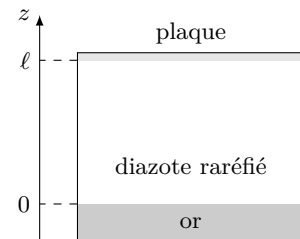


Exercices

Exercice 1 : dépôt physique en phase vapeur

La déposition physique en phase vapeur est un moyen de réaliser des dépôts très minces et très réguliers sur une plaque, par exemple une mince couche d'or sur un circuit imprimé utilisé en électronique. Le principe est le suivant : de l'or présent au fond d'une enceinte de section $S = 100 \text{ cm}^2$ est évaporé par chauffage. La vapeur d'or diffuse et se dépose sur une plaque située en haut de la cuve à une distance $\ell = 20 \text{ cm}$ du fond.

On étudie la densité particulaire de la vapeur d'or n^* dans le gaz raréfié une fois le régime stationnaire atteint. On définit un vecteur unitaire vertical $\vec{u}_z$ dirigé vers le haut, et on compte l'altitude à partir de la surface de l'or métallique.



- En supposant que la pression de la vapeur d'or est égale à sa pression de vapeur saturante à la surface du solide, exprimer la concentration particulaire de l'or en phase gazeuse à l'altitude $z = 0$. Que vaut-elle à 298 K ? Quelle est la concentration particulaire en $z = \ell$?
- Quelle est la symétrie du problème? Préciser :
 - la direction et le sens du flux Φ de la vapeur d'or,
 - le(s) paramètre(s) dont dépend la densité particulaire n^* .
- Montrer que le flux est conservatif.
- Établir le profil de la densité particulaire en fonction de l'altitude $n_{(z)}^*$.
- Établir l'expression de la résistance diffusive entre le haut et le bas de l'enceinte. Calculer sa valeur numérique à 298 K .
- Calculer numériquement le flux particulaire de la vapeur d'or. En déduire le temps nécessaire pour déposer une couche de $100 \mu\text{m}$ d'or sur la surface supérieure de l'enceinte.
- Proposer une explication au fait qu'on opère généralement à température élevée.

Numéro atomique	$Z = 79$
Masse atomique	$M = 199,97 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse volumique	$\rho = 19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$
Pression de vapeur saturante à 298 K	$P^{\text{sat}} = 0,237 \text{ mPa}$
Coefficient de diffusion dans l'air à 298 K	$D \approx 0,1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 1 – Données relatives à l'or.

Exercice 2 : diffusion à travers une membrane

Une membrane est percée de pores cylindriques identiques de longueur L et de rayon r . La membrane sépare deux compartiments contenant deux solutions aqueuses de glucose de concentrations moléculaires C_1 et $C_2 < C_1$ constantes. Les pores sont remplis d'eau supposée immobile, et laissent passer les molécules de glucose par diffusion. Le coefficient de diffusion du glucose dans un pore est noté D . On se place en régime stationnaire.

- Quel est la direction et le sens du flux? Quelle est la géométrie du transport?
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de glucose dans un pore. En déduire le profil de la densité volumique de glucose dans un pore.
- Déterminer le flux de glucose dans un pore, en fonction des données.

On définit la perméabilité K de la membrane séparant les deux compartiments de concentration C_1 et C_2 par :

$$\frac{\Phi_{\text{tot}}}{S} = K \times (C_1 - C_2)$$

où Φ_{tot} est le flux total de glucose à travers la membrane, et S la section totale de la membrane.

4. Exprimer K en fonction de D , L , r et de la densité n de pores (nombre de pores par unité de surface). Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned}L &= 10 \mu\text{m} \\ r &= 0,56 \mu\text{m} \\ D &= 1 \cdot 10^{-9} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ n &= 1 \cdot 10^6 \text{cm}^{-2}\end{aligned}$$

Exercice 3 : diffusion de neutrons en géométrie cylindrique

On étudie l'émission de neutrons par un « crayon » contenu dans le cœur d'une centrale nucléaire. Il s'agit d'un cylindre de rayon R_0 et de hauteur H contenant le matériau radioactif. On suppose que l'émission de neutron a lieu uniquement de façon radiale, et on appelle n_0^* la densité volumique de neutrons dans l'air environnant à $r = R_0$. Une fois émis, les neutrons diffusent dans l'air avec un coefficient de diffusion D , et on suppose qu'il n'y a quasiment aucune absorption.

1. Rappeler de quel paramètre dépend le flux. Montrer qu'il est conservatif.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de neutrons. En déduire la loi $n_{(r)}^*$, en fonction de Φ , n_0^* , D , H , R_0 et r .
3. Analyser ce qui se passe lorsque $r \rightarrow \infty$. Commenter.
4. Exprimer le rayon R_1 pour lequel la densité volumique de neutrons est 100 fois plus faible qu'à R_0 , en fonction des paramètres géométriques du problème et du flux.

Exercice 4 : piège à phéromone

Un moyen de lutte « écologique » contre les insectes est l'utilisation de piège à phéromone. On trouve dans le commerce des pièges à carpocapse, un papillon qui pond dans les fleurs de pommier. Il s'agit d'une boulette qui émet des phéromones de sorte à attirer les carpocapses vers une boîte conçue comme une nasse (une fois dans la boîte, l'insecte se noie).

La boîte avec la boulette est accrochée en hauteur sur un arbre. On appelle r la distance à la boulette, et $n_{(r)}^*$ la densité particulière de la phéromone. Le rayon de la boulette émettrice est $r_1 = 1 \text{ cm}$. On se place en régime stationnaire.

1. En considérant que le phénomène d'évaporation de la phéromone est à l'équilibre, évaluer n_1^* , concentration particulière au niveau de la surface de la boulette.
2. Quelle est la symétrie du problème ? De quel paramètre n^* dépend-elle ? Préciser la direction et le sens du flux Φ de phéromones.
3. Établir l'expression de la densité particulière en fonction de la distance r . Représenter schématiquement $n_{(r)}^*$.

Les papillons peuvent détecter des concentrations particulières de 200 molécules par cm^3 , et on souhaite que le piège attire les papillons jusqu'à une distance de 2 m.

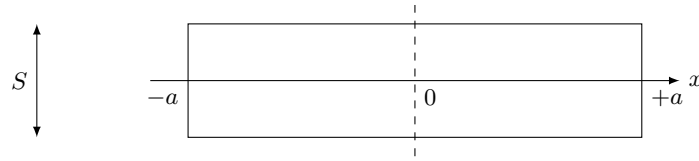
4. Évaluer l'ordre de grandeur du flux particulière de phéromones.
5. En déduire un ordre de grandeur de la quantité de phéromones que le fabricant doit inclure dans la boulette pour que celle-ci reste active durant 3 semaines.

$$\begin{aligned}\text{Pression de vapeur saturante de la phéromone à } 25^\circ\text{C} : P^{\text{sat}} &\approx 50 \text{ Pa} \\ \text{Coefficient de diffusion dans l'air} : D &\approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ \text{Constante des gaz parfaits} : R &= 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \text{Nombre d'Avogadro} : \mathcal{N}_A &= 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}\end{aligned}$$

Exercice 5 : réaction photochimique

Dans cet exercice, on étudie un modèle sommaire de réaction photochimique. Par une irradiation lumineuse dans un milieu contenant des molécules de dichlore Cl_2 , on produit des atomes de chlore $\text{Cl}^\bullet$ avec un taux volumique A uniforme dans tout le récipient. Les atomes de chlore diffusent dans le milieu avec un coefficient de diffusion D . Le récipient est de section verticale rectangulaire S , et les atomes de chlore sont intégralement

absorbés au niveau de deux parois opposées d'abscisse $x = \pm a$ par rapport au centre du récipient. On se place dans l'hypothèse simplificatrice où la diffusion n'a lieu que dans la direction x et en régime stationnaire.



1. Que vaut la densité volumique n^* des atomes de chlore en $x = +a$ et $x = -a$?
2. Écrire un bilan d'atomes de chlore dans un tranche de section S comprise entre les abscisses x et $x + dx$.
3. En déduire l'expression de $n_{(x)}^*$ en fonction de A , de D et de a . Représenter graphiquement $n_{(x)}^*$. Où la densité est-elle maximale ?
4. Exprimer le flux Φ à l'abscisse x et déterminer son sens.

Exercice 6 : diffusion radiale de neutrons avec capture

On considère une sphère de rayon R_0 contenant un matériau radioactif qui émet des neutrons avec un taux volumique A constant. Le flux total émis par la sphère vers l'extérieur à $r = R_0$ est Φ_0 . On se place en régime stationnaire.

1. En faisant un bilan sur la sphère entière, exprimer le flux Φ_0 en fonction de A et de R_0 .

On s'intéresse à la densité de neutrons à l'intérieur de la sphère, constituée d'un milieu dans lequel le coefficient de diffusion des neutrons est D_1 .

2. À l'aide d'un bilan sur une sphère de volume $r < R_0$, établir l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de neutrons n^* .
3. En déduire l'expression de n^* en fonction de n_0^* , valeur de la densité volumique de neutrons en $r = R_0$, et des autres paramètres du problème.

On s'intéresse maintenant à la diffusion des neutrons à l'extérieur de la sphère, qui est un milieu non absorbant dans lequel les neutrons diffusent avec un coefficient de diffusion D_2 .

4. Que dire du flux dans le milieu extérieur ?
5. Établir l'expression de la densité volumique de neutrons en fonction de r pour $r > R_0$, en fonction de n_0^* .
6. En déduire n_0^* , en supposant que la diffusion a lieu jusqu'à l'infini.

On suppose maintenant que le milieu extérieur à la sphère absorbe les neutrons avec un taux volumique d'absorption K uniforme.

7. À l'aide d'un bilan entre deux sphères de rayons r et $r + dr$, montrer que la densité volumique de neutrons pour $r > R_0$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \times \frac{dn^*}{dr} \right] = \frac{K}{D} \times r^2$$

Expliquer comment on peut en déduire le profil de densité volumique de neutrons (on ne demande pas de faire le calcul).

8. En déduire l'expression du flux en fonction de r , connaissant Φ_0 .
9. Déterminer la distance à laquelle la totalité des neutrons émis est absorbée.

Travaux dirigés

Exercice 1 : taille maximale d'une bactérie

On considère une bactérie sphérique de rayon R , de masse volumique ρ , de centre O, immobile dans de l'eau à la température ambiante. La bactérie respire et consomme du dioxygène avec un taux molaire horaire par unité de masse A .

1. Exprimer la quantité δN_{cons} de molécules de dioxygène consommée par la bactérie pendant un intervalle de temps dt , en fonction de son rayon R .

On suppose que la bactérie est la seule source de consommation de dioxygène. Soit C_0 la concentration molaire du dioxygène dans l'eau loin de la bactérie et D son coefficient de diffusion dans l'eau.

2. Préciser la symétrie du problème et préciser de quel paramètre dépend la concentration molaire en dioxygène dans l'eau. Selon quelle direction et dans quel sens est le flux de dioxygène ? Quelle est sa cause ?

3. Montrer que le flux Φ est conservatif à travers des surfaces bien choisies. Que vaut-il en régime stationnaire ?

4. Écrire la loi de Fick, en prenant bien garde au signe !

5. Montrer que la densité volumique de molécules de dioxygène dans l'eau varie selon la loi :

$$n_{(r)}^* = C_0 \mathcal{N}_A - \frac{\Phi}{4\pi D r}$$

6. À quelle condition sur $n_{(R)}^*$ la bactérie ne meurt-elle pas d'asphyxie ?

7. En déduire que la bactérie possède un rayon critique au-delà duquel sa survie n'est pas possible. Calculer sa valeur numérique et commenter.

$$\rho \approx 1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$D \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$C_0 \approx 0,2 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$A = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 2 : diffusion de neutrons dans un milieu absorbant

Il a été établi que dans le gisement d'uranium d'Oklo, au Gabon, un réacteur nucléaire naturel a fonctionné il y a environ 2 milliards d'années. Le processus de désintégration radioactive de l'uranium 235 libère des neutrons, dont on étudie la diffusion supposée se dérouler dans une direction repérée par un vecteur unitaire $\vec{u}_x$, le long d'un cylindre de section S constante.

On appelle $n_{(x)}^*$ la concentration de neutrons à l'abscisse x . Dans un milieu géologique donné, le coefficient de diffusion des neutrons, noté D , est supposé constant. On se place en régime stationnaire.

1. À l'aide d'un bilan sur une tranche d'épaisseur dx pendant un intervalle de temps dt , établir l'équation différentielle vérifiée par $n_{(x)}^*$ dans un milieu sans source ni puits.

Dans le gisement d'Oklo, des couches riches en uranium alternent avec des couches dépourvues d'uranium et riches en eau infiltrée, chaque couche étant d'épaisseur de l'ordre du mètre. L'eau a la propriété d'absorber les neutrons. On s'intéresse au devenir des neutrons lorsqu'ils pénètrent dans une couche riche en eau. Pour ce faire, on considère un volume élémentaire de section S et compris entre les abscisses x et $x + dx$, et on note C la fraction de neutrons absorbés par unité de temps. La propagation se fait toujours rectilignement selon la direction $\vec{u}_x$ avec un coefficient de diffusion D (qui n'est pas le même que dans le filon d'uranium).

2. Faire un bilan du nombre de neutrons dans le volume de contrôle pendant un intervalle de temps dt . En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n_{(x)}^*$. Montrer qu'il apparaît une longueur caractéristique λ .

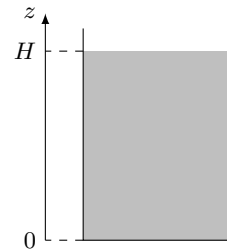
3. Établir la loi donnant $n_{(x)}^*$. Déterminer les constantes d'intégration en fonction de n_0^* la concentration particulière à l'abscisse nulle, prise à l'interface entre le filon d'uranium et le filon riche en eau, et d'une condition de non divergence.

4. Exprimer, en fonction de C et D , la *longueur de diffusion* L_D , définie comme la distance parcourue par les neutrons au bout de laquelle leur nombre est divisé par e . Celle-ci dépend-elle de x ?

Rappel mathématique : $\frac{d^2 f}{dx^2} - K^2 \times f = 0 \Rightarrow f = A \times e^{-x/K} + B \times e^{+x/K}$, avec A et B deux constantes.

Exercice 3 : sédimentation

On considère de l'eau liquide de masse volumique ρ_0 dans lequel des petites particules solides sont en suspension. Ces particules sont assimilées à des sphères de rayon R , de masse m , et on note ρ leur masse volumique. À la date initiale, la solution est fortement agitée, de sorte que les particules se répartissent dans le liquide de façon homogène. On laisse alors les particules se déposer au fond du récipient, de section horizontale S , sous l'action de la pesanteur. On appelle H la hauteur de l'eau dans le récipient.



Dans un premier temps, on fait l'étude mécanique du mouvement d'une particule. On suppose que la vitesse est lente, et que les particules sont soumises à une force de frottement visqueux proportionnelle à leur vitesse : $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$.

1. Faire l'inventaire des forces auxquelles une particule est soumise.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. En déduire la vitesse limite $\vec{v}_\ell$ d'une particule, ainsi que la durée nécessaire à une particule pour atteindre cette vitesse.
4. Déterminer la durée de chute Δt d'une particule initialement située à la surface du liquide.
5. Faire l'application numérique pour des particules de rayon $R = 0,1 \mu\text{m}$, sachant que $\alpha = 6\pi\eta_0 R$, où η_0 est la viscosité dynamique de l'eau.

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Viscosité dynamique de l'eau : $\eta_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Masse volumique des particules : $\rho = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Hauteur de liquide : $H = 10 \text{ cm}$

Le mouvement des particules vers le bas entraîne une inhomogénéité de leur densité. Il résulte alors un phénomène de transport par diffusion.

6. Dans quel sens la diffusion a-t-elle lieu ? Comparer avec le phénomène de sédimentation.

On s'intéresse au flux de particules dû à la sédimentation. On considère une surface (S) horizontale à l'altitude z , à laquelle la densité volumique de particule est $n_{(z)}^*$. On suppose que les particules ont toutes atteint leur vitesse limite.

7. En considérant uniquement le mouvement dû à la sédimentation, préciser le volume dans lequel se trouvent les particules qui franchissent la surface (S) pendant l'intervalle de temps dt .
8. En déduire l'expression du nombre de particules qui franchissent la surface (S) sous l'effet de la sédimentation pendant dt , puis le flux Φ_s de sédimentation.

À travers la même surface (S), il existe également un flux de particules dû à la diffusion. La relation d'Einstein lie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement visqueux α : $D = k_B T / \alpha$, avec $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

9. Exprimer le flux diffusif Φ_d correspondant à la diffusion des particules.
10. En régime stationnaire, que dire des flux Φ_s et Φ_d ? En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de particules.
11. Établir la loi de répartition verticale de particules $n_{(z)}^*$.
12. Sachant que des mesures optiques permettent de mesurer que $n_{(2 \text{ cm})}^* / n_{(0 \text{ cm})}^* = 1/2$ à la température de 298 K, déterminer la masse et le rayon des particules.