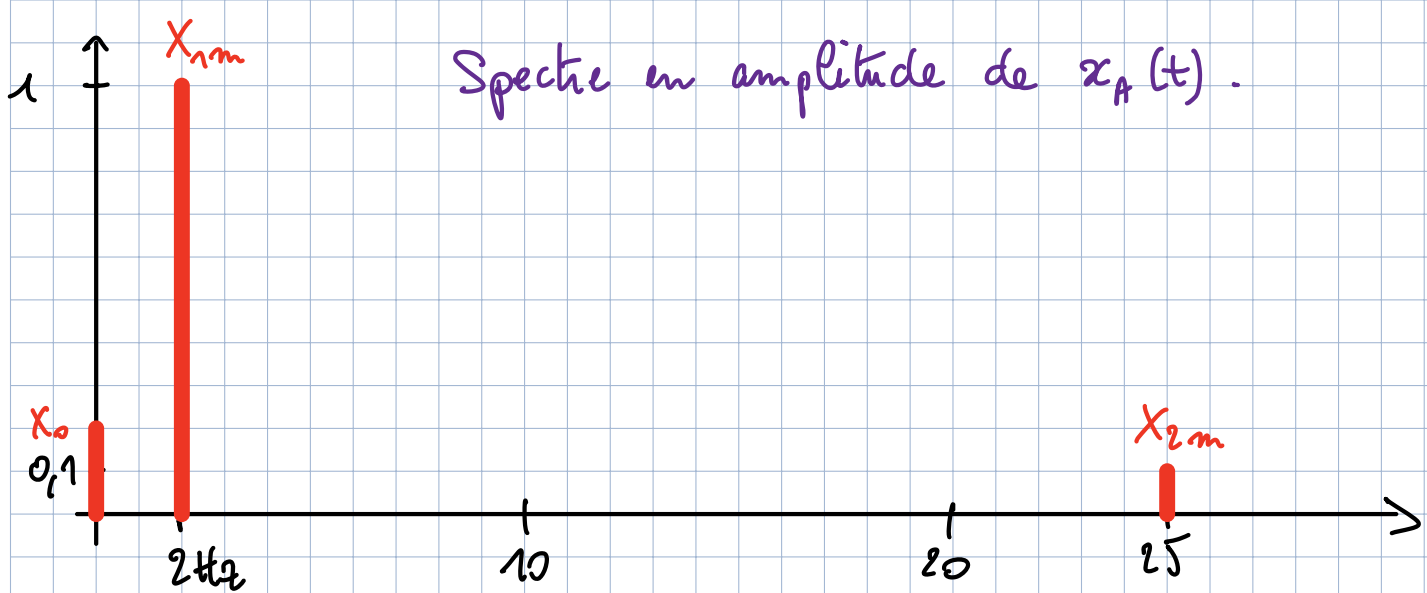
$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{Q}{Q(1 - u^2) + ju} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

6.4. Retrouver l'équation des asymptotes basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) pour le Gain $G = 20 \log |\underline{H}|$ et le déphasage $\varphi = \arg \underline{H}$. Puis tracer ces asymptotes en expliquant le placement de deux points pour les droites (Par convention, on arrête le tracé des asymptotes BF à f_0 , là on l'on commence celui des asymptotes HF).

en BF: $\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	en HF: $\omega \gg \omega_0$
$\underline{H} \sim 1$	$\underline{H} = \frac{Q \times j}{j^2} = -jQ$	$\underline{H} \sim \frac{1}{-u^2}$
$G \sim 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$	$G = 20 \log(Q)$	$G = 20 \log\left(\frac{1}{u^2}\right) = -40 \log(u)$
$\varphi \sim \arg(1) = 0 \text{ rad}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\pi$

Dans un premier temps, la masselotte est laissée dans l'air, le facteur de qualité de l'oscillateur est alors assez élevé $Q = 5$ (tracé noir). Pour sa part, l'excitateur comporte des défauts : il est paramétré pour générer une excitation sinusoïdale $x_{A1}(t) = X_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ avec $f_1 = f_0 = 2 \text{ Hz}$ mais il est mal réglé et rajoute une composante continue $x_{A0}(t) = X_0$ (offset), en plus d'une composante sinusoïdale $x_{A2}(t) = X_{2m} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ de fréquence $f_2 = 25 \text{ Hz}$, due à un léger défaut de l'excitateur. On a donc $x_A(t) = X_0 + x_{A1}(t) + x_{A2}(t)$.

6.5. Représenter le spectre de $x_A(t)$ sachant que $X_0 = 0,2 \text{ cm}$, $X_{1m} = 1 \text{ cm}$ et $X_{2m} = 0,1 \text{ cm}$.



6.6. Ecrire (1) en notation complexe. Puis exprimer, en régime établi, l'expression de $\underline{x}(t)$ (on pourra utiliser les expressions asymptotiques de $\underline{H}(j\omega)$ quand cela est possible).

$$\ddot{\underline{x}}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = X_0 + \underbrace{X_{1m} e^{j\varphi_1}}_{\underline{X}_1} e^{j\omega_1 t} + \underbrace{X_{2m} e^{j\varphi_2}}_{\underline{X}_2} e^{j\omega_2 t}$$

On aura $\underline{x}(t) = \underbrace{\underline{H}(0)}_1 X_0 + \underbrace{\underline{H}(j\omega_1)}_{-jQ} \underline{X}_1 e^{j\omega_1 t} + \underbrace{\underline{H}(j\omega_2)}_{-\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} = -\frac{f_0^2}{f_2^2} \approx 6,4 \cdot 10^{-3}} \underline{X}_2 e^{j\omega_2 t}$

terme d'amplitude négligeable

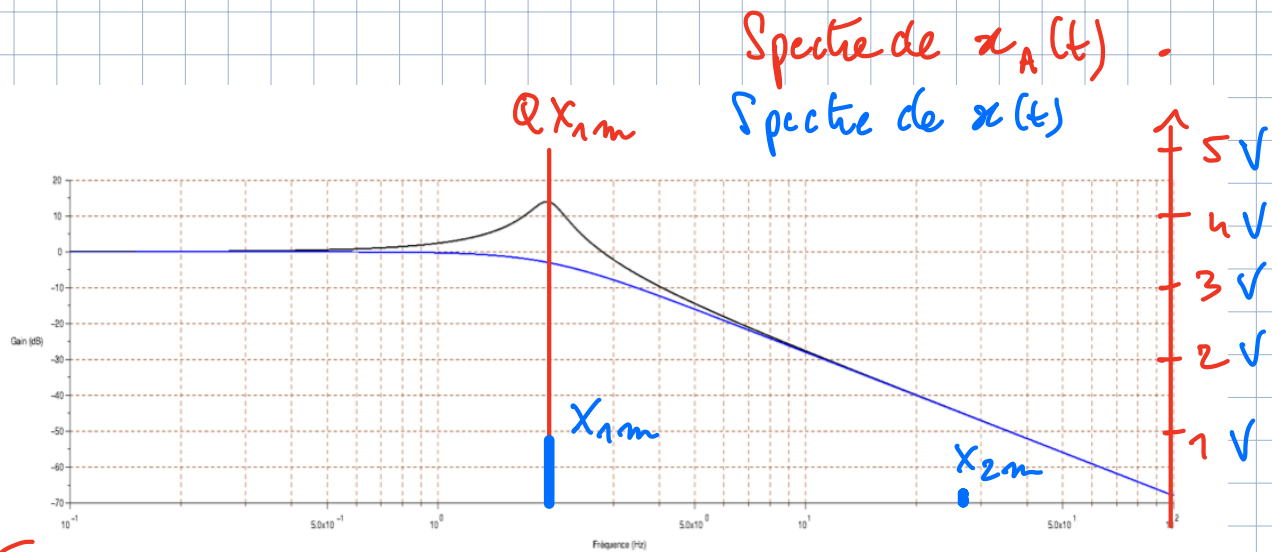
6.7. Donner l'expression de $x(t)$ et tracer son spectre.

$$\begin{aligned} \text{On a } x(t) &= \text{Re}(\underline{x}(t)) = X_0 + Q X_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) \\ &= X_0 + Q X_{1m} \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \end{aligned}$$

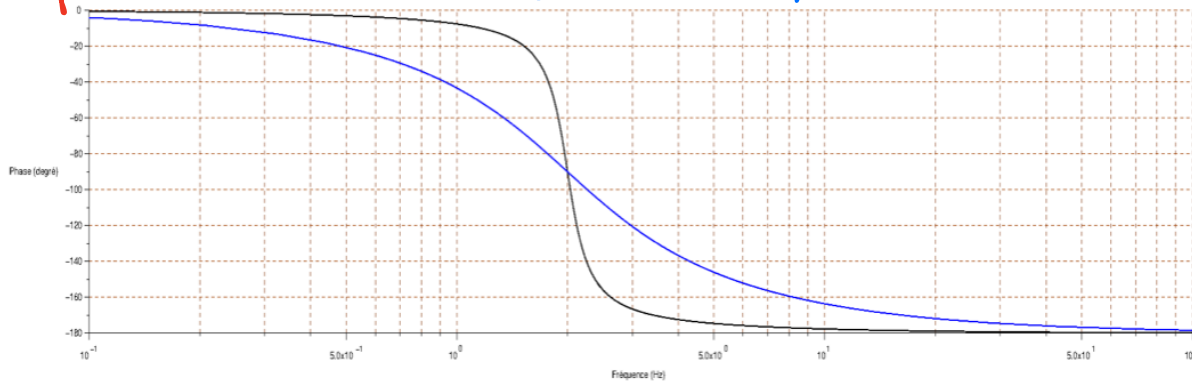


6.8. Que peut-on dire concernant le terme de fréquence f_2 ainsi que le terme constant de $x(t)$? Expliquer pourquoi l'oscillateur peut être qualifié de filtre passe-bas. Tracer le spectre de $x_A(t)$ en superposition avec la courbe de gain.

le terme de freq. f_2 a une amplitude négligeable devant celle des autres termes. les termes de freq $\gg \omega_0$ sont efficacement filtrés, il s'agit d'un filtre passe-bas du 2^e ordre



← Composante continue de x_A (ou de $x(t)$) -



Dans un second temps, la masselotte est placée dans de l'eau, le facteur de qualité de l'oscillateur est alors $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (tracé bleu). L'excitation globale reste identique à celle vue précédemment.

6.9. Donner la nouvelle expression de $x(t)$ et tracer son spectre.

6.10. Donner l'expression de la vitesse $v(t)$. Quelle composante est présente de manière significative ?

6.9 même chose que précédemment en remplaçant $Q = 5$ par $Q = 1/\sqrt{2}$.

6.10 On a $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$\approx \underbrace{Q X_{1m} \omega_1}_{8,9 \text{ cm/s}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \underbrace{\frac{f_0^2}{f^2} \omega_2 X_{2m}}_{0,1 \text{ cm/s}} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

avec $\omega_2 = \omega_0$

Seule la composante de freq. $f_1 = f_0$ est présente de manière significative.

7 Multiplieur analogique

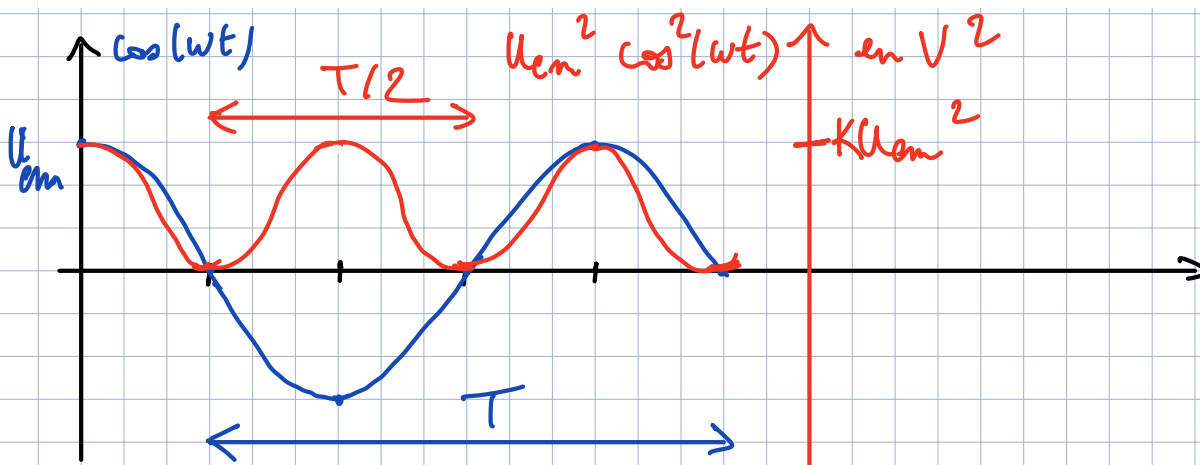
Un multiplieur analogique est un circuit électronique avec deux tensions u_1 et u_2 appliquées à l'entrée du circuit et qui délivre une tension u_s à la sortie du circuit telle que :

$$u_s = K u_1 u_2$$

où K est une constante positive.

On applique le signal $u_1(t) = u_2(t) = u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ sur les deux entrées du multiplieur.

7.1. Tracer l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$ à l'aide de votre calculatrice préférée.

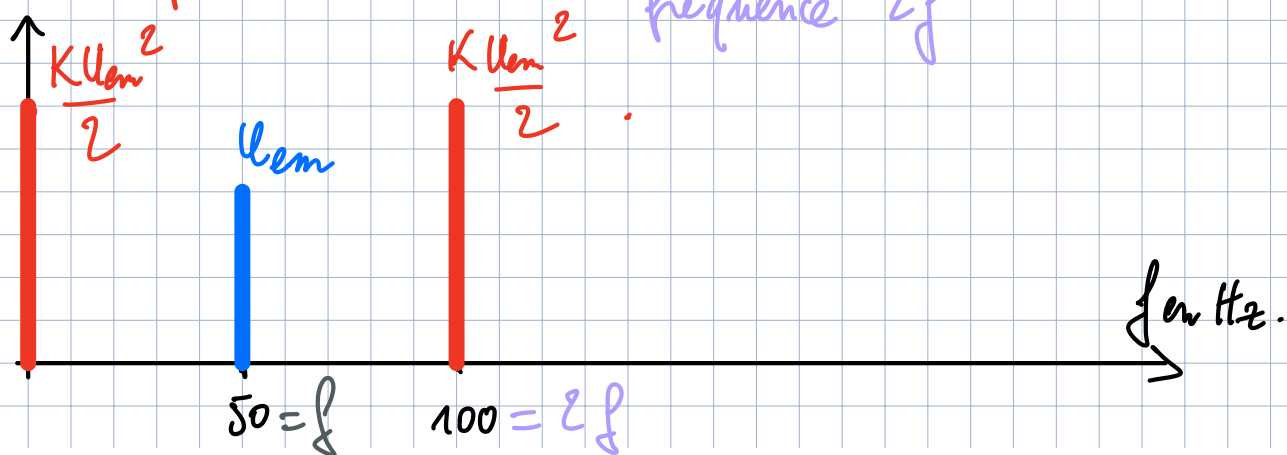


7.2. Tracer le spectre de u_e et de u_s en décomposant u_s en une somme de fonctions sinusoidales. On rappelle que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos^2(x) = [1 + \cos(2x)] / 2$

On a $u_s(t) = K u_e^2(t) = K u_{em}^2 \cos^2(\omega t)$

$$= K u_{em}^2 \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{K u_{em}^2}{2} \cos(2\omega t)}_{\text{composante de fréquence } 2f} + \underbrace{\frac{K u_{em}^2}{2}}_{\text{composante continue}}$$



7.3. L'équation qui lie u_s à u_e est-elle linéaire? Expliquer l'apparition de nouvelles harmoniques entre l'entrée et la sortie du multiplieur.

$f: x \rightarrow x^2$ n'est pas une application linéaire.

donc l'équation qui lie u_s à u_e n'est pas linéaire.

Quand la relation liant l'entrée et la sortie n'est pas linéaire, des nouvelles harmoniques apparaissent en sortie.

On décide de placer le filtre passe-bas de l'exercice 4 à la sortie du multiplieur.

7.4. Comment doit-on choisir la fréquence de coupure f_c de ce filtre pour ne garder que la composante continue de u_s ?

On doit avoir $f_c \ll 2f$ par exemple prenons $f_c < \frac{2f}{100}$

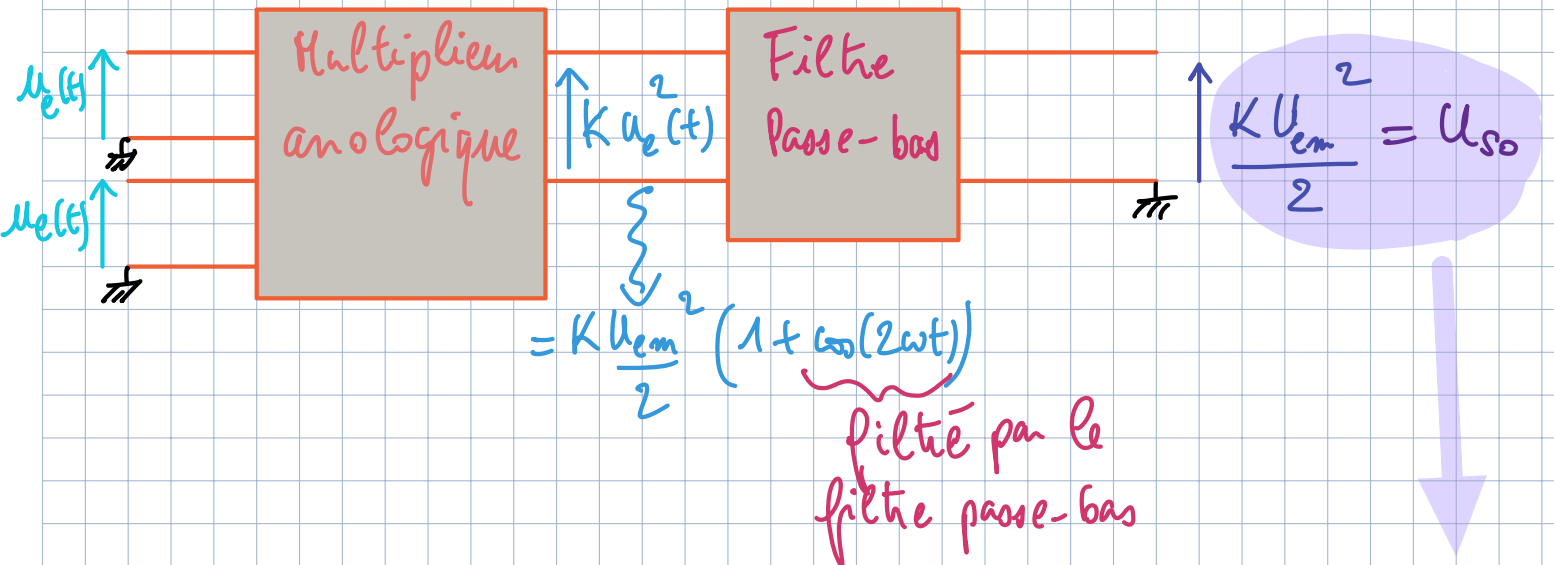
$$\Leftrightarrow f_c < \frac{2 \times 50}{100}$$

$$\Leftrightarrow f_c < 1 \text{ Hz}$$

On suppose cette condition vérifiée et on note U_{s0} la valeur de la tension à la sortie du filtre.

7.5. Quelle est la relation entre la valeur efficace de u_e notée U_e et U_{s0} ?

En sortie du filtre on récupère $U_{s0} = K \frac{U_{em}^2}{2}$



$$\text{On sait que } U_{e, \text{eff}} = \frac{U_{em}}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_{e, \text{eff}}^2 = \frac{U_{em}^2}{2} = \frac{U_{s0}}{K}$$

$$\Rightarrow U_{e, \text{eff}} = \sqrt{\frac{U_{s0}}{K}}$$

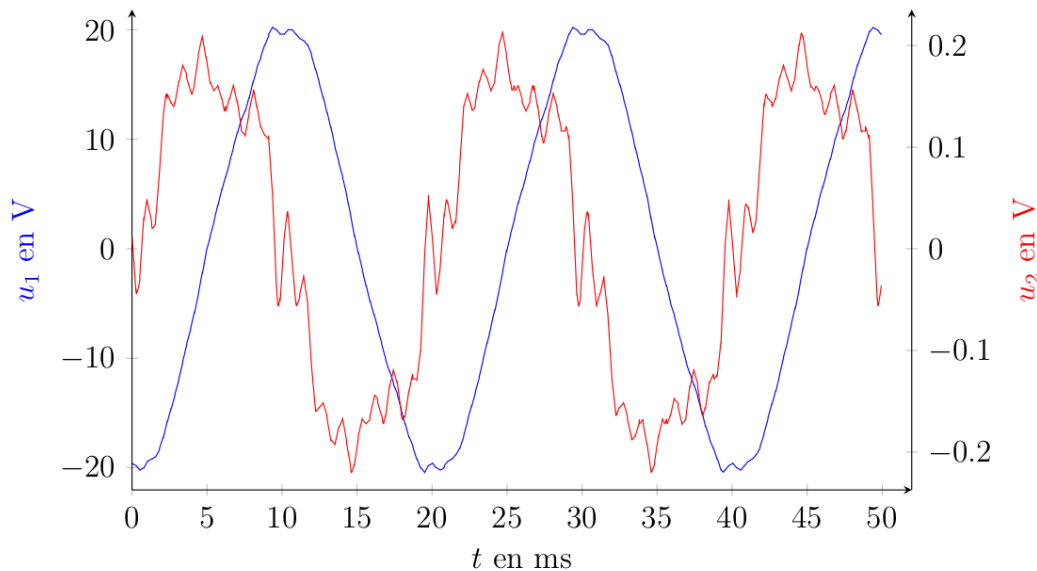
Retrouvons la valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur: ici $u_e(t)$

$$U_{e, \text{eff}} = \sqrt{\langle u_e^2(t) \rangle}$$

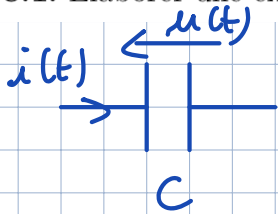
$$\langle u_e^2(t) \rangle = \langle U_{em}^2 \cos^2(\omega t) \rangle = U_{em}^2 \langle \overbrace{\cos^2(\omega t)}^{1/2} \rangle = \frac{U_{em}^2}{2}$$

$$\Rightarrow U_{e, \text{eff}} = \sqrt{\frac{U_{em}^2}{2}} = \frac{U_{em}}{\sqrt{2}}$$

Un étudiant interroge son professeur, ne comprenant pas pourquoi le courant traversant une boîte à décades de condensateurs "n'est pas beau" (comprendre : n'est pas sinusoïdal), alors que la tension à ces bornes "à l'air bien" (comprendre : semble sinusoïdale). Voici les oscillogrammes de la tension aux bornes du condensateur et de la tension image du courant mesurée à l'aide d'une sonde de courant :



8.1. Elaborer une explication argumentée à ce phénomène.



$$\text{On a } i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1)$$

On remarque que $u(t)$ n'est pas parfaitement sinusoïdale, en réalité à cause de la pollution harmonique générée sur le réseau (par les charges non linéaires cf. exo 7) $u(t)$ possède un harmonique 3 et 5, notons :

$$u(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + U_{3m} \cos(3\omega t + \varphi_3) + U_{5m} \cos(5\omega t + \varphi_5)$$

$$\Rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U}_{1m} e^{j\omega t} + \underline{U}_{3m} e^{j3\omega t} + \underline{U}_{5m} e^{j5\omega t}$$

alors (1) $\Rightarrow \underline{i}(t) = \underbrace{jC\omega \underline{U}_{1m} e^{j\omega t}}_{\text{fonda de } \underline{i}(t)} + \underbrace{jC3\omega \underline{U}_{3m} e^{j3\omega t}}_{\text{harmono 3 de } \underline{i}(t)} + \underbrace{jC5\omega \underline{U}_{5m} e^{j5\omega t}}_{\text{harmono 5 de } \underline{i}(t)}$

$$= \underline{i}_1(t) \quad = \underline{i}_3(t) \quad = \underline{i}_5(t)$$

On voit que $\underline{i}_1(t) = jC\omega \underline{u}_1(t)$; $\underline{i}_3(t) = jC3\omega \underline{u}_3(t)$; $\underline{i}_5(t) = jC5\omega \underline{u}_5(t)$
 $\underline{u}_1(t) = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}_1(t)$; $\underline{u}_3(t) = Z_c(3\omega) \underline{i}_3(t)$; $\underline{u}_5(t) = Z_c(5\omega) \underline{i}_5(t)$
 $Z_c(\omega)$

le poids relatif des harmoniques 3 et 5 (comparé au fonda) dans le courant est plus important que dans la tension, il a donc une allure "moins sinusoïdal" tout en restant périodique.

Que se passe-t-il si l'on remplace le condensateur par une bobine ? (la surprise en TP demain)