

Devoir surveillé n°5 type EDHEC

Nom :Prénom :

Exercice 1 :	
Exercice 2 :	
Exercice 3 :	
Problème PARTIE 1 :	
Problème PARTIE 2 :	
Problème PARTIE 3 :	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Durée du devoir : 4h. Le devoir est composé de 6 pages où se trouvent trois exercices et un problème, indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.



Thomas Bayes (1701 [Londres] - 17 avril 1761 [Tunbridge Wells]) Thomas Bayes, né à Londres en 1701 ou 1702, est un scientifique et pasteur anglais. Du fait de sa religion, Thomas Bayes ne peut pas fréquenter les collèges et universités anglais. C'est ainsi qu'il part en Écosse en 1719 pour étudier à l'Université d'Édimbourg où il suit des cours de théologie et semble-t-il de logique. À sa sortie de l'université, il assiste son père qui est pasteur à Londres, avant lui-même d'être ordonné prêtre à Tunbridge Wells, dans le Kent, vers 1733. Son mémoire pour lequel il est le plus connu est posthume. Il s'agit de l'essai sur les probabilités *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, rassemblé et édité par son ami Price en 1763. Thomas Bayes y est un des premiers à s'intéresser à la probabilité des causes. Plus précisément, il cherche à trouver la probabilité qu'un événement survienne sous l'hypothèse que nous ne connaissons rien à son sujet, sinon qu'il est survenu un certain nombre de fois dans les mêmes circonstances, et qu'il n'est pas survenu un autre certain nombre de fois. Il y formule un cas particulier de la célèbre formule de probabilités connue sous le nom de formule de Bayes.

Exercice 1.

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si M est diagonalisable, alors M^2 l'est aussi.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.

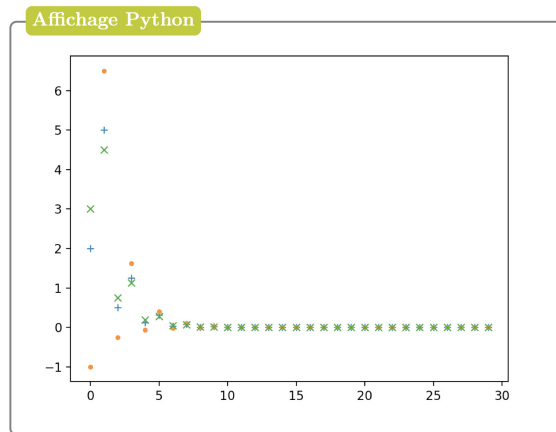
Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ et soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A .

2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$.
 (b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A . La matrice A est-elle inversible?
 (c) Donner une base (u) de $\ker(A - I)$ et de $\ker(g - Id)$. En déduire une première valeur propre de A .
 (d) Montrer que A n'admet pas d'autres valeurs propres.
 (e) A est-elle diagonalisable?
3. (a) Donner la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 (b) Résoudre l'équation, $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base $(v; w)$ de $\ker(A^2 + I)$ et de $\ker(g^2 + Id)$.
 (c) Montrer que la famille $(u; v; w)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 (d) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$
 (e) La matrice A^2 est-elle diagonalisable? Conclure sur ce que l'on voulait montrer au début de l'exercice.
4. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par leur premiers termes $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} = u_n - 2v_n + 2w_n$, $3v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n$, $3w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n$.
 (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui renvoie les valeurs de u_n , v_n et w_n pour un entier n en argument.

```
def suites(n) :
    u=a
    v=b
    w=c
    for k in range(n) :
        x=.....
        y=.....
        z=.....
        u, v, w = 1/3*x, 1/3*y, 1/3*z
    return u, v, w
```

- (b) On complète par les instructions suivantes dont l'exécution produit la figure ci-contre.



Que peut-on conjecturer?

```
U=np.zeros(30)
V=np.zeros(30)
W=np.zeros(30)
for k in range(30):
    U[k],V[k],W[k]=suites(k)
    N=[k for k in range(30)]
plt.plot(N, U, '+')
plt.plot(N, V, '.')
plt.plot(N, W, 'x')
plt.show()
```

5. Notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ déterminer une matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_{n+1} = BU_n$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = B^n U_0$.
7. Montrer que les trois suites convergent vers une même limite ℓ que l'on précisera.

Exercice 2. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention de la première boule verte. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- • X prend la valeur k si la première boule verte est obtenue au k -ième tirage.
 - • Y prend la valeur n si on a obtenu n boules blanches avant l'apparition de la première boule verte.
 - • Z prend la valeur ℓ si on a obtenu ℓ boules noires avant l'apparition de la première boule verte.
- Ainsi $X = Y + Z + 1$.

1. On utilise l'importation du module Python :

```
import numpy.random as rd
```

Donner une fonction **Python** (ou écrire une fonction) permettant de simuler une loi uniforme sur $[[1, 3]]$.

2. On utilise cette instruction pour simuler le tirage d'une boule, avec la convention : si le résultat est 1, on a tiré une boule noire, si le résultat est 2, on a tiré une boule blanche et si c'est 3, on a tiré une boule verte. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'il simule le triplet des trois variables aléatoires : (X, Y, Z).

```
def V ():
    x =0; y =0; z =0; t =0
    while ... :
        t = .... # la fonction simulant la loi uniforme
        x = x +1
        if ... :
            z = z +1
        if ... :
            ...
    return ([ x ,y , z ])
```

3. (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X?

- (b) Calculer son espérance et sa variance.
4. Pour tout triplet (k, n, ℓ) de $\mathbb{N}^3$, montrer :
- si $k \neq n + \ell + 1$ alors $P(X = k \cap Y = n \cap Z = \ell) = 0$.
 - si $k = n + \ell + 1$ alors $P(X = k \cap Y = n \cap Z = \ell) = \binom{k-1}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
- En déduire la loi du couple (X, Y) .
5. On admettra que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x tel que $0 < |x| < 1$:
- $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}.$$
- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .
- (b) Vérifier que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
- (c) En déduire l'espérance et la variance de Y .
6. Est-ce que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes?
7. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .
8. En comparant la variance de X avec celle de $Y + Z$, déterminer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y, Z) .

Exercice 3.

1. Pour tout entier naturel k , on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

- (a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner la valeur de I_0 et I_1 .

On admettra que $I_2 = 2$.

- (b) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k , on pose $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} dt$.

Établir, en utilisant une intégration par parties, la relation suivante : $I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.

- (c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2. Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt.$$

3. (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.
- (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f .
- (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.
- (c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.
- (a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \dots$$

- (b) Compléter de même l'égalité : $\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \dots$

- (c) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Partie I : Un problème de Cauchy et deux fonctions périodiques

Les résultats de cette partie sur les fonctions s et c pourront être admis et utilisés dans la suite car ils ne sont pas toujours faciles à obtenir.

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Que dit le cours quand à la résolution de ce problème de Cauchy?

Pour la suite du problème, on admet l'existence et l'unicité d'une fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ solution de $(\mathcal{P})$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = s'(t)$.

2. Premières propriétés des fonctions s et c .

- (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c'(t) = -s(t)$.
- (b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = c^2(t) + s^2(t)$. Montrer que h est une fonction constante.
- (c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c^2(t) + s^2(t) = 1$.
- (d) Montrer que c et s sont bornées sur $\mathbb{R}$.

3. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que $s(\theta) = 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant donc que, pour tout $\theta > 0$, on a $s(\theta) \neq 0$.

- (a) Montrer que, pour tout $\theta > 0$, on a $s(\theta) > 0$ et $s''(\theta) < 0$.
- (b)
 - i. Montrer que $c(t)$ admet une limite finie ℓ lorsque t tend vers $+\infty$.
 - ii. Justifier, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(t) = \int_0^t c(x) dx$.
 - iii. Montrer par l'absurde (et par disjonction de cas) que $\ell = 0$ (on utilisera la définition de la limite en $+\infty$ pour c).
- (c) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $c(t) \geq 0$.
- (d) Montrer que $s(t)$ admet une limite finie γ lorsque t tend vers $+\infty$.
- (e) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = 1 - \int_0^t s(x) dx$.
- (f) Conclure.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. **On admettra que la plus petite valeur de $\theta > 0$ telle que $s(\theta) = 0$ est π , ainsi : $s(\pi) = 0$, et $\forall t \in]0, \pi[, s(t) \neq 0$.**

En travaillant avec les conditions de $(\mathcal{P})$ vérifiées par s , on montre facilement et **on admettra** que s est une fonction impaire et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(\pi - t) = s(t)$.

4.
 - (a) Montrer que c est une fonction paire.
 - (b) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto s(t + 2\pi)$ est solution de $(\mathcal{P})$. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(t + 2\pi) = s(t)$. Ainsi, on dira que s est périodique, de période 2π .
 - (c) Montrer que c est périodique de période 2π .
 - (d)
 - i. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $c(\theta) = 0$.
 - ii. Montrer que s admet en θ son maximum sur $[0, \pi]$.
 - iii. Montrer que $\theta = \frac{\pi}{2}$. (On pourra montrer que s est maximale en $\pi - \theta$.)
 - iv. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Montrer que ψ est solution de $(\mathcal{P})$. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $c\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = s(t)$.
5. Montrer que s réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ et que c réalise également une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

Partie II - Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt$, où c est la fonction étudiée dans la partie I précédente. Celle-ci étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la suite (W_n) est bien définie.

6. Calculer W_0 et W_1 .
7. A l'aide d'un changement de variable affine et de **la question (4(d)iv) de la Partie I**, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(t) dt$, où s est la fonction étudiée dans la partie I précédente.
8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que (W_n) est décroissante.
9. A l'aide d'une intégration par parties et de **la question (2c) de la Partie I**, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+1}$.

En déduire que : $W_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2} W_n$.

10. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite (J_n) est constante et préciser sa valeur.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement : $\frac{(n+1)}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
12. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.
Obtenir finalement que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie III : l'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer (sans faire appel au résultat admis du cours) l'intégrale dite de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. Justifier rigoureusement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
14. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\ln(1-x) \leq -x$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédente que : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.
16. Montrer de même qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.
17. A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}c(u)$, montrer que : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}$.

On admet que le changement de variable $x = \sqrt{n} \frac{s(u)}{c(u)}$ (est licite et) permet d'obtenir :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

18. A l'aide de **la question (12) de la Partie II**, conclure quant à la valeur de : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
19. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de la question précédente et d'un changement de variable affine, montrer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \sigma\sqrt{2\pi}$.
20. Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques. Trouver trois réels α , m et σ , en fonction de a , b et c tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = at^2 + bt + c$.
21. En déduire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2 + bt + c)) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.