

TD M0

Mécanique en référentiel galiléen (MPSI)

A. Chute verticale

On lâche un objet sphérique de rayon $R = 3,0 \text{ cm}$ et de masse volumique $\mu = 1,7 \text{ g.cm}^{-3}$ depuis une altitude $h = 25 \text{ m}$ (comptée à partir du sol). On étudie le mouvement de cet objet dans le référentiel terrestre, muni d'un repère d'origine O correspondant au point de départ de l'objet et d'un axe vertical orienté vers le bas. On rappelle que la masse volumique de l'air vaut $1,0 \text{ kg.m}^{-3}$.

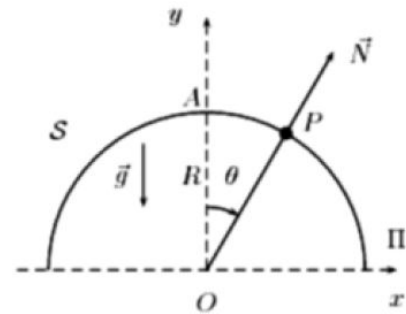
1. La poussée d'Archimède subie par l'objet est égale, en norme, au poids du fluide déplacé par l'objet. Montrer que cette force est négligeable devant le poids.
2. On suppose que l'objet n'est soumis qu'à son poids. Établir l'équation horaire $z(t)$ de l'objet et en déduire le temps de chute.

On suppose qu'en plus de son poids, l'objet subit une force de frottements telle que $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec $k = 0,020 \text{ USI}$.

3. Déterminer l'unité de k .
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse.
5. Déterminer l'expression de $v(t)$.
6. Établir l'équation horaire $z(t)$ de l'objet et en déduire le temps de chute.

B. Pingouin

Un pingouin P assimilable à un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale en équilibre instable au sommet A d'un igloo (demi-sphère de rayon R et de centre O) posé sur la banquise (plan Π). Le contact de S et de P est sans frottements. A la suite d'un déséquilibre infinitésimal, le pingouin P se met en mouvement en restant dans le plan vertical. Dans une première phase du mouvement, P reste en contact avec S . Sa position est repérée par l'angle θ figurant sur le schéma ci-contre.



1. Déterminer la vitesse de P en fonction de θ , g et R .
2. Exprimer la valeur de N en fonction de θ , g et m . Quelle remarque peut-on faire concernant la dépendance de N au rayon R ?
3. En déduire la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle le pingouin P n'est plus en contact avec l'igloo.
4. En déduire la valeur de la vitesse v_0 du pingouin lorsqu'il « décolle » de l'igloo.
5. Quelle sera la trajectoire ultérieure du pingouin?

C. Indiana JONES

Au cours de ses aventures, Indiana JONES se retrouve glissant parfaitement sur un plan horizontal verglacé, lié par son fouet (un fil inextensible et de masse négligeable) à un poteau vertical placé en O . Le fil ne s'enroule pas sur le poteau mais glisse autour sans frottement. Pour simplifier, on assimile Indy – comme l'appelle son père – à un point matériel I de masse $m = 80,0 \text{ kg}$.

Indiana Jones tourne autour du poteau à la distance $d = OA = 7,0 \text{ m}$ avec une vitesse initiale orthoradiale $v_0 = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$.

1. Quelle est la nature de son mouvement? Déterminer la valeur de la tension du fouet.

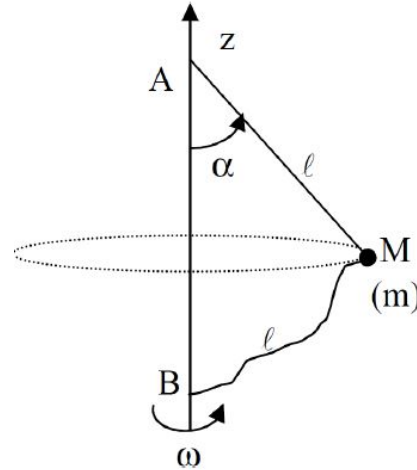
Pour sortir de cette situation inextricable, il décide de remonter lentement le long de son fouet.

2. Montrer que le moment cinétique de I est constant.
3. En déduire sa vitesse s'il remonte la moitié de son fouet.
4. De combien à varier l'énergie cinétique de notre héros ? Comment a-t-elle varié ?
5. Que va-t-il advenir d'Indiana JONES s'il continue sa remontée ?

D. Point matériel en rotation

Un point M de masse $m = 100 \text{ g}$ est suspendu à un fil de longueur L . Un deuxième fil de même longueur lie M à l'axe de rotation. L'axe de rotation (Oz) entraîne M dans un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω . On note que $AB = 2d < 2L$. On prendra $L = 60 \text{ cm}$ et $d = 50 \text{ cm}$.

1. Le fil BM n'est pas tendu. Déterminer la tension T_1 du fil AM et la relation entre ω et α .
2. A partir de quelle vitesse angulaire ω le fil AM s'élève-t-il ?
3. Déterminer pour quelle vitesse angulaire le fil BM commence à être tendu. Cette vitesse sera notée ω_1 .
4. Pour $\omega > \omega_1$, déterminer la tension des deux fils et α .
5. Les deux fils sont conçus pour résister à une tension maximale $T_{\max} = 2,5 \text{ N}$. Quel fil se rompra en premier et pour quelle vitesse $\omega_{\max}$?



E. Le satellite Hipparcos

ATS 2009

1. La troisième Loi de KEPLER

On considère un satellite assimilé à un point matériel P de masse m en orbite autour d'un astre fixe, au point O et de masse M . On notera $\vec{r} = \vec{OP}$ et G la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer la force exercée par l'astre fixe sur le satellite en fonction de G, M, m , et de la distance r .
2. Que vaut le moment en O de la force précédente ?
3. Exprimer le moment cinétique en O du satellite en fonction de m , de son vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur $\vec{r}$.
4. En appliquant en O le théorème du moment cinétique, montrer que la trajectoire du satellite est plane.

On se place dorénavant dans le plan de la trajectoire. On repère un point P par ses coordonnées polaires r et θ . La base polaire sera notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

5. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du satellite en coordonnées polaires.

Pour cette question et toutes les suivantes, on suppose que la trajectoire du satellite est un cercle de rayon r .

6. Comment se simplifie l'expression de $\vec{v}$?
7. Déterminer en coordonnées polaires l'expression du vecteur accélération du satellite.
8. À partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite, montrer que la vitesse angulaire du satellite est constante.
9. Déduire aussi de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite que $r^3\omega^2 = K$ où K est une constante qu'on exprimera en fonction des données.
10. On appelle T la période du mouvement. Démontrer la relation suivante, appelée 3ème loi de KEPLER :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

2. Etude du satellite

Le satellite Hipparcos fut lancé le 8 août 1989 par une fusée Ariane IV. Ce projet de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) avait notamment pour but de mesurer avec précision la distance de plus de 2,5 millions d'étoiles. Il était prévu à l'origine de placer Hipparcos sur une orbite géostationnaire. Cette partie se propose d'étudier les caractéristiques principales d'une telle orbite. On se placera dans cette partie dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On rappelle que le référentiel géocentrique a pour origine le centre T de la Terre et que ses axes pointent dans trois directions fixes. Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m , est en orbite autour de la Terre, de masse M_T . On négligera l'influence sur le mouvement du satellite des astres autres que la Terre. Le satellite est géostationnaire c'est-à-dire qu'il reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre situé à l'équateur. La période de l'orbite du satellite géostationnaire est égale à un jour sidéral dont la durée T_{sid} est de 23 h 56 min 4 s ($T_{\text{sid}} = 86164$ s).

11. Expliquer pourquoi cette valeur est légèrement inférieure (d'environ 4 minutes) à la durée du jour solaire T_{sol} de 24 heures.
12. En notant h l'altitude et R_T le rayon de la Terre et en utilisant la 3ème loi de KEPLER, calculer numériquement l'altitude du satellite géostationnaire.

Données : $T_{\text{sid}} = 86164$ s ; $R_T = 6378$ km ; $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg ; $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI

Le satellite Hipparcos devait être placé sur une telle orbite géostationnaire mais, en raison d'une panne de moteur au moment du lancement, il se retrouva sur une orbite très elliptique, ce qui ne l'empêcha pas de remplir correctement sa mission. Celle-ci s'est achevée le 17 août 1993.

F. Barre pendulaire

Une barre homogène AB de masse m , de longueur $2l$, est mobile autour d'un axe horizontal Δ passant par l'extrémité A. La liaison est parfaite (rotation sans frottement). Son moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G est $\frac{ml^2}{3}$ et par rapport à un axe Δ est $\frac{4ml^2}{3}$. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. On l'abandonne de sa position d'équilibre instable sans vitesse initiale. On note θ l'angle que fait la barre avec l'horizontale.

1. Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la barre en fonction de θ et de ses dérivées. En déduire l'équation différentielle du mouvement sur $\theta(t)$.
2. Déterminer la réaction exercée par l'axe Δ sur la barre en fonction de θ .
3. Déterminer la période des petites oscillations autour de sa position d'équilibre stable

G. Suspension de véhicule

CCP TSI 2013

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat ... Pour l'ensemble du problème, le

référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Hypothèses :

Tout au long du problème, on considèrera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

1. Suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1,0 \times 10^3$ kg. La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1,0 \times 10^5$ N.m⁻¹ et de longueur au repos ℓ_0 . Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.

La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ (Figure 1). $z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort. A l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e .

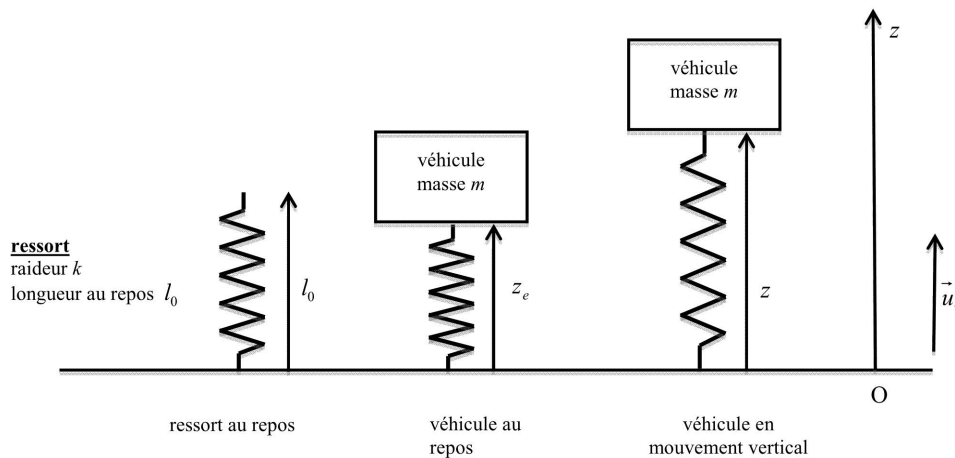


FIGURE 1 – Suspension sans amortissement

1. Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.
2. En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation (équation (1)) entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote z_e à l'équilibre en fonction de m , g , k et ℓ_0 .
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule lorsqu'il est hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle (équation (2)) vérifiée par $z(t)$. L'équation (2) reliera les différentes grandeurs z_e , k , m , $z(t)$ et ses dérivées temporelles.
4. Donner la solution générale de l'équation (2). Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de la suspension en fonction de k et m . Déterminer les valeurs numériques de ω_0 et T_0 .
5. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_e$. A un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution $z(t)$ de l'équation (2) en prenant en compte les conditions initiales précédentes. Exprimer $z(t)$ en fonction de t , z_e , ω_0 et z_0 .

6. Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale $z_{\min}$, maximale $z_{\max}$ et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0 . Donner les expressions des cotes minimale $z_{\min}$, maximale $z_{\max}$ et moyenne z_{moy} en fonction de z_e et z_0 .

2. Suspension avec amortissement

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m , une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{f} = -h \vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (Figure 2).

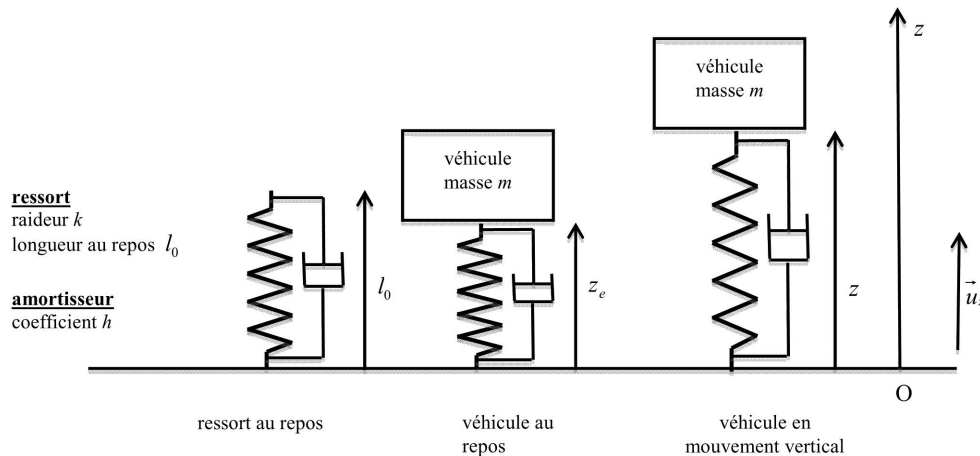


FIGURE 2 – Suspension avec amortissement

7. Quelle est l'unité de h dans le système international ?
8. Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre.
9. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps. L'équation reliera les différentes grandeurs $z_e, k, h, m, z(t)$ et ses dérivées temporelles.
10. Écrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.
11. Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
12. Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (Figure 3). Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

Nous nous placerons pour les deux questions suivantes dans le cas particulier où le véhicule se déplace sur une route telle que :

- pour $t < t_1$; $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$;
- pour $t > t_1$; $z_s(t) = 0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t , le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle. On considère que, pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante, c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

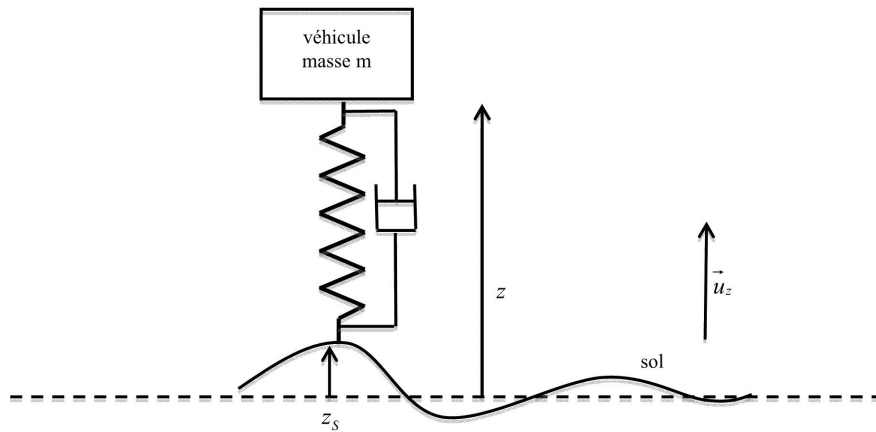


FIGURE 3 – Véhicule sur sol non-plat de profil quelconque

13. Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudopériodique.
14. Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime aperiodique. On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

3. Régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1 . Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol. Ici encore la position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (Figure 4). Dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal. On a donc $z_s(t) = z_{s0} \cos \omega t$.

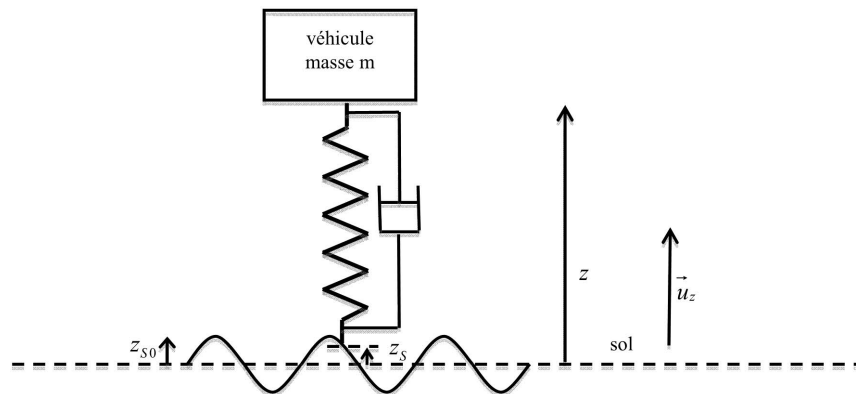


FIGURE 4 – Régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{f} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

15. Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k, z, z_s, ℓ_0 et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$.
16. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e (où z_e

représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 2). Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e , on posera $z' = z - z_e$.

17. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme : $mz' + hz' + kz' = Y(t)$. Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s , $\dot{z}_s$, k et h . Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes -rappelées au début de l'énoncé dans le sujet initial-.
18. Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\lambda = \frac{h}{m}$$

Déterminer l'expression de la réponse complexe $\underline{H} = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}$ de la suspension en fonction de ω , ω_0 et λ .

Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

19. Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
20. Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

On considère pour simplifier :

- que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
 - que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.
21. Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ . A quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

22. Donner l'allure de la courbe représentant H en fonction de ω . On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

H. Masse suspendue ? (RP) ●●●

À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical est suspendu un plateau sur lequel est posé un cube. Le plateau est lâché sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude Z_0 par rapport à sa position d'équilibre. Le cube décolle-t-il du plateau ?