

Chapitre 13

Convergences et approximations

Sommaire

13.1 Inégalité de Markov et conséquences	319
13.1.1 Inégalité de Markov	319
13.1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	320
13.1.3 Loi faible des grands nombres	320
13.2 Convergence en loi	321
13.2.1 Introduction	321
13.2.2 Caractérisation dans le cas où les $X_n, n \in \mathbb{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$	322
13.2.3 Convergence de la loi binomiale	322
13.2.4 Théorème limite central	324
13.3 Approximations	325
13.3.1 Lois normales	325
13.3.2 Loi binomiale	326
13.3.3 Loi de Poisson	326

Ce chapitre est composé de deux grandes parties :

- les inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et la loi faible des grands nombres
- la convergence en loi et le théorème de la limite centrée ainsi que les approximations.

Compétences attendues. ⇨ Connaître et savoir utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

⇨ Connaître et savoir utiliser la loi faible des grands nombres.

⇨ Étudier la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires.

⇨ Connaître et savoir utiliser le théorème limite central.

⇨ Approximer une loi par une autre.

Tchebychev Pafnouti (16 mai 1821 [Okatovo] - 8 décembre 1894 [Moscou]).

Pafnouti Tchebychev, né le 16 mai 1821 à Okatovo, dans l'ouest de la Russie, est un mathématicien russe du XIX^e siècle. Issu d'une famille de militaires, riche et cultivée, il est d'abord éduqué chez ses parents. Il reçoit alors de très bons enseignements en mathématiques, mais aussi en français ce qui lui permettra plus tard d'échanger facilement avec les mathématiciens occidentaux. Son enfance est marquée par un handicap (il a une jambe plus longue que l'autre) qui l'empêche de pratiquer certaines activités, et aussi d'envisager une carrière militaire.

En 1837, il entre à l'université de Moscou, où il apprend les mathématiques sous la direction de Brashman. Alors qu'il commence à obtenir ses premiers résultats, sa situation financière change

dramatiquement en 1841 quand une famine frappe durement la Russie. Ses parents doivent quitter Moscou et ne peuvent plus subvenir à ses besoins. Même s'il vit désormais misérablement, Tchebychev persiste à continuer ses études. Il soutient sa thèse en 1846, où il poursuit le programme de Bernoulli et de Poisson consistant à donner un cadre théorique aux théorèmes limites des probabilités. En 1847, il devient professeur à Saint-Petersbourg.

Outre ses travaux en théorie des probabilités, Tchebychev est aussi célèbre pour les avancées qu'il a réalisées en arithmétique.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est démontrée par Jules Bienaymé en 1853. Elle est redécouverte par Tchebychev en 1867, qui la popularisa notamment en en faisant grand usage pour démontrer une loi faible des grands nombres.

Aimant combiner les aspects théoriques et appliqués des mathématiques, très habile de ses mains, il a conçu plusieurs machines arithmétiques ou autres structures mécaniques. C'est dans un article consacré à la mécanique qu'il a introduit les polynômes dits de Tchebychev. A la suite de cela, il est le premier à ébaucher une théorie des polynômes orthogonaux.

Grand voyageur, Tchebychev passait chaque été, ou presque, en Europe occidentale. Sur un plan personnel, il ne s'est jamais marié mais eut une fille. Économe de son argent comme de son temps, il interrompait toujours ses cours sitôt la cloche sonnée. Terminons cette biographie par l'orthographe de Tchebychev. On aurait pu écrire Chebyshev (comme les anglais), Tchebicheff, Chebychov sans se tromper... Pas facile de passer du cyrillique au latin!

Jules Irénée Bienaymé (1796-1878) fut inspecteur des finances puis, après la révolution de 1848 professeur à la Sorbonne. Il publia 23 articles scientifiques durant sa vie, la plupart dans d'obscures revues. Ce palmarès lui permettrait aujourd'hui d'être un candidat pas très bien placé à un poste de professeur des Universités, mais à son époque on lisait les articles avant de porter un jugement, les compter n'était pas suffisant. Il est vrai que dans ce temps là, et jusqu'à un passé récent, on tournait 7 fois son porte-plume dans la main avant d'écrire une première page. Quoique de 25 ans son aîné, Bienaymé était très lié avec Tchebychev dont il traduisit les travaux en Français. Toujours très en avance sur son temps dans le domaine des statistiques, Bienaymé est à l'origine de l'inégalité que l'on verra dans ce chapitre.

C'est à Jacques Bernoulli que l'on doit le premier énoncé de la loi des grands nombres; il apparaît dans son ouvrage *Ars Conjectandi* publié en 1713, huit ans après sa mort. Il avait pour cadre le jeu du pile ou face (schéma de Bernoulli). Le terme de "loi des grands nombres" est lui dû à Poisson. Ce terme juridique est à mettre en rapport avec le titre de l'ouvrage dans lequel il l'introduit, *Recherches sur les probabilités des jugements*, paru en 1837. De nombreux mathématiciens ont ensuite généralisé les énoncés de Bernoulli et Poisson, citons notamment Kolmogorov et Tchebychev.

On réalise une expérience aléatoire et on considère l'univers $\Omega = \{\text{issues possibles à l'expérience}\}$. On munit Ω d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω , puis on définit une probabilité P sur cet espace.

13.1 Inégalité de Markov et conséquences

13.1.1 Inégalité de Markov

L'inégalité de Markov permet d'extraire des informations quantitatives sur la localisation d'une variable aléatoire à partir de la connaissance de l'espérance de celle-ci et d'une borne sur le domaine de ces valeurs. Sans perte de généralité (quitte à changer le signe et à ajouter une constante à notre

variable aléatoire), le problème qui se pose est le suivant : supposons que nous ayons affaire à une variable aléatoire dont les valeurs ne peuvent être que positives ou nulles, et que nous ne connaissions de cette variable aléatoire que la valeur de son espérance. Que pouvons-nous en déduire sur la localisation des valeurs de cette variable ?

Un résultat simple mais d'une grande importance, est l'inégalité suivante, appelée inégalité de Markov.

Théorème 13.1 (🔗 Inégalité de Markov).

Si X est une var (discrète ou à densité) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, positive et ayant une espérance alors on a :

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve. 🔗

◇

Remarques.

1. On note que l'inégalité de Markov ne nous renseigne réellement sur $P(X \geq a)$ que si $a > E(X)$ (une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1!).

A quel point cette inégalité peut-elle être considérée comme précise ? Une réponse possible est que, très souvent, cette inégalité est assez grossière, c'est-à-dire que $P(X \geq a)$ est bien plus petite que $E(X)$. Qui plus est, cette inégalité ne fournit une information non-triviale que lorsque $a > E(X)$.

Prenons l'exemple d'une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre 2, pour laquelle on a donc $E(X) = 2$.

valeurs prises a	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X \geq a)$	0.86	0.59	0.32	0.14	0.053	0.016	0.0045	0.0010
$E(X)/a$	2	1	0.67	0.5	0.4	0.33	0.29	0.25

2. Les salaires étant positifs, le salaire moyen d'un cinquième de la population ne peut pas être plus grand que 5 fois le salaire moyen de la totalité de la population.

Appliquons l'inégalité de Markov à la var $(X - E(X))^2$ et en remplaçant a par ϵ^2 , on obtient l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

13.1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 13.2 (🔗 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Si X est une var (discrète ou à densité) définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant un moment d'ordre 2, alors on a :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Preuve. 🔗



Remarque.

On aurait pu introduire une seule inégalité que voici :

Soit $r \geq 0$ et X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $|X|^r$ admet des moments d'ordre r (ce qui signifie que $E(|X|^r)$ existe). Alors on a :

$$\forall t > 0, P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^r)}{t^r}.$$

Pour $r = 1$, on obtient l'inégalité de Markov et pour $r = 2$, celle de Bienaymé-Tchebychev.

Remarques.

Si $E(X) = 10$ et $\sigma = 0.1$ sont les valeurs exactes de la moyenne et de l'écart-type d'une variable aléatoire X , sans aucune indication particulière sur la loi de X , on sait que X prendra des valeurs entre 9.7 et 10.3 avec une probabilité supérieure à 88%.

Si on connaît la loi de X , on a des estimations beaucoup plus précises.

Ces inégalités ont peu d'applications pratiques, car la majoration qu'elles fournissent est la plupart du temps excessive, mais elles sont valables quelle que soit la loi de X pourvu que l'on puisse définir une espérance et une variance : elles sont en ce sens " universelles".

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet toutefois de démontrer la loi faible des grands nombres.

EXERCICE 13.1.

1. Soit X une var suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). Montrer que : $\forall \epsilon > 0, P(|X - 1/\lambda| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.

En déduire : $P(X \geq 3/\lambda) \leq \frac{1}{4}$.

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une var X suivant la loi normale centrée

réduite, montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

13.1.3 Loi faible des grands nombres

On s'est aperçu depuis longtemps que lorsqu'on lance un très grand nombre de fois un dé non pipé, la fréquence d'apparition du 5 tend vers $1/6$: c'est ce que les Anciens appelaient les lois empiriques

du hasard. Le but premier des probabilités était de donner une modélisation mathématique de ces phénomènes. Les lois des grands nombres illustrent alors le succès de ce programme.

Théorème 13.3 (Loi faible des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé, **indépendantes**, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 .

Si l'on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0.$$

Preuve.

La loi faible des grands nombres est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : il suffit d'appliquer cette dernière à la var $\bar{X}_n$ et on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, 0 \leq P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Le résultat annoncé se déduit alors du théorème d'encadrement. ◇

Exemple 13.1.

On lance un dé non pipé, X_n vaut 1 si le n -ième lancer amène 5, et 0 sinon. Alors $\bar{X}_n$ tend vers 1/6 en probabilités.

13.2 Convergence en loi

13.2.1 Introduction

Avec ce mode de convergence, on énoncera le théorème de limite central. Il montrera le rôle joué par la loi normale et donnera un sens à ce que l'on peut appeler, en probabilité, "l'approximation d'une loi".

Définition 13.1 (Convergence en loi).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout entier naturel n , on note F_n la fonction de répartition de X_n .

Soit X une var définie également sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F .

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x).$$

On écrira alors : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarque.

on dit aussi que la convergence de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers X est une convergence faible.

13.2.2 Caractérisation dans le cas où les $X_n, n \in \mathbb{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 13.4 (🔗 Cas des var discrètes).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var discrètes et X une va discrète. On suppose que les $X_n, n \in \mathbb{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$

Remarque.

Si (X_n) et (Y_n) sont deux suites de var convergentes en loi respectivement vers X et Y , alors $(X_n - Y_n)$ ne converge pas nécessairement vers $(X - Y)$! Voir exemple ci-dessous.

Exemple 13.2.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$, $Y = 1 - X$. Donc on a aussi que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

On considère les suites (X_n) et (Y_n) telles que, pour tout entier naturel non nul n , $X_n = X$, $Y_n = Y$.

Ces deux var convergent en loi vers une var Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

Mais : $X_n - Y_n = 2X - 1$ est une var qui n'est pas la var nulle ! $(2X - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(2X - 1 = -1) = P(X = 0) = 1/2$, $P(2X - 1 = 1) = P(X = 1) = 1/2$.

EXERCICE 13.2.

Soit X une var à densité. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = X.e^{1/n}$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X .

EXERCICE 13.3.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de va telles que pour tout entier naturel n non nul, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1/n)$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

13.2.3 Convergence de la loi binomiale

Théorème 13.5 (🔗 CV de la loi binomiale).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que, pour tout entier naturel n non nul, et supérieur à λ (réel strictement positif), $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve. 🔗



13.2.4 Théorème limite central

Le théorème suivant est connu sous le nom de "théorème central-limite" parfois noté en abrégé *TCL*, aussi appelé théorème de la limite centrée.

Il établit la convergence en loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes vers la loi normale. Ce théorème d'une très grande généralité a un rôle capital en statistique.

C'est ce théorème qui permet d'affirmer que la loi normale est la loi des phénomènes naturels. Si on observe par exemple la taille des individus dans une population, celle-ci va suivre une répartition qui va ressembler à celle de la loi normale (la fameuse courbe en cloche).

Théorème 13.6 (TCL).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes** et de même loi, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 .

Si l'on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, et si l'on pose $\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$ la var centrée réduite

associée à $\bar{X}_n$, alors la suite des var $(\bar{X}_n^*)$ converge en loi vers une var normale centrée réduite. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bar{X}_n^* \leq x) = \Phi(x)$$

et plus généralement, pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Théorème 13.7 (TCL).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes** et de même loi, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 .

Si l'on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et si l'on pose $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n \times m}{\sigma \sqrt{n}}$ la var centrée réduite associée à S_n , alors la suite des var (S_n^*) converge en loi vers une var normale centrée réduite. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq x) = \Phi(x)$$

et plus généralement, pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq S_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarque.

-En notant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a : $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ et $S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}} = \bar{X}_n^*$. Ce qui signifie, en gardant les hypothèses du théorème central limite que la suite des var (S_n^*) converge en loi vers une var normale centrée réduite (d'où la réécriture du TCL).

EXERCICE 13.4.

Pour tout entier naturel n , on considère une var S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p (avec $0 < p < 1$). Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.

EXERCICE 13.5.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $X_n = \sum_{i=1}^n B_i$. A l'aide du théorème central limite, montrer que

la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre α et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. A l'aide du théorème central limite, montrer que la

suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

13.3 Approximations

13.3.1 Lois normales

Avec le TCL, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi ayant chacune la même espérance m et la même variance σ^2 , on a vu que en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - n \times m}{\sqrt{n\sigma^2}}$ alors la suite

$(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Comme $S_n = \sigma \sqrt{n} S_n^* + nm \simeq \sigma \sqrt{n} Z + nm$, transformée affine d'une loi normale alors pour n grand, la variable S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n \times m, n\sigma^2)$ (voir preuve du chapitre 13).

L'approximation est en général acceptée pour $n > 30$.

Théorème 13.8 (lois normales).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi ayant chacune la même espérance m et la même variance σ^2 , et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \frac{S_n - n \times m}{\sqrt{n\sigma^2}}$.

On approche la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ par la loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ dès que $n \geq 30$.

Remarque. Attention, on ne peut pas dire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$, car celle-ci dépend de n !

Exemple 13.3. 120 personnes s'adressent à un même guichet de Sécurité Sociale pour se faire rembourser des frais de maladie. Soit X_k la somme versée à la k -ième personne.

On sait, d'après des études statistiques, que l'espérance mathématique de X_k est $m_{X_k} = 50$ euros avec un écart-type $\sigma_{X_k} = 30$ euros.

Le guichet dispose au total de 6500 euros, calculons la probabilité pour que cette somme d'argent suffise à rembourser les 120 personnes.

Posons $X = \sum_{k=1}^{120} X_k$ et supposons les X_k indépendantes, on a :

$$E(X) = 120 \times 50 = 6000; V(X) = 120 \times (30)^2 = 10800; \text{ et } \sigma_X \simeq 329.$$

Sans aucune autre information sur la loi des X_k , le nombre de termes étant grand, le théorème central-limite s'applique et la loi de X est voisine de la loi normale. La probabilité cherchée est alors donnée par : $P(X < 6500) = P(X^* < \frac{6500 - 6000}{329}) \simeq \Phi(500/329) \simeq 0,935$. (car $500/329 \simeq 1,519$ et la table de la loi normale donne 0,9345)

13.3.2 Loi binomiale

En première année, vous avez vu qu'une loi binomiale pouvait, à condition que ses paramètres n et p vérifient certains critères ($np \leq 15$, $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$), être approchée par une loi de Poisson.

Théorème 13.9 ([🔗 lois binomiales](#)).

On approche la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$ dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$, $nq \geq 5$.

Voir preuves chapitre 13.

EXERCICE 13.6.

Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$. Donner une valeur approchée de $P([405 \leq X \leq 495])$.

13.3.3 Loi de Poisson

Théorème 13.10 ([🔗 lois de Poisson](#)).

On approche la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que $\lambda \geq 18$.

Voir preuves chapitre 13.

Remarques.

-Certains auteurs donnent d'autres valeurs pour les conditions sur les paramètres, ce n'est pas grave car il est stipulé dans le programme que " toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations ".

Lorsque n est assez grand, on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$. On donne parfois comme condition np et $nq > 5$.

Plus généralement les conditions d'approximation sont : n «grand» : $n \geq 20$, p pas«trop petit» : $p > 0,1$ et np «assez grand» : $np > 10$.

Pour l'application en pratique, λ doit être assez grand, afin d'approximer la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$. L'approximation est en général acceptée dès que $\lambda \geq 10$, elle est très satisfaisante pour $\lambda > 18$.

L'approximation par une loi de Poisson permet d'éviter le calcul pénible des coefficients binomiaux.

-La mémorisation de ces deux théorèmes s'en trouvera simplifiée si l'on remarque que la loi " approchante " possède, dans chacun des deux cas ci-dessus, la même espérance et la même variance que la loi " approchée."

EXERCICE 13.7.

Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$. Donner une valeur approchée de $P([X \leq 74])$.

Feuille d'exercices n°13

CONVERGENCES ET APPROXIMATIONS

Exercice 1.

Majorer une probabilité : positivité de la probabilité

- inégalité de Markov-inégalité de B-T

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'événements de la tribu $\mathcal{A}$.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\bigcup_{k=0}^n A_k) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k)$.
 - (b) Démontrer que, si la série de terme général $P(A_k)$ converge, alors on a la relation : $P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$.
2. Soit X une var discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet un moment d'ordre 4. Justifier que pour tout réel $\epsilon > 0$, $P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^4)}{\epsilon^4}$.
3. Soit X une var définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f une fonction croissante, à valeurs strictement positives, définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$. Soit a un réel de I . On suppose que $f(X)$ est une var qui admet une espérance. Justifier que $P(X \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{f(a)}$.
4. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on considère une var X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $P(|X - \lambda| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a^2}$.

Exercice 2.

Prouver un résultat de convergence en probabilité

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \varepsilon(1)$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
Démontrer que $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - 1| \geq \epsilon) = 0$.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \varepsilon(n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| \geq \epsilon) = 0$.

3. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var de même loi $\mathcal{B}(n, 1/n^2)$. Montrer que $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \frac{1}{n}| \geq \epsilon) = 0$.

Exercice 3.**Etudier une convergence en loi**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 3$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher dont seulement trois sont rouges. On tire successivement n boules de cette urne, on suppose que les tirages sont indépendants et réalisés avec remise. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé modélisant l'expérience. On note X_n la var qui comptabilise le nombre de boules rouges tirées. Quelle est la loi de X_n ? Etudier la cv en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 3}$.
2. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et l'on définit alors la variable $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Montrer que la suite de var $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cv en loi vers une var dont on précisera la loi.
3. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, et l'on note $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite de var $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cv en loi vers une var dont on précisera la loi.
4. Soient m et n deux entiers tels que $0 \leq m \leq n$. On considère une urne contenant n boules. On suppose que la proportion initiale de boules rouges est égale à $p \in]0, 1[$. On tire dans cette urne une poignée de m boules. On suppose que toutes les poignées de m boules sont équiprobables. On note X_n le nombre de boules rouges de cette poignée. On modélise donc l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où Ω désigne l'ensemble des poignées de m boules possibles, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et P la probabilité uniforme. Justifier que la loi de X_n est donnée par la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) = \frac{\binom{np}{k} \binom{n(1-p)}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

En déduire que la suite de var $(X_n)_{n \geq m}$ cv en loi vers une var dont on précisera la loi.

5. On considère deux suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \varepsilon(n)$ et $Y_n \hookrightarrow \varepsilon(1/n)$. Etudier la cv en loi des suites de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$. On pourrait résumer la définition de la loi de cette var par : $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\})$. Montrer que la suite de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cv en loi vers une var dont on précisera la loi.

Exercice 4. EDHEC 2012]

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0; 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q .

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile" .
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^e lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.

On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .

- (a) Pour tout k de $[[1; n - 1]]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
- (b) Déterminer $P(T_n = n)$.
- (c) Vérifier que $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$.
- (d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

2. Loi de X_n .

- (a) Donner la loi de X_n .
- (b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n .

- (a) Déterminer, pour tout k de $[[0; n - 1]]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
- (b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
- (c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.

4. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5. Simulation informatique.

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

p=rd.random()
t = 0
x = 0
y = 0
n=int(input('entrer un entier n>= 2 '))
while (x ==0) and (t<n) :
    t=t+1
```

```

if rd.random() > p :
    y=y+1
else :
    x=1
print(t, x, y)

```

Exercice 5. EML 2014

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

- (a) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$.
(b) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.
- Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

- Pour tout k de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
- Calculer $P(X_n = n+1)$.
- Montrer, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$.
- En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
- Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.
En déduire que $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
- Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.
- En déduire : $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
- Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[[2; +\infty[[$ telle que :

$$\forall k \in [[2; +\infty[[, P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Exercice 6. EML 2006

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$

(a) Rappeler une densité de U

(b) En utilisant la définition de la variance de U , montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f .

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Déterminer, pour tout réel y , la probabilité $P(X^2 \leq y)$. On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.

(c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$

Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z .

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p .

on considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$.

(a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Exercice 7. HEC 1997

On considère une population d'environ 10 000 consommateurs, dont chacun est susceptible d'acheter une voiture, soit de marque étrangère, soit de marque française. Un organisme de sondage interroge 100 consommateurs pris au hasard : 30 se révèlent préférer une marque étrangère (donc 70 une marque française). L'enquête est publiée et influence parfaitement -cas d'école- la population dont 30% penche maintenant pour une marque étrangère (70% pour une marque française). Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 consommateurs pris au hasard est interrogé, et le résultat publié influence parfaitement la population qui s'aligne sur les préférences de l'échantillon. On recommence le tirage au hasard de 100 consommateurs, et ainsi de suite. Que se passe-t-il après un grand nombre de sondages ?

L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définition. Soit une variable aléatoire X ; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0, \dots, N\}$. On pose $p = \frac{k_0}{N}$ et $q = 1 - p$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, p) , à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante :

X_0 est la variable certaine égale à k_0

X_1 suit la loi binômiale de paramètres N et p (Par convention, on dit que la loi binômiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à 0 et que la loi binômiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à N)

Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0, \dots, N\}$ tel que $p(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = k)$ est la loi binômiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes :

Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0, \dots, N\}$ tel que $p(X_n = k) \neq 0$, et pour tout i de $\{0, \dots, N\}$,

$$P_{X_n=k}(X_{n+1} = i) = \binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}$$

(avec la convention habituelle $0^0 = 1$)

On a de plus l'hypothèse (H) : pour tout entier n non nul, pour tout n -uplet $(k_1, \dots, k_n)$ de $\{0, \dots, N\}^n$ tel que $p(X_n = k_n, \dots, X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0, \dots, N\}$,

$P_{X_n=k_n, \dots, X_1=k_1}(X_{n+1} = i) = P_{X_n=k_n}(X_{n+1} = i)$

Cette hypothèse n'est utile qu'à la question 8. de la partie 2.

On définit la suite de variable aléatoires $(F_n)_{n \geq 0}$ par $F_n = \frac{X_n}{N}$

L'énoncé ci-dessous propose une étude des cas $N = 2$ et $N = 3$. les propriétés mises en évidence par cette étude peuvent se généraliser à une valeur quelconque de N .

Préliminaire

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binômiale. Comment interpréter l'hypothèse (H) ?

Partie 1

Dans cette partie, $N=2$.

1. (a) On suppose que $k_0 = 0$. Déterminer la loi de X_1 .

Que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n \geq 0}$?

- (b) De même si $k_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n \geq 0}$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$

2. (a) Montrer que, pour tout entier n , $P(X_n = 1) = \frac{1}{2^n}$
 En déduire que pour tout entier n , $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$
 (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?
 (c) Calculer $E(X_n)$
3. On définit la variable aléatoire T par :
- si pour tout entier n , $(X_n = 1)$ alors $T = 0$
 - sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 2)$.
- (a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $P(T = n) = P(X_{n-1} = 1) - P(X_n = 1)$. Que vaut $P(T = 0)$?
 (b) Reconnaître la loi de T et déterminer $E(T)$

Partie 2

Dans cette partie, $N = 3$.

1. Que dire de la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?
On suppose désormais, dans la suite de cette partie que $k_0 = 1$.
2. Etant donné un entier n , déterminer $p(X_{n+1} = 0)$ en fonction des valeurs de $p(X_n = k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
 Déterminer de même $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$
 Pour tout entier n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Vérifier que $U_{n+1} = AU_n$
 où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$
3. (a) Soit le vecteur ligne $V = (0, 1, 2, 3)$. Calculer VA .
 (b) Montrer que $E(X_n) = VU_n$ pour tout entier n . En déduire la valeur de $E(X_n)$
4. (a) Soit le vecteur ligne $W = (0, 2, 2, 0)$. Calculer WA
 (b) Soit n un entier naturel. Montrer que $E(X_n(3 - X_n)) = WU_n$. en déduire que $E(X_n(3 - X_n)) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$
 (c) En déduire que pour tout entier n , $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 (d) A l'aide de 3. et de 4.c, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$ pour tout entier i de $\{0, 1, 2, 3\}$.
 (e) Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ converge en loi. Quelle est la limite?
 (f) Déterminer le premier entier n tel que $p(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 1) > 0,95$.
5. (a) On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Montrer que Y_2 et Y_3 sont colonnes propres de A . Quelles sont les valeurs propres associées?

- (b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de A . Quelles sont les valeurs propres associées?

En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

- (c) Calculer A^n pour tout entier n .

6. (a) Monter que la loi de X_n est donnée par :

$$p(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

$$p(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right)$$

$$p(X_n = 2) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n \right)$$

$$p(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

- (b) Retrouver le résultat du 4.e)

7. On définit la variable aléatoire T par :

- si pour tout entier n , $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq 3)$, alors $T = 0$
- sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 3)$

On pose pour tout entier n , $v_n = p(X_n = 1) + p(X_n = 2)$

- (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $p(T = n) = v_{n-1} - v_n$. Que vaut $p(T = 0)$?

- (b) Reconnaître la loi de T et donner $E(T)$

8. Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X_k \leq 1)$

On pose $x_1 = p(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$x_k = p(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul,

$y_k = p(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 1)$

- (a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k . En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

- (b) Montrer que $p(B_n) = \sum_{k=1}^n x_k + y_n$. En déduire $p(B_n)$ et la limite de la suite $(p(B_n))_{n \geq 1}$

- (c) En déduire la probabilité qu'il existe un entier n vérifiant $F_n \geq 0,5$