Codage de l'information

Représentation des nombres, additions, multiplications

Exercices

Cette série d'exercices a pour but de vous faire réfléchir sur des sujets que vous connaissez depuis longtemps par la pratique : écrire des nombres, les additionner, les mutliplier.
Comprendre les mécanismes de bas niveau qui sous-tendent ces pratiques doitpermettre de mieux saisir comment on pourra les implémenter dans les ordinateurs que ce soit physiquement (représentation et codage des nombres), qu'algorithmiquement (opérations sur les nombres).

Addition

Exercice 1-1 Additions historiques

On donne la liste des chiffres cunéiformes sumériens et babyloniens dans les figures 4 et 5.

1. Représentez les nombres suivants dans ces différents systèmes de numération : 42,127,1256, 39562,1000
2. Additionnez 42 et 127, puis 127 et 1256.

Autour de la numération en base 10

Exercice 1-2 Un peu de théorie
Montrer que la décomposition d'un nombre en base 10 est unique.

Exercice 1-3 *Comparer*
Donnez un algorithme de comparaison de deux nombres en base 10.

Exercice 1-4 Taille
Quelle est la taille d'un nombre écrit en base 10 ?

Quelques façons de multiplier

Exercice 1-5 Multiplier avec une parabole
La figure 6 représente la parabole d'équation $y = x^2$.

On rappelle que l'équation de la droite passant par deux points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ est de la forme

$$y = mx + p$$

avec

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$
$$p = y_a - x_a \times m$$

(Sauf si les deux points sont alignés verticalement, mais ce n'est pas le cas dans cet exercice)
Quelle est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical ?

Pour aller plus loin (ceci n'est pas un exercice) Sur le même principe que cette multiplication parabolique, on a pendant longtemps utilisé des graphiques nommés *abaques* qui permettaient de retrouver le résultat d'un calcul juste en posant une règle sur une grille dont les courbes sont calculées à l'avance.

L'exemple de la figure 7 permet de résoudre une équation à 4 variables :

$$\cot A \sin AI + \cos\phi \tan\theta - \sin\phi \cos AI = 0$$

Il suffit de placer la règle sur la valeur de A (graduations de gauche) et la valeur de θ (graduation de droite) , de choisir la courbe pour la bonne valeur de *phi* et on trouve AI (courbes du centre).

En fait, on peut retrouver la quatrième valeur si on connaît les trois autres.

On remarquera que les courbes ont été dessinées à la main !

Cet abaque a été récupéré sur le site Gallica (gallica.fr), une source intéressante pour toutes les publications anciennes en français.

Exercice 1-6 La méthode de multiplication *per gelosia*

Cette méthode de multiplication apparaît au XIVème siècle, d'abord dans le monde arabe, avant d'arriver en Europe. On la trouve aussi en Chine au XVème. La figure 1 la décrit sur un exemple.

1. Effectuer la multiplication suivante en utilisant cette méthode :

$$2563 \times 1546$$

2. A quelle puissance de 10 correspond le chiffre des unités de la case à l'intersection des colonnes i et j ?
3. Quelle relation y a-t-il entre les puissances de 10 représentées sur une même diagonale ?
4. Pourqui cette méthode est-elle une façon valide d'effectuer des multiplications ?

Exercice 1-7 Prostaphérèse

La méthode de multiplication appelée *prostaphérèse* a été utilisée par les scientifiques au XVIème et XVIIème siècles (principalement les astronomes). Les savants qui la connaissaient gardaient le secret sur son fonctionnement.

Cette méthode permet de calculer rapidement, mais approximativement, des produits de grands nombres, en remplaçant les multiplication par quelques additions. Il fallait cependant disposer d'un outil : les tables des fonctions trigonométriques.

La méthode a ensuite été remplacée par l'utilisation des tables de logarithmes, plus simple et plus répandue.

Elle utilise les formules trigonométriques qui remplacent un produit par une somme.

Considérons la formule de transformation :

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

1. Calculez sans multiplication (sauf une multiplication par 0.5) une approximation du produit : 21644×64945

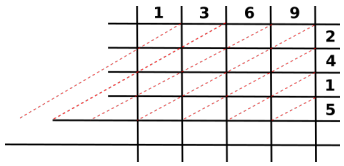
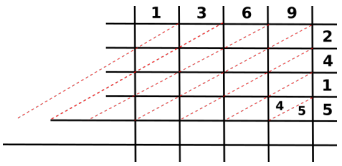
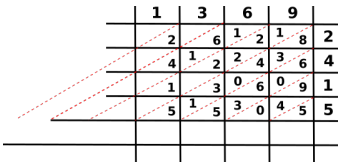
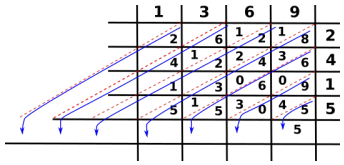
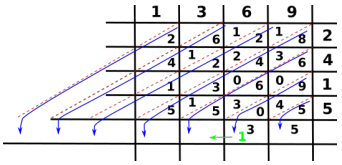
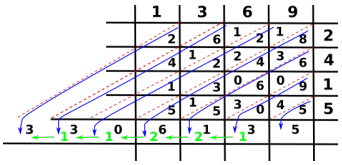
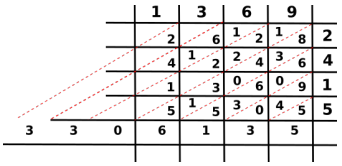
<table>
<tr><td>  </td><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>Pour multiplier 1369 par 2415, on place les deux opérandes sur les côtés d'un quadrillage.</td><td>Dans chaque case, on place le produit des deux nombres de la ligne et de la colonne...</td><td>... en plaçant le chiffre des dizaines au dessus de la diagonale.</td></tr>
<tr><td>  </td><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>On fait la somme des chiffres présents dans les triangles de la même diagonale.</td><td>S'il y a une retenue, on la compte dans la diagonale suivante.</td><td>On continue pour toutes les diagonales.</td></tr>
<tr><td></td><td>  </td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Vérification : $1369 \times 2415 = 3306135$</td></tr>
</table>

FIGURE 1 – Exemple de multiplication par gelosia

2. La table des valeurs trigonométriques de la figure 8 vous sera sans doute très utile.
3. La formule $\cos(45+x) = \sin(45-x)$ vous aidera elle-aussi (la formule est donnée en degrés).

Exercice 1-8 Les tables de logarithmes

Le logarithme en base b d'un nombre a est la puissance à laquelle il faut élever le nombre b pour obtenir a :

$$y = \log_b(a) \Leftrightarrow a = b^y$$

Une propriété intéressante des logarithmes, c'est qu'ils permettent de transformer un produit en somme :

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

1. En vous servant des extraits de tables de logarithmes des figures 9 et 10, calculez une approximation du produit :

$$1513 * 1605 \text{ (Spoiler : ça fait 2428365)}$$

Exercice 1-9 Archéologie

Une application pratique des logarithmes a été la règle à calcul, utilisée pour tous les calculs en ingénierie avant l'apparition des ordinateurs et des calculatrices. La figure 11 montre la règle complète, les figures 12 et 13 détaillent les parties fixe et mobile.

On ne considère ici que les échelles nommées C et D. Pour effectuer une multiplication, par exemple 3×2, on place le 1 de la règle C en face du 3 de la règle D, et on cherche la valeur en face du 2 de la règle C : on lit 6 (voir figure 2)

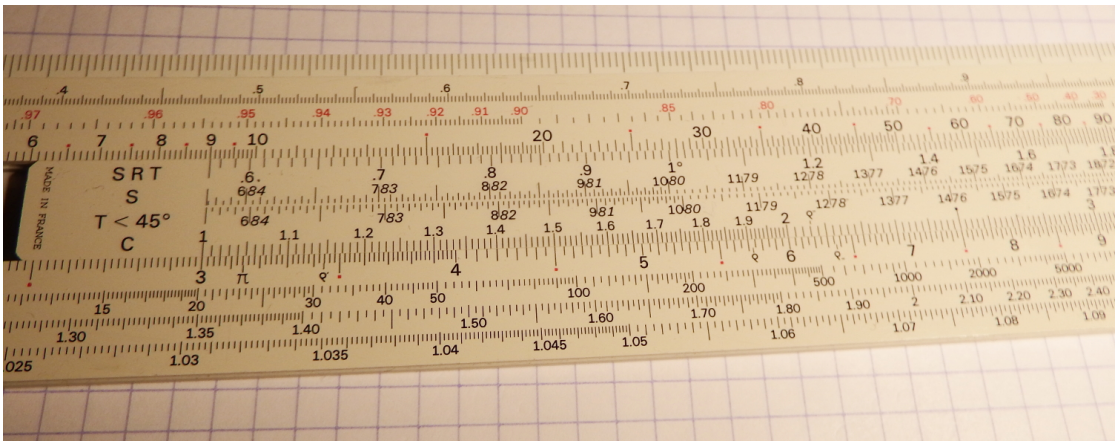


FIGURE 2 – Exemple de calcul

Comment ça marche ?

1. Sur les figures 11, 12 ou 13, mesurer la longueur du segment reliant le 1 au 2 sur la règle C (ou D), puis la distance entre le 1 et le 3, et la distance du 1 au 6.
2. Quelle relation y a-t-il entre ces trois grandeurs ?
3. En déduire la façon dont ces règles ont été graduées.

Les figures 12 et 13 vous permettent de construire une règle à calcul rudimentaire et éphémère, et de comprendre comment elle fonctionne. Malgré leur précision apparemment faible, c'est avec cet instrument que toutes les grandes réalisations industrielles du début du vingtième siècle ont été réalisées, y compris les voyages spatiaux des années 60-70) (figure 3).

FIGURE 3 – Buzz Aldrin à bord d'Apollo XI

FIGURE 4 – Chiffres cunéiformes

Système sexagésimal (objets discrets)							
Symbole							
Valeur	36000	3600	600	60	10	1	1/2 ou 1/10
Système SE de mesure de capacité de graines							
Symbole							
Valeur		1800	180	60	6	1	1/5	1/10
Système bisexagésimal (produits consommables)							
Symbole							
Valeur	7200	1200	120	60	10	1	1/2

FIGURE 5 – Chiffres sumeriens

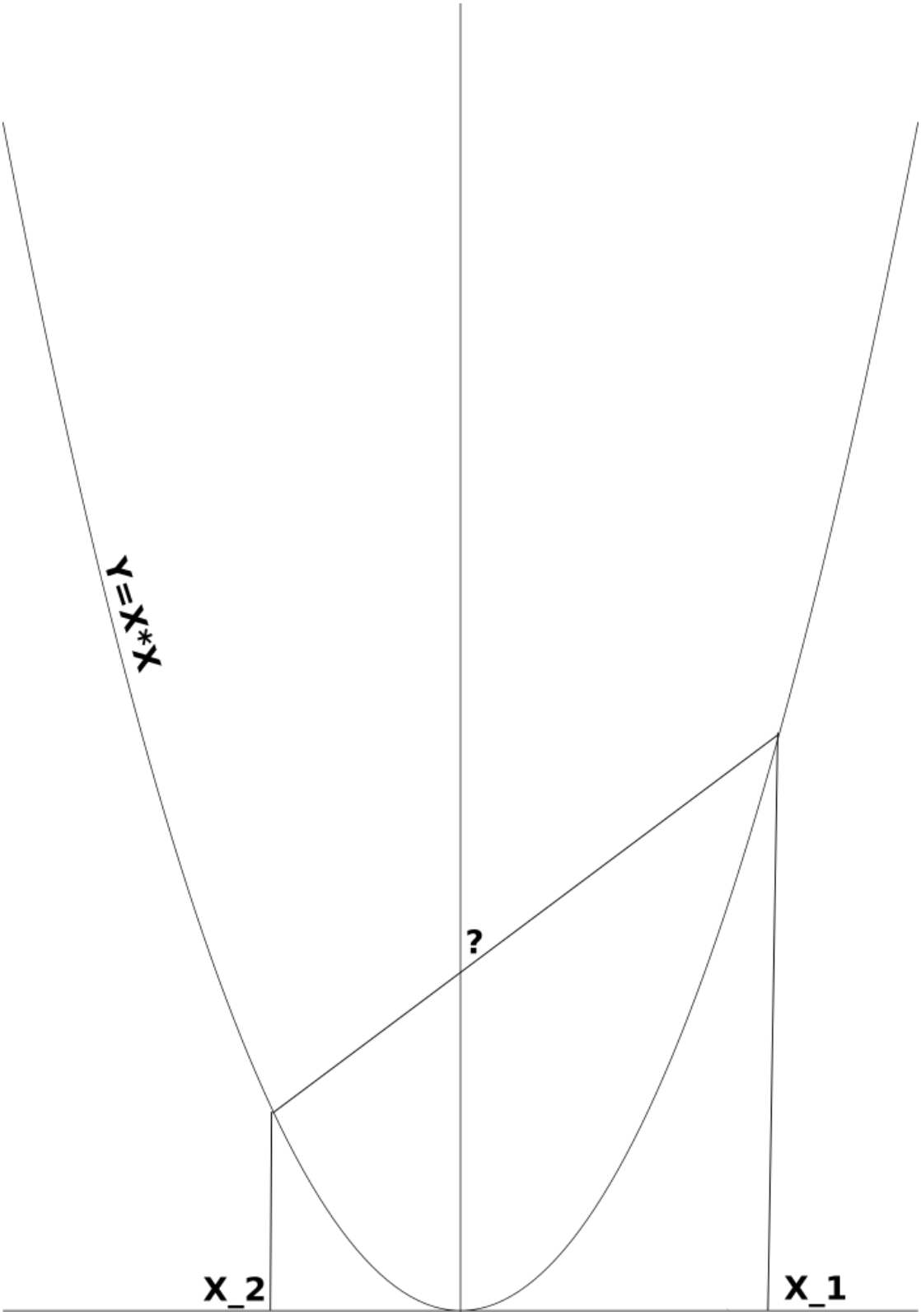
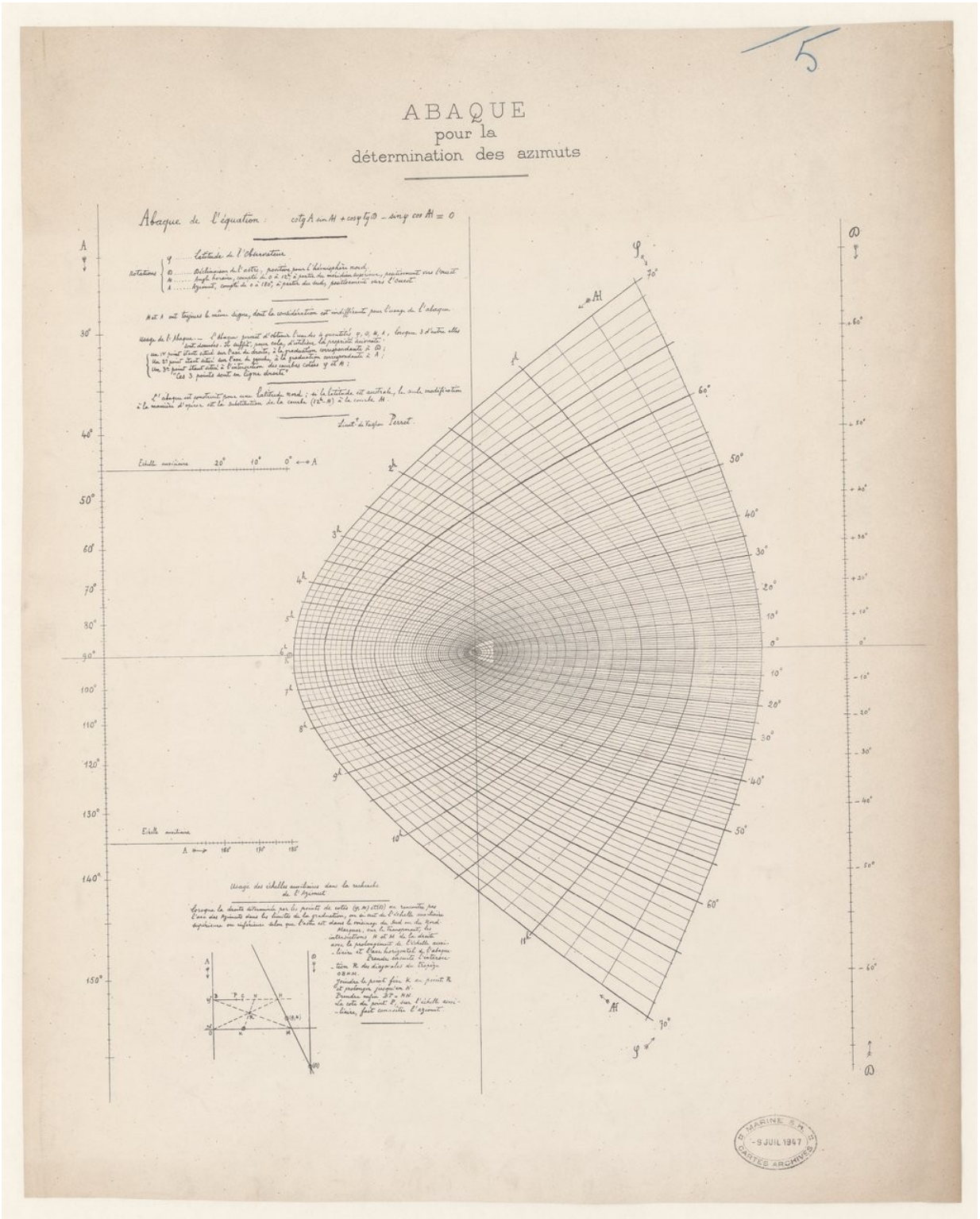
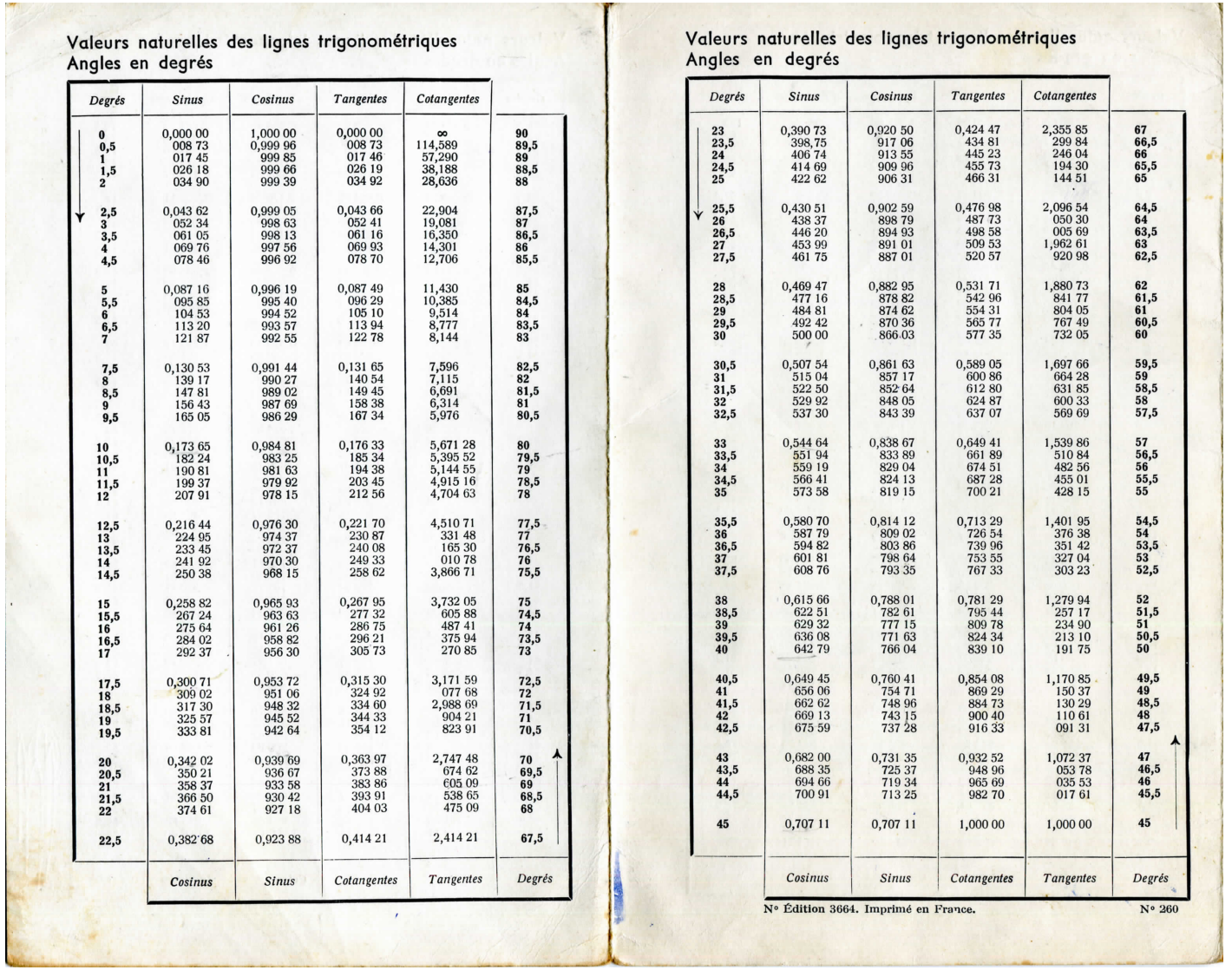


FIGURE 6 – Multiplier avec une parabole



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

FIGURE 7 – Calculer avec un abaque. Source : gallica.fr



Valeurs naturelles des lignes trigonométriques
Angles en degrés

Degrés	*Sinus*	*Cosinus*	*Tangentes*	*Cotangentes*	
0	0,000 00	1,000 00	0,000 00	∞	**90**
0,5	008 73	0,999 96	008 73	114,589	**89,5**
1	017 45	999 85	017 46	57,290	**89**
1,5	026 18	999 66	026 19	38,188	**88,5**
2	034 90	999 39	034 92	28,636	**88**
2,5	0,043 62	0,999 05	0,043 66	22,904	**87,5**
3	052 34	998 63	052 41	19,081	**87**
3,5	061 05	998 13	061 16	16,350	**86,5**
4	069 76	997 56	069 93	14,301	**86**
4,5	078 46	996 92	078 70	12,706	**85,5**
5	0,087 16	0,996 19	0,087 49	11,430	**85**
5,5	095 85	995 40	096 29	10,385	**84,5**
6	104 53	994 52	105 10	9,514	**84**
6,5	113 20	993 57	113 94	8,777	**83,5**
7	121 87	992 55	122 78	8,144	**83**
7,5	0,130 53	0,991 44	0,131 65	7,596	**82,5**
8	139 17	990 27	140 54	7,115	**82**
8,5	147 81	989 02	149 45	6,691	**81,5**
9	156 43	987 69	158 38	6,314	**81**
9,5	165 05	986 29	167 34	5,976	**80,5**
10	0,173 65	0,984 81	0,176 33	5,671 28	**80**
10,5	182 24	983 25	185 34	5,395 52	**79,5**
11	190 81	981 63	194 38	5,144 55	**79**
11,5	199 37	979 92	203 45	4,915 16	**78,5**
12	207 91	978 15	212 56	4,704 63	**78**
12,5	0,216 44	0,976 30	0,221 70	4,510 71	**77,5**
13	224 95	974 37	230 87	331 48	**77**
13,5	233 45	972 37	240 08	165 30	**76,5**
14	241 92	970 30	249 33	010 78	**76**
14,5	250 38	968 15	258 62	3,866 71	**75,5**
15	0,258 82	0,965 93	0,267 95	3,732 05	**75**
15,5	267 24	963 63	277 32	605 88	**74,5**
16	275 64	961 26	286 75	487 41	**74**
16,5	284 02	958 82	296 21	375 94	**73,5**
17	292 37	956 30	305 73	270 85	**73**
17,5	0,300 71	0,953 72	0,315 30	3,171 59	**72,5**
18	309 02	951 06	324 92	077 68	**72**
18,5	317 30	948 32	334 60	2,988 69	**71,5**
19	325 57	945 52	344 33	904 21	**71**
19,5	333 81	942 64	354 12	823 91	**70,5**
20	0,342 02	0,939 69	0,363 97	2,747 48	**70**
20,5	350 21	936 67	373 88	674 62	**69,5**
21	358 37	933 58	383 86	605 09	**69**
21,5	366 50	930 42	393 91	538 65	**68,5**
22	374 61	927 18	404 03	475 09	**68**
22,5	0,382 68	0,923 88	0,414 21	2,414 21	**67,5**
	Cosinus	*Sinus*	*Cotangentes*	*Tangentes*	*Degrés*

Valeurs naturelles des lignes trigonométriques
Angles en degrés

Degrés	*Sinus*	*Cosinus*	*Tangentes*	*Cotangentes*	
23	0,390 73	0,920 50	0,424 47	2,355 85	**67**
23,5	398,75	917 06	434 81	299 84	**66,5**
24	406 74	913 55	445 23	246 04	**66**
24,5	414 69	909 96	455 73	194 30	**65,5**
25	422 62	906 31	466 31	144 51	**65**
25,5	0,430 51	0,902 59	0,476 98	2,096 54	**64,5**
26	438 37	898 79	487 73	050 30	**64**
26,5	446 20	894 93	498 58	005 69	**63,5**
27	453 99	891 01	509 53	1,962 61	**63**
27,5	461 75	887 01	520 57	920 98	**62,5**
28	0,469 47	0,882 95	0,531 71	1,880 73	**62**
28,5	477 16	878 82	542 96	841 77	**61,5**
29	484 81	874 62	554 31	804 05	**61**
29,5	492 42	870 36	565 77	767 49	**60,5**
30	500 00	866 03	577 35	732 05	**60**
30,5	0,507 54	0,861 63	0,589 05	1,697 66	**59,5**
31	515 04	857 17	600 86	664 28	**59**
31,5	522 50	852 64	612 80	631 85	**58,5**
32	529 92	848 05	624 87	600 33	**58**
32,5	537 30	843 39	637 07	569 69	**57,5**
33	0,544 64	0,838 67	0,649 41	1,539 86	**57**
33,5	551 94	833 89	661 89	510 84	**56,5**
34	559 19	829 04	674 51	482 56	**56**
34,5	566 41	824 13	687 28	455 01	**55,5**
35	573 58	819 15	700 21	428 15	**55**
35,5	0,580 70	0,814 12	0,713 29	1,401 95	**54,5**
36	587 79	809 02	726 54	376 38	**54**
36,5	594 82	803 86	739 96	351 42	**53,5**
37	601 81	798 64	753 55	327 04	**53**
37,5	608 76	793 35	767 33	303 23	**52,5**
38	0,615 66	0,788 01	0,781 29	1,279 94	**52**
38,5	622 51	782 61	795 44	257 17	**51,5**
39	629 32	777 15	809 78	234 90	**51**
39,5	636 08	771 63	824 34	213 10	**50,5**
40	642 79	766 04	839 10	191 75	**50**
40,5	0,649 45	0,760 41	0,854 08	1,170 85	**49,5**
41	656 06	754 71	869 29	150 37	**49**
41,5	662 62	748 96	884 73	130 29	**48,5**
42	669 13	743 15	900 40	110 61	**48**
42,5	675 59	737 28	916 33	091 31	**47,5**
43	0,682 00	0,731 35	0,932 52	1,072 37	**47**
43,5	688 35	725 37	948 96	053 78	**46,5**
44	694 66	719 34	965 69	035 53	**46**
44,5	700 91	713 25	982 70	017 61	**45,5**
45	0,707 11	0,707 11	1,000 00	1,000 00	**45**
	Cosinus	*Sinus*	*Cotangentes*	*Tangentes*	*Degrés*

N° Édition 3664. Imprimé en France. N° 260

FIGURE 8 – Table des fonctions trigonométriques (extrait) Source : Editions de l'école

1 500 à 2 010

1 500 à 2 010

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
150*	,17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	898	150*
1*		898	926	955	984	013	041	070	099	127	156	184	1*
2*	,18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	469	2*
3*		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	752	3*
4*		752	780	808	837	865	893	921	949	977	005	033	4*
5*	,19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	312	5*
6*		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	590	6*
7*		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	866	7*
8*		866	893	921	948	976	003	030	058	085	112	140	8*
9*	,20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	412	9*
160*		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	683	160*
1*		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	952	1*
2*		952	978	005	032	059	085	112	139	165	192	219	2*
3*	,21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	484	3*
4*		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	748	4*
5*		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	011	5*
6*	,22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	272	6*
7*		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	531	7*
8*		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	789	8*
9*		789	814	840	866	891	917	943	968	994	019	045	9*
170*	,23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	300	170*
1*		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	553	1*
2*		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	805	2*
3*		805	830	855	880	905	930	955	980	005	030	055	3*
4*	,24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	304	4*
5*		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	551	5*
6*		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	797	6*
7*		797	822	846	871	895	920	944	969	993	018	042	7*
8*	,25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	285	8*
9*		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	527	9*
180*		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	768	180*
1*		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	007	1*
2*	,26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	245	2*
3*		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	482	3*
4*		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	717	4*
5*		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	951	5*
6*		951	975	998	021	045	068	091	114	138	161	184	6*
7*	,27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	416	7*
8*		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	646	8*
9*		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	875	9*
190*		875	898	921	944	967	989	012	035	058	081	103	190*
1*	,28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	330	1*
2*		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	556	2*
3*		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	780	3*
4*		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	003	4*
5*	,29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	226	5*
6*		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	447	6*
7*		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	667	7*
8*		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	885	8*
9*		885	907	929	951	973	994	016	038	060	081	103	9*
200*	,30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	320	200*
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N

FIGURE 9 – Table des logarithmes (extrait) Source : J.Laborde (Dunod)

2 000 à 2 510

2 000 à 2 510

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
200*	,30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	320	200*
1*		320	341	363	384	406	428	449	471	492	514	535	1*
2*		535	557	578	600	621	643	664	685	707	728	750	2*
3*		750	771	792	814	835	856	878	899	920	942	963	3*
4*		963	984	006	027	048	069	091	112	133	154	175	4*
5*	,31	175	197	218	239	260	281	302	323	345	366	387	5*
6*		387	408	429	450	471	492	513	534	555	576	597	6*
7*		597	618	639	660	681	702	723	744	765	785	806	7*
8*		806	827	848	869	890	911	931	952	973	994	015	8*
9*	,32	015	035	056	077	098	118	139	160	181	201	222	9*
210*		222	243	263	284	305	325	346	366	387	408	428	210*
1*		428	449	469	490	510	531	552	572	593	613	634	1*
2*		634	654	675	695	715	736	756	777	797	818	838	2*
3*		838	858	879	899	919	940	960	980	001	021	041	3*
4*	,33	041	062	082	102	122	143	163	183	203	224	244	4*
5*		244	264	284	304	325	345	365	385	405	425	445	5*
6*		445	465	486	506	526	546	566	586	606	626	646	6*
7*		646	666	686	706	726	746	766	786	806	826	846	7*
8*		846	866	885	905	925	945	965	985	005	025	044	8*
9*	,34	044	064	084	104	124	143	163	183	203	223	242	9*
220*		242	262	282	301	321	341	361	380	400	420	439	220*
1*		439	459	479	498	518	537	557	577	596	616	635	1*
2*		635	655	674	694	713	733	753	772	792	811	830	2*
3*		830	850	869	889	908	928	947	967	986	005	025	3*
4*	,35	025	044	064	083	102	122	141	160	180	199	218	4*
5*		218	238	257	276	295	315	334	353	372	392	411	5*
6*		411	430	449	468	488	507	526	545	564	583	603	6*
7*		603	622	641	660	679	698	717	736	755	774	793	7*
8*		793	813	832	851	870	889	908	927	946	965	984	8*
9*		984	003	021	040	059	078	097	116	135	154	173	9*
230*	,36	173	192	211	229	248	267	286	305	324	342	361	230*
1*		361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	549	1*
2*		549	568	586	605	624	642	661	680	698	717	736	2*
3*		736	754	773	791	810	829	847	866	884	903	922	3*
4*		922	940	959	977	996	014	033	051	070	088	107	4*
5*	,37	107	125	144	162	181	199	218	236	254	273	291	5*
6*		291	310	328	346	365	383	401	420	438	457	475	6*
7*		475	493	511	530	548	566	585	603	621	639	658	7*
8*		658	676	694	712	731	749	767	785	803	822	840	8*
9*		840	858	876	894	912	931	949	967	985	003	021	9*
240*	,38	021	039	057	075	093	112	130	148	166	184	202	240*
1*		202	220	238	256	274	292	310	328	346	364	382	1*
2*		382	399	417	435	453	471	489	507	525	543	561	2*
3*		561	578	596	614	632	650	668	686	703	721	739	3*
4*		739	757	775	792	810	828	846	863	881	899	917	4*
5*		917	934	952	970	987	005	023	041	058	076	094	5*
6*	,39	094	111	129	146	164	182	199	217	235	252	270	6*
7*		270	287	305	322	340	358	375	393	410	428	445	7*
8*		445	463	480	498	515	533	550	568	585	602	620	8*
9*		620	637	655	672	690	707	724	742	759	777	794	9*
250*		794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	967	250*
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N

FIGURE 10 – Table des logarithmes (extrait) Source : J.Laborde (Dunod)

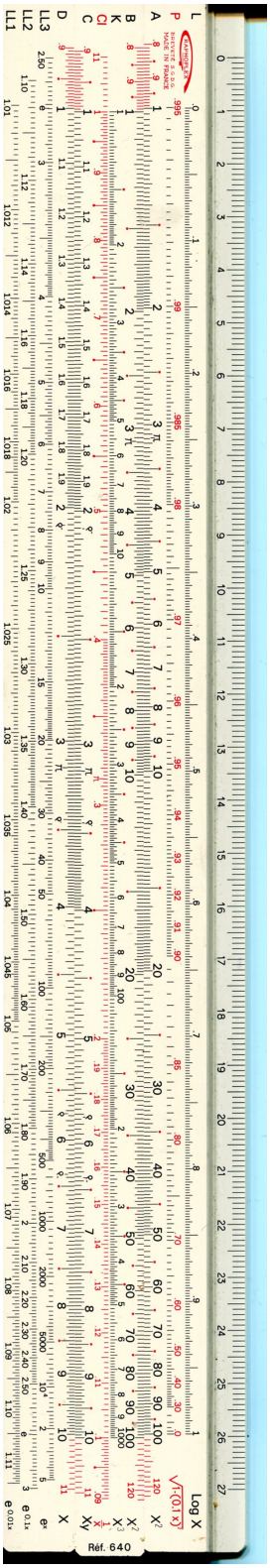


FIGURE 11 – la règle

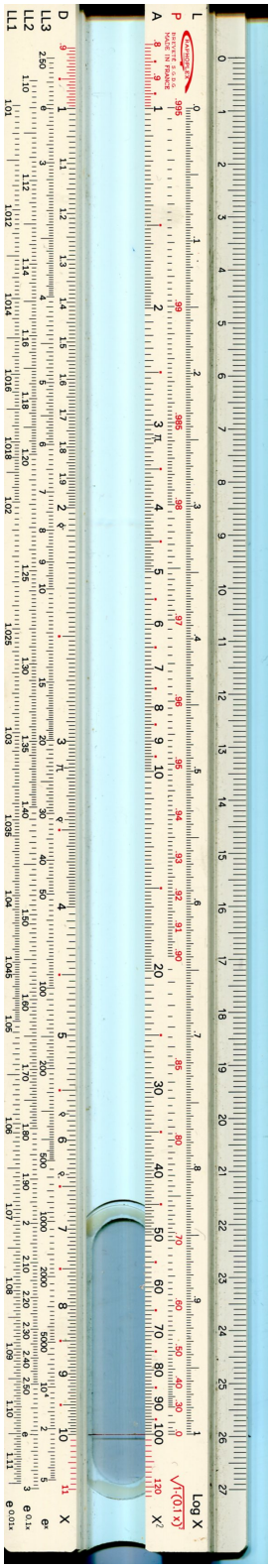


FIGURE 12 – Partie fixe

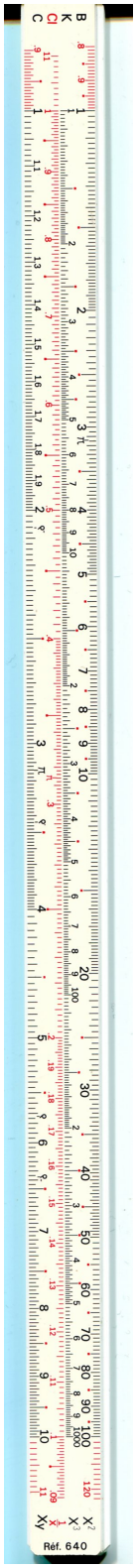


FIGURE 13 – Partie mobile