

Exercice 1. Couple de variables de Bernoulli

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p')$. Déterminer la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $M = \max(X, Y)$
2. $m = \min(X, Y)$
3. $R = XY$
4. $S = X + Y$

Exercice 2. Lancers de dé puis lancers de pièce

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p , avec $p \in]0, 1[$.

Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit les trois variables X , Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de piles obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de faces obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0 alors X et Y valent 0.

1. Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[Z=n]}(X = k)$.
(On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.)
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
 - si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors

$$P([X = k] \cap [Z = n]) = \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

- si $n > N$ ou $k > n$, alors $P([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer que pour tout k et n entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}.$$

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $(N, \frac{p}{6})$.

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7. Calculer $P([X = N] \cap [Y = N])$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Déterminer pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$.

Exercice 3. Appels téléphoniques répétés

Un agent effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. X désigne la variable aléatoire égale au nombre de personnes obtenues au téléphone.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Ayant obtenu k personnes, l'agent rappelle une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacune des $n - k$ personnes qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de personnes obtenues dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$, le nombre total de personnes obtenues.
2. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$.
4. Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et $l \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = l)$.
5. Sachant que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} = \binom{s}{k} \binom{n}{s}$ (voir exercice précédent), calculer $\mathbb{P}(Z = s)$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 4. Lancers de pièce puis tirage dans une urne

On lance une pièce équilibrée et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile. Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \dots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure ci-dessus.

1. Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).
2. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
3. (a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=k]}(X = i)$.
(b) En déduire que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
(c) On admet dans cette question que $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^k$. Vérifier que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$.
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\mathbb{P}(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
(b) En déduire que X possède une espérance.
(c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme en 3.(c), que $E(X) = \frac{3}{2}$.
5. (a) Utiliser le résultat de la question 4.(a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.
(b) Établir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme en 3.(c), que :

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- (c) Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$
- (d) En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.

Exercice 5. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1. On pose :

$$T_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. Déterminer l'espérance de T_n .
2. Soit $t \geq 0$.
(a) Justifier que : $\forall n > t$,
$$[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t].$$

(b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n < t).$$

- (c) Montrer que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.

Exercice 6. Approximations

Un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir contenant 200 mots ? On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Exercice 7. Approximation par une loi de Poisson

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3, 4, 5, 6, 7, 8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?