# Probabilités conditionnelles

## 1 Quelques rappels

**Définition : probabilité**

Quand on réalise un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire, dans les mêmes conditions, la fréquence à laquelle un évènement se réalise se rapproche d'une fréquence théorique. Cette fréquence théorique se nomme **probabilité** de l'évènement.

**Remarque**

Une probabilité peut s'exprimer sous la forme d'une fraction, d'une écriture décimale ou d'un pourcentage.

**Propriété**

La probabilité est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

**Exemple**

Dans une classe de 20 élèves, il y a 6 élèves qui ont des lunettes. Dans cette même classe, il y a 8 élèves qui ont une veste noire.
On sélectionne au hasard un élève de cette classe. On note L l'évènement « l'élève porte des lunettes » et on note V l'évènement « l'élève porte une veste noire ».

La probabilité que l'élève interrogé porte des lunettes est de $\dfrac{6}{20}$ soit $\dfrac{3}{10}$ ou encore 0,3 soir 30%.
On note alors $P(\mathrm{L}) = 0,3$. De même, $P(\mathrm{V}) = 0,4$.

**Définitions : intersection**

Soient A et B deux évènement d'une expérience aléatoire. On appelle **intersection de A et de B** l'ensemble des issues qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ que l'on prononce « A inter B ».

Si l'intersection de A et de B est vie on dit que A et B sont **incompatibles** ou encore **disjoints**.

**Définition : réunion**

Soient A et B deux évènement d'une expérience aléatoire. On appelle **réunion de A et de B** l'ensemble des issues qui appartiennent au moins à l'un des deux évènement A ou B. On note cet évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et on prononce « A union B ».

**Définition : évènement contraire**

Soit A un évènement d'une expérience aléatoire.
On appelle **évènement contraire de A** l'évènement constitué de toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.
On parle aussi d'évènement **complémentaire**. Cet évènement est noté $\overline{\text{A}}$ et se prononce « A barre ».

**Exemples**

On lance un dé à 6 faces non truqué et on considère les évènements suivants :

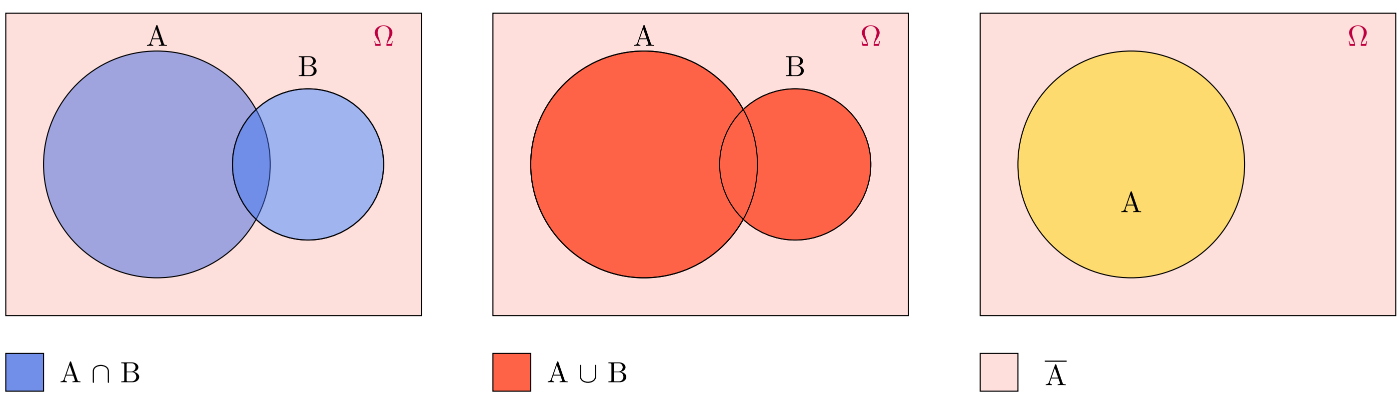
A = « Obtenir un nombre pair »    B = « Obtenir un multiple de 3 »

On a alors $\text{A} \cap \text{B} = \{ 6 \}$ et $\text{A} \cup \text{B} = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$.

On a de plus $\overline{\text{A}}$ = « Ne pas obtenir un nombre pair » = « 1 ; 3 ; 5 ».

**Remarque**

On peut aussi les définitions précédentes grâce aux schémas suivants :




**Propriétés**

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Soient A et B deux évènement de Ω.

- $P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})$
- $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$

## 2 Probabilités conditionnelles

**Définition : probabilité conditionnelle**

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire.
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement est réalisé. Cette probabilité est note $P_{\text{A}}(\text{B})$.

**Propriété**

Si on se place dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}$$

**Exemple**

Jean-Kevin réalise le bilan de ses magasins, répartis dans plusieurs villes. Chacun de ses magasins propose à la vente des chocolats et des fruits. Voici le tableau qu'il a réalisé pour l'occasion.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **Villes** | Argenta (A) | Olivillle (O) | Lavandia (L) | **Total** |
| **2** | **Chocolats vendus (C)** | 22 | 10 | 18 | 50 |
| **3** | **Fruits vendus (F)** | 12 | 35 | 23 | 70 |
| **4** | **Total** | 34 | 45 | 41 | 120 |

Jean-Kevin va choisir au hasard la fiche d'un achat effectué et regarde le type de produit acheté et dans quel magasin il a été acheté.

On souhaite calculer la probabilité que le produit acheté soit un fruit sachant qu'il a été acheté à Argenta.
Il s'agit donc de $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$.

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{F} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$$

La probabilité que le produit acheté soit un fruit sachant qu'il a été acheté à Argenta est donc de $\frac{6}{17}$.

**Définitions : dans le monde médical**

Lors d'un teste diagnostique, pour savoir si un patient est malade (M), on appelle **faux positif** un test positif (T) alors que le patient est non malade ($\overline{\mathrm{M}}$).
On appelle alors **faux négatif** un test négatif ($\overline{\mathrm{T}}$) alors que le patient est malade.

La **sensibilité** d'un test correspond à la probabilité qu'un patient ait un test positif sachant qu'il est malade, soit la probabilité conditionnelle $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$.
La **spécificité** d'un test correspond à la probabilité qu'un patient ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade, soit la probabilité conditionnelle $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}})$.

# Probabilités conditionnelles

## > Rappels des notions élémentaires de probabilités

**Exercice n°1** On lance un dé à 20 faces, non truqué, numéroté de 1 à 20.

1. Quelle est la probabilité de tomber sur la face 6 ? Donner le résultat sous la forme d'une fraction.
2. Quelle est la probabilité de tomber sur le 4 ou sur le 14 ? Donner le résultat sous la forme d'un pourcentage.
3. Quelle est la probabilité de tomber sur un multiple de 5. Donner le résultat sous la forme d'une fraction puis d'un pourcentage.

**Exercice n°2** On considère le programme Python ci-dessous qui simule plusieurs lancers d'un dé cubique.

```python
from random import*
def lancer():
    s=0
    for k in range(50):
        r=randint(1,6)
        if r==4:
            s=s+1
    print (s)
```

1. Combien de fois a-t-on simulé le lancer de ce dé ?
2. Quelle est le numéro de la face que l'on souhaite obtenir d'après ce programme ?
3. On lance le programme et il nous retourne 7. Qu'est ce que cela signifie ?
4. On lance à nouveau le programme et on trouve 13. Quelle est la fréquence de 4 associée ?
5. Quelle est la fréquence théorique que nous sommes censés obtenir ?
6. Que doit-on modifier dans le précédent programme pour que la fréquence observée se rapproche davantage de la fréquence théorique ?

**Exercice n°3** On a demandé à 150 élèves de seconde combien de SMS ils envoient en moyenne par jour.

| **Nombre de SMS** | 0 | 5 | 10 | 30 | 50 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Garçons** | 4 | 12 | 20 | 18 | 14 | 2 |
| **Filles** | 8 | 15 | 22 | 25 | 4 | 6 |

On rencontre au hasard un élève parmi ces 150. On considère les évènements suivants :

F = « l'élève est une fille »  A = « l'élève envoie en moyenne 10 SMS par jour »
B = « l'élève envoie en moyenne 80 SMS par jour »

1. Déterminer $p(\mathrm{F})$ et $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{A})$.
2. Calculer $p(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{B})$.
3. Calculer $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et $p(\mathrm{F} \cup \mathrm{A})$.

## > Calculer des probabilités conditionnelles

### Exercice n°4

Afin d'implanter un city stade, on a recensé les jeunes de 16 ans à 18 ans qui pratiquent du football ou du basket-ball. Ces jeunes sont aussi classés en fonction de la ville où ils pratiquent ce sport.

| | Bellac (C) | Le Dorat (D) | Bessines (N) | Chateauponsac (T) |
|---|---|---|---|---|
| Football (F) | 160 | 130 | 122 | 138 |
| Basket-Ball (B) | 68 | 75 | 49 | 58 |

1. Reproduire ce tableau en ajoutant les effectifs totaux en ligne et en colonne.
2. Un de ces jeunes va être sélectionné au hasard pour gagner une tenue complète du sport de son choix et promouvoir la création de ce city stade.
   Quelle est la probabilité que ce soit un jeune de Bellac ?
3. S'il s'agit d'un jeune de Bessines, quelle est la probabilité qu'il fasse du basket-ball ?
4. Déterminer $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})$. À quoi cela correspond-t-il ?
5. Déterminer $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$. À quoi cela correspond-t-il ?
6. Déterminer $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})$. À quoi cela correspond-t-il ?

### Exercice n°5

En mai 2013, des jeunes diplômés d'écoles de commerce et d'écoles d'ingénieurs ont répondu à la question : « Préférez-vous commencer à travailler en France ou bien à l'étranger ? ». Voici les réponses données :

| | En France | À l'étranger |
|---|---|---|
| École de commerce | 601 | 651 |
| École d'ingénieur | 811 | 519 |

On interroge au hasard un de ces étudiants. On note C l'évènement « l'étudiant est issu d'une école de commerce » et F l'évènement « l'étudiant préfère commencer à travailler en France ».

1. Calculer les probabilités $P(\mathrm{C})$ et $P(\mathrm{F})$.
2. Décrire par une phrase chacun des évènements suivants puis calculer leur probabilités :

   **a.** $\mathrm{C} \cap \mathrm{F}$ **b.** $\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{F}$ **c.** $\overline{\mathrm{C}} \cap \overline{\mathrm{F}}$

3. Détermine $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{F})$ et faire une phrase qui interprète ce résultat.
4. Détermine $P_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{C}})$ et faire une phrase qui interprète ce résultat.

**Exercice n°6** *D'après le site chingmath.fr*

On réalise un contrôle qualité dans une entreprise qui fabrique des poupées.
Ces poupées ne peuvent avoir que deux défauts, au maximum. Soit un défaut mécanique soit un défaut électrique.
D'après des données internes, il s'avère que :

- 8% des poupées présentent un défaut mécanique ;
- 5% des poupées présentent un défaut électrique ;
- 2% des poupées présentent les deux défauts ;

Chaque jour, cette entreprise fabrique 1 000 poupées.

1. Compléter le tableau croisé ci-dessous.

| | Poupée avec défaut mécanique | Poupée sans défaut mécanique | Total |
|---|---|---|---|
| Poupée avec défaut électrique | | | |
| Poupée sans défaut électrique | | | |
| Total | 80 | | 1 000 |

2. Lors d'un test de contrôle, une poupée est prélevé au hasard parmi celles fabriquée sur la journée. On note les évènements suivants :

   E = « la poupée présente un défaut électrique » M = « la poupée présente un défaut mécanique »

   Déterminer $P(\mathrm{C} \cap \mathrm{M})$ et faire une phrase qui interprète ce résultat.
3. Déterminer $P_C(\overline{M})$ et faire une phrase qui interprète ce résultat.
4. Quelle est la probabilité que la poupée prélevée ait un défaut mécanique sachant qu'elle n'a pas de défaut électrique ?

**Exercice n°7**

Lors d'une course cyclistes, 200 participants ont été contrôlés pour un test anti-dopage.
Parmi eux, 20 ont eu un résultat « positif » à ce test.
Après des examens supplémentaires, il s'avère que que 5 coureurs parmi les 20 testés positif n'avaient pris aucun produit dopant. De plus, 2 coureurs parmi les tests négatifs avaient pris en réalité des produits.

1. Complété le tableau croisé ci-dessous.

| | Coureur dopé | Coureur non dopé | Total |
|---|---|---|---|
| Test positif | | | |
| Test négatif | | | |
| Total | | | 200 |

2. Un coureur va être sélectionné au hasard. On considère les évènements suivants :

   D = « Le coureur choisi s'est dopé » N = « Le coureur choisi est testé négatif »

   (a) Quelle est la probabilité que le coureur soit testé positif ?
   (b) Exprimer par une phrase l'évènement $\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{N}}$ et l'évènement $\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{N}$.
   (c) Calculer la sensibilité $P_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{N}})$ et la spécificité $P_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{N})$ du test.
   (d) Calculer $P(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{N}}) + P(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{N})$, appelé efficacité du test.