

Chapitre 9

Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Sommaire

9.1 Loi d'un couple de variables aléatoires	184
9.2 Lois marginales-Lois conditionnelles	185
9.3 Indépendance	187
9.4 Fonctions d'un couple de variables aléatoires	188
9.4.1 Généralités	188
9.4.2 Somme de 2 variables aléatoires	188
9.4.3 Produit de 2 variables aléatoires	190
9.4.4 Maximum-minimum de 2 variables aléatoires supposées indépendantes	192
9.5 Covariance	193
9.5.1 Définition et propriétés	194
9.5.2 Covariance des variables indépendantes	196
9.6 Corrélation	196
9.7 Suites de variables aléatoires discrètes	198
9.7.1 Lois conjointes-Lois marginales	198
9.7.2 Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes	198
9.7.3 Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes	198
9.7.4 Espérance et variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes	200
9.7.5 Stabilité des lois binomiales et de Poisson par l'addition	200

Dans tout ce chapitre les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes. On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques.

On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites dès lors que les séries envisagées sont absolument convergentes.

On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Compétences attendues. ⇨ Obtenir la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

⇨ Déterminer les lois marginales à partir de la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

⇨ Déterminer les lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes

⇨ Déterminer les lois marginales à partir des lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes.

- ⇒ Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes.
- ⇒ Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes.
- ⇒ Déterminer la loi de la somme de variables aléatoires discrètes.
- ⇒ Connaître la stabilité par somme des lois binomiales et des lois de Poisson.
- ⇒ Déterminer les lois du minimum et du maximum de variables aléatoires discrètes.

Dans tout ce chapitre, toutes les variables aléatoires discrètes sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, désigne l'ensemble des valeurs prises respectivement par X et Y . On notera var pour variable aléatoire réelle.

9.1 Loi d'un couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises respectivement par X et Y .

Définition 9.1.

Pour tout couple de variables aléatoires (X, Y) l'application de $X(\omega) \times Y(\omega)$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x_i, y_j) \mapsto P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j)$ est appelée la loi du couple (X, Y) , appelée aussi loi conjointe. On pourra représenter cette loi par un tableau à double entrée.

Exemple 9.1.

On lance deux dés équilibrés (l'un est bleu, l'autre est blanc). On appelle X la var discrète désignant le numéro obtenu avec le dé bleu et Y la var discrète désignant le numéro obtenu par le dé blanc. (X, Y) désigne un couple de var discrètes.

La loi du couple est donnée par : $\forall (i, j) \in [|1, 6|]^2, P(X = i, Y = j) = \frac{1}{36}$.

Exemple 9.2.

On lance deux dés à 4 faces distinctes et on note X_1 , (resp. X_2) le premier résultat (resp. le deuxième résultat). Soit $Y = \max(X_1, X_2)$.

Loi du couple (X_1, Y) : soit $(i, j) \in \{1, \dots, 4\}^2$.

1. si $i > j$, alors comme $Y \geq X$, $(X_1 = i) \cap (Y = j) = \emptyset$ et $p_{i,j} = P((X_1 = i) \cap (Y = j)) = 0$.
2. si $i < j$, alors $(X_1 = i) \cap (Y = j) = (X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ et par indépendance des deux lancers, $p_{i,j} = P(X_1 = i)P(X_2 = j) = (\frac{1}{4})^2$.
3. si $i = j$; on a $(X_1 = i) \cap (Y = i) = (X_1 = i) \cap (X_2 \leq i)$ (car sinon le maximum devient X_2).
D'où par indépendance, $P((X_1 = i) \cap (Y = i)) = P(X_1 = i)P(X_2 \leq i)$.

Puis $P(X_2 \leq i) = \sum_{k=1}^i P(X_2 = k) = i * \frac{1}{4}$. On en déduit que $p_{i,j} = P((X_1 = i) \cap (Y = i)) = \frac{i}{16}$.

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16

Remarques.

1. Contrairement aux tableaux de loi d'une seule variable, ce tableau contient des 0; ce qui signifie que le couple (X, Y) ne prend pas toutes les valeurs $\llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket = X_1(\Omega) \times Y(\Omega)$. En fait, l'ensemble des valeurs prises par un couple (X, Y) sera toujours inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, mais pas forcément égal. En pratique, avant de déterminer la loi d'un couple (X, Y) , on déterminera seulement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ et non l'ensemble des valeurs prises par le couple, car cet ensemble nécessite une étude plus poussée qui sera faite lors du calcul de la loi.
2. Si on somme tous les coefficients de ce tableau on obtient 1.

Réciproquement,

Théorème 9.1.

$\{(i, j), p_{ij}\}, (i, j) \in I \times J$ est la loi d'un couple de variables à valeurs entières ssi

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } (i, j) \in I \times J \\ \text{et } \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1 \end{cases}$$

Remarque.

Dans ce contexte, $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} p_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} \right)$.

Pour les sommes doubles finies, ce résultat sera détaillé en exercice de TD; pour les sommes doubles infinies, il est à admettre.

9.2 Lois marginales-Lois conditionnelles

Définition 9.2 (Lois marginales).

Les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) et leur loi, loi marginale de X (resp. de Y).

Définition 9.3 (Lois conditionnelles).

Soit $(X = x_i)$ un événement de probabilité non nulle. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$, la loi de la variable $(Y / (X = x_i))$, c'est à dire la loi de la variable Y pour la probabilité $P_{(X=x_i)}$:

$$\forall y_j \in Y(\Omega), P(Y = y_j / X = x_i) = P_{(X=x_i)}(Y = y_j).$$

On définit de même la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$, où $P(Y = y_j) \neq 0$.

Méthode pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple.

Propriété 9.2.

Supposons connue la loi du couple (X, Y) .

On cherche maintenant à connaître la loi de X i.e. l'ensemble des couples $\{(x_i, P(X = x_i)), x_i \in X(\Omega)\}$.

Or la famille des événements $\{(Y = y_j), y_j \in Y(\Omega)\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'événements, on obtient :

$$\text{pour tout } x_i \in X(\Omega) \text{ fixé} \quad P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

De même, la loi de Y s'obtient à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X = x_i), x_i \in X(\Omega)\}$:

$$\text{pour tout } y_j \in Y(\Omega) \text{ fixé} \quad P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Exemple 9.3.

Cherchons la loi marginale de X_1 :

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4	$P(X_1 = i)$
1	1/16	1/16	1/16	1/16	4/16
2	0	2/16	1/16	1/16	4/16
3	0	0	3/16	1/16	4/16
4	0	0	0	4/16	4/16

Justification :

Par exemple, $P(X_1 = 2) = \sum_{j=1}^4 P((X_1 = 2) \cap (Y = j)) = 0 + 2/16 + 1/16 + 1/16 = 4/16 = 1/4$. On fait la somme des coefficients sur la 2^e ligne. De même pour les autres valeurs prises par X .

On retrouve la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Evidemment, pour connaître la loi de X_1 , il était inutile de calculer la loi du couple (X_1, Y) !

Cherchons maintenant la loi marginale de Y :

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16
$P(Y = j)$	1/16	3/16	5/16	7/16

On vérifie, avant toute chose, que la somme des coefficients de la dernière ligne fait bien 1 !

Justification :

Par exemple $P(Y = 4) = \sum_{i=1}^4 P((X_1 = i) \cap (Y = 4))$. On est ramené à faire la somme des coefficients de la 4^e colonne. De même pour les autres valeurs prises par Y .

Remarques. :

-Pour déterminer la loi de Y qui est la loi d'un maximum, on a vu dans le chapitre sur les variables aléatoires une autre méthode via la fonction de répartition.

On a $Y(\Omega) = [1, 4]$. Puis pour tout $j \in Y(\Omega)$,

$$P(Y \leq j) = P((X_1 \leq j) \cap (X_2 \leq j)) = P(X_1 \leq j)P(X_2 \leq j) \text{ (lancers indépendants)} = \frac{j}{4} \times \frac{j}{4} = \frac{j^2}{16}.$$

$$\text{On obtient que } \forall j \in [1, 4], P(Y = j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j-1) = \frac{j^2 - (j-1)^2}{16} = \frac{2j-1}{16}$$

-La loi du couple (X, Y) permet d'obtenir les lois de X et de Y mais la réciproque est fausse.

EXERCICE 9.1 (Loi du couple, loi marginale).

On lance indéfiniment une pièce donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$).

On note $\forall k \in \mathbb{N}^*$, les événements : P_k : (resp. F_k) " la pièce donne pile au k ème tirage " (resp. " la pièce donne face au k ème tirage ").

On note X le temps d'attente du premier "pile" et Y le temps d'attente du deuxième "pile". Donner la loi du couple (X, Y) puis en déduire la loi de Y .

Théorème 9.3.

Soit (X, Y) un couple de var discrètes. Si l'on connaît la loi marginale de X , ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x_i$ est réalisé, alors la loi de Y est déterminée par :

$$\forall y_j \in Y(\Omega), P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) P_{X=x_i}(Y = y_j).$$

De façon analogue, si l'on connaît la loi marginale de Y , ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y_i$ est réalisé, alors la loi de X est déterminée par :

$$\forall x_j \in X(\Omega), P(X = x_j) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} P(Y = y_i) P_{Y=y_i}(X = x_j).$$

• Point méthode pour résoudre les problèmes de couples

Déterminer la loi d'un couple :

1. Une seule technique : revenir à la définition et calculer $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j)$ pour tout couple (i, j) parfois directement ou par conditionnement.

☛ Déterminer les lois marginales :

1. Il faut se reporter à la loi du couple, et si celle-ci a été visualisée à l'aide d'un tableau, il suffit de sommer par rangées dans les marges du tableau.
2. Si l'on a pas fait de tableau, on utilise la FPT et le SCE adapté, voir propriété 9.2.

EXERCICE 9.2.

Soit la var $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et la var Y définie sur le même espace probabilisé que X vérifiant : sachant que $(X = k)$ est réalisé, la loi est alors la loi $\mathcal{B}(k, p)$, avec $0 < p < 1$.

Donner la loi de Y .

9.3 Indépendance

Pour alléger les notations, on notera à partir de ce paragraphe, x et y les éléments de $X(\Omega)$ et de $Y(\Omega)$.

Définition 9.4.

On dit que deux var discrètes X et Y sont indépendantes lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

9.4 Fonctions d'un couple de variables aléatoires

9.4.1 Généralités

Théorème 9.4 ([🔗 Fonction d'un couple](#)).

Pour tout couple (X, Y) de var discrètes et pour toute fonction g définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'application Z définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$ est une var discrète. Sa tribu associée est incluse dans la tribu du couple (X, Y) .

La loi de g est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P((X = x), (Y = y)).$$

Théorème 9.5 ([🔗 Cas particuliers](#)).

Si X et Y sont deux var discrètes, alors $X + Y$, $\text{Max}(X, Y)$, $\text{Min}(X, Y)$ et XY sont aussi des var discrètes.

Théorème 9.6 ([🔗 Formule de transfert](#)).

Soit (X, Y) un couple de var discrètes tel que chacune des composantes ait une espérance et soit g une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On suppose de plus que la **var** $Z = g(X, Y)$ **a une espérance**.

On a alors :

$$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) P((X = x), (Y = y))$$

Remarque.

var $Z = g(X, Y)$ **a une espérance** c'est à dire sous réserve de CVABS de la série double.

Propriété 9.7 ([🔗 Linéarité de l'espérance](#)).

Si deux var X et Y ont chacune une espérance alors, quels que soient les réels a et b , la var $aX + bY$ possède une espérance, et on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Théorème 9.8 ([🔗 Croissance de l'espérance](#)).

Si deux var X et Y ont chacune une espérance et si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

9.4.2 Somme de 2 variables aléatoires

Exemple 9.4.

X_1 et X_2 sont les résultats de deux dés à 4 faces distinctes et $Y = \max(X_1, X_2)$.

On a déterminé la loi conjointe de (X_1, Y) . On cherche maintenant à connaître la loi de $X_1 + Y$.

Méthode : on note, dans chaque case du tableau à double entrée de la loi du couple, la valeur de la somme puis pour chaque valeur on somme les probabilités des cases concernées.

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$
4	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$

Alors par exemple, $P(X_1 + Y = 3) = \frac{1}{16} + 0$; $P(X_1 + Y = 5) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0 + 0$ etc. ..

Justification

$$(X_1 + Y = 5) = ((X_1 = 1) \cap (Y = 4)) \cup ((X_1 = 2) \cap (Y = 3)) \cup ((X_1 = 3) \cap (Y = 2)) \cup ((X_1 = 4) \cap (Y = 1))$$

Les événements de la réunion sont deux à deux incompatibles d'où le calcul de $P(X_1 + Y = 5)$.

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 + Y = k)$	1/16	1/16	3/16	2/16	4/16	1/16	4/16

Propriété 9.9 (Formule générale).

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont la loi s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega), z-x \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = z - x))$$

Propriété 9.10 (Calcul de l'espérance de la somme $X + Y$, sous réserve d'existence).

1. Si on connaît la loi de X et de Y , et donc leur espérance, on utilise la linéarité de l'espérance, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Si on connaît la loi de $S = X + Y$, on peut calculer l'espérance en utilisant la définition.
3. Si on ne connaît que la loi du couple (X, Y) , on utilise la formule de transfert :

$$E(X + Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x + y) P((X = x) \cap (Y = y)).$$

$S = k$	2	3	4	5	6	7	8
$P(S=k)$	1/16	1/16	3/16	2/16	4/16	1/16	4/16

Et donc $E(X_1 + Y) = E(S) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} + \dots + 8 \cdot \frac{4}{16} = \frac{90}{16} = 5$.

Exemple précédent

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$
4	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$

Alors $E(X_1 + Y) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} + 0 + 4 \cdot \frac{2}{16} \dots$

Propriété 9.11 (🔗 Stabilité de la loi binomiale).

Si X_1 et X_2 sont deux var indépendantes, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ alors
 $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Propriété 9.12 (🔗 Stabilité de la loi de Poisson).

Soit λ_1, λ_2 deux réels strictement positifs.

Si X_1 et X_2 sont deux var indépendantes, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

EXERCICE 9.3.

Faire la preuve de 9.12.

9.4.3 Produit de 2 variables aléatoires**Exemple 9.5** (loi de $X_1 \cdot Y$).

La démarche est analogue à celle de la section précédente : on repart du tableau de la loi conjointe de X_1 et Y .

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16

Alors par lecture du tableau : par exemple, $P(X_1 \cdot Y = 4) = 1/16 + 2/16 + 0 = 3/16$.

Justification

$$(X_1 \cdot Y = 4) = ((X_1 = 1 \cap Y = 4)) \cup ((X_1 = 2) \cap (Y = 2)) \cup ((X_1 = 4) \cap (Y = 1)).$$

Or les événements de la réunion sont 2 à 2 incompatibles d'où

$$P(X_1 \cdot Y = 4) = P((X_1 = 1) \cap (Y = 4)) + P((X_1 = 2) \cap (Y = 2)) + P((X_1 = 4) \cap (Y = 1)) = 1/16 + 2/16 + 0.$$

Tableau de la loi de $X_1 \cdot Y$:

$X_1 \cdot Y =$	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(X_1 \cdot Y = \dots)$	1/16	1/16	1/16	3/16	1/16	1/16	3/16	1/16	4/16

Remarques.

-La loi du produit sera rarement demandée, car la formule générale est complexe à utiliser : elle ne pourra être demandée que lorsque le tableau de la loi conjointe est tout petit.

-En revanche, l'espérance $E(XY)$ sera très souvent calculé cette année, car elle apparaît dans la définition de la covariance :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

-La covariance permet de mesurer le degré de corrélation entre les variables X et Y .

Théorème 9.13 (🔗 Indépendance et espérance).

Si X et Y sont deux var indépendantes qui ont chacune une espérance, alors XY a une espérance et on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Remarque (Attention).

Si les var ne sont pas indépendantes, l'existence de l'espérance de chacune des var n'implique pas l'existence de l'espérance du produit!

Propriété 9.14 (🔗 Calcul de l'espérance du produit $X \cdot Y$, sous réserve d'existence).

1. si on connaît la loi de $X \cdot Y$ (cas rare), on calcule $E(X \cdot Y)$ à l'aide de la définition.
2. si on ne connaît que la loi du couple (X, Y) , on utilise la formule de transfert (toujours la même!):

$$E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \times P((X = x) \cap (Y = y))$$

Remarque.

Dans le cas très important où X et Y sont deux variables de Bernoulli, alors $E(XY) = P((X = 1) \cap (Y = 1))$.

• **Point méthode pour déterminer la loi d'une fonction de var : $Z = f(X, Y)$**

Loi somme ou loi produit ou cas général : $Z = X + Y, Z = XY, Z = f(X, Y)$

1. Il est indispensable de connaître la loi du couple (X, Y) .

2. On utilise la formule suivante pour la somme :

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega), z-x \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = z - x)).$$

Il faut bien faire attention à la sommation !.

3. Dans le cas général : $\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(x,y)=z}} P((X = x), (Y = y)).$

4. Si l'on a fait un tableau, la méthode est simplifiée, voir exemple 9.5.

5. Si les variables sont indépendantes, la seule connaissance des lois de X et de Y suffit.

6. Il existe deux cas où le résultat est connu voir les propriétés de stabilités 9.11 et 9.12.

9.4.4 Maximum-minimum de 2 variables aléatoires supposées indépendantes

• **Point méthode pour déterminer la loi du maximum de var : $Z = \max(X, Y)$**

Soit X et Y deux var discrètes. La var discrète : $Z = \max(X, Y)$ est définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)).$$

1. **Pour trouver la loi de Z , on utilise la fonction de répartition, après avoir justifié par une phrase type l'égalité suivante : $\forall k \in Z(\Omega), (Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$.**
2. **Cette phrase est la suivante :**
 $\forall k \in Z(\Omega)$, pour chaque ω de Ω , dire que le plus grand des $Z(\omega)$ est inférieur ou égal à k , c'est dire que les deux $X(\omega)$, $Y(\omega)$ sont inférieurs ou égaux à k .
3. **D'où la formule : $\forall k \in Z(\Omega), (Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$.**
4. **Il s'ensuit que si F_X et F_Y sont les fonctions de répartitions des var X et Y , alors la fonction de répartition F_Z de Z est définie par :**
 $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = F_X(x)F_Y(x)$.
5. **On utilise la formule vue en première année : $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$.**
6. **Si l'énoncé impose une autre méthode, il faut le faire (par exemple utiliser la loi du couple).**

EXERCICE 9.4 ([Loi du max](#)).

On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 1$).

On note X la var égale au numéro de la première boule, Y la var égale au numéro de la deuxième boule tirée.

On pose $Z = \max(X, Y)$. Donner la loi de Z .

• **Point méthode pour déterminer la loi du minimum de var :** $T = \text{Min}(X, Y)$

Soit X et Y deux var discrètes. La var discrète : $T = \text{Min}(X, Y)$ est définie par :

$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \text{Min}(X(\omega), Y(\omega)).$

1. **Pour trouver la loi de T , on utilise la fonction d'anti-répartition, après avoir justifié par une phrase type l'égalité suivante :**
 $\forall k \in T(\Omega), (T > k) = (X > k) \cap (Y > k).$
2. **Cette phrase est la suivante :**
 $\forall k \in T(\Omega)$, pour chaque ω de Ω , dire que le plus petit des $T(\omega)$ est plus grand que k , c'est dire que les deux $X(\omega), Y(\omega)$ sont plus grands que k .
3. **D'où la formule :** $\forall k \in T(\Omega), (T > k) = (X > k) \cap (Y > k).$
4. **Il s'ensuit que si F_X et F_Y sont les fonctions de répartition des var X et Y , alors la fonction de répartition F_T de T est définie par :**
 $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - F_T(x) = (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$, soit $F_T(x) = F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x)F_Y(x).$
5. **On a :** $\forall k \in T(\Omega), P(T = k) = P(T \leq k) - P(T \leq k - 1) = (1 - P(T > k)) - (1 - P(T > k - 1)) = P(T > k - 1) - P(T > k).$
6. **Il est parfois plus pratique de montrer la relation :**
 $\forall k \in T(\Omega), (T \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k).$
7. **Si l'énoncé impose une autre méthode, il faut le faire (par exemple utiliser la loi du couple).**

EXERCICE 9.5 (Loi du min).

On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 1$).

On note X la var égale au numéro de la première boule, Y la var égale au numéro de la deuxième boule tirée.

On pose $T = \text{Min}(X, Y)$. Donner la loi de T .

Exemple 9.6.

On étudie des individus d'une population, et on s'intéresse à leur taille X et leur poids Y . Comment sont corrélées ces variables? En général, plus l'individu est grand, plus il pèse lourd, donc X et Y vont être fortement corrélées et positivement (une augmentation de l'un entraîne une augmentation de l'autre).

Si par contre, on étudie X' la longueur des cheveux et Y' le nombre de coupes chez le coiffeur par an, ces deux variables devraient être corrélées négativement (car plus les cheveux sont longs et moins on va chez le coiffeur!!).

9.5 Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises respectivement par X et Y .

Pour mesurer l'écart à l'indépendance de deux variables aléatoires ou autrement dit le degré de corrélation entre ces deux variables, on introduit la notion de covariance.

9.5.1 Définition et propriétés

Définition 9.5 (🔗 de la covariance).

Soit (X, Y) un couple de var discrètes, sous réserve d'existence,

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Ce coefficient peut être négatif ou positif; et il est nul lorsque les variables sont indépendantes.

EXERCICE 9.6.

On choisit au hasard une permutation f de l'ensemble $[[1, n]]$ avec $n \geq 2$.

(rappel : le nombre de permutation de $[[1, n]]$ est égal à $n!$).

$\forall i \in [[1, n]]$, on note B_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le nombre i est égal à son image par la permutation f choisie et qui vaut 0 sinon.

Montrer que $E(B_i) = 1/n$ et que $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, i \neq j, E(B_i B_j) = \frac{1}{n(n-1)}$.

En déduire $\text{Cov}(B_i, B_j)$.

Remarque.

Si X et Y sont des var discrètes finies, $\text{Cov}(X, Y)$ existe toujours! Sinon on a la condition suffisante suivante :

Théorème 9.15 (🔗 d'existence).

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors elles admettent une covariance.

Remarque.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{V}$ l'ensemble des var discrètes ayant un moment d'ordre 2 sur cet espace.

Alors $\mathcal{V}$ est un e.v et l'application définie de $\mathcal{V}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$(X, Y) \mapsto E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est appelée covariance de X et Y , notée $\text{Cov}(X, Y)$.

L'application définie dans $\mathcal{V}$ par $X \mapsto \text{Cov}(X, X)$ est appelé variance de X et on a :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

Théorème 9.16 (🔗 Formule de Huygens).

Si X et Y sont deux var réelles discrètes ayant des moments d'ordre 2, sur un même espace, alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Remarque.

c'est cette dernière formule qui est le plus souvent utilisée dans les exos.

Propriétés 9.17 ([🔗 Covariance](#)).

1. La covariance est symétrique : $\forall X, Y$ des var discrètes ayant un moment d'ordre 2, $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
2. $\forall X$ une var discrète ayant un moment d'ordre 2 $Cov(X, X) = V(X)$.
3. $\forall X$ une var discrète ayant un moment d'ordre 2, $Cov(X, X) \geq 0$. (ie $V(X) \geq 0$)
4. La covariance est linéaire à gauche et à droite :
 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2, Y$ des var discrètes ayant un moment d'ordre 2
 $Cov(aX_1 + X_2, Y) = aCov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$.
 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall Y_1, Y_2, X$ des var discrètes ayant un moment d'ordre 2
 $Cov(X, aY_1 + Y_2) = aCov(X, Y_1) + Cov(X, Y_2)$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall X$ une var discrète ayant un moment d'ordre 2, $Cov(X, a) = 0$.
6. $\forall A$ var quasi-certaine, $\forall X$ une var discrète ayant un moment d'ordre 2, $Cov(X, A) = 0$.

Théorème 9.18 ([🔗 Variance et covariance](#)).

Si X et Y sont deux var réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant des variances, alors d'une part la covariance de X et Y existe, d'autre part, $X + Y$ admet une variance et l'on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Propriétés 9.19 ([🔗 Variance](#)).

1. $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$.
2. $Cov(X + Y, X - Y) = V(X) - V(Y)$.
3. $V(X) = 0$ ssi X est presque sûrement constante.
4. La racine carrée de la variance est l'écart type de X : $\sqrt{V(X)} = \sigma(X)$.
5. $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
6. $|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.
7. $\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Remarque.

La covariance se comporte comme un produit, la variance comme un carré. Les deux premières propriétés et le théorème 9.18 évoquent les identités remarquables usuelles.

EXERCICE 9.7.

On reprend l'exo 9.6, calculer la variance de $B_i + B_j$.

EXERCICE 9.8.

On lance n fois une pièce donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$).

On note X la var égale au nombre de "piles" obtenus et Y la var égale au nombre de "faces" obtenus au cours de ces n lancers. Donner $Cov(X, Y)$.

9.5.2 Covariance des variables indépendantes

Théorème 9.20 (🔗 [var indépendantes et covariance](#)).

Si X et Y sont deux var réelles discrètes **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant un moment d'ordre 2, alors on a :

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.
3. $Cov(X, Y) = 0$

Attention, il n'y a pas de réciproque!

Exemple 9.7.

Soit X une var suivant une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et $Y = X^2$.

X^3 suit la même loi que X , donc $E(X^3) = 0$.

Alors $E(X) = 0$, $Cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0$.

Donc on vient de voir qu'une covariance peut être nulle sans que les var soient indépendantes.

EXERCICE 9.9.

On effectue deux tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant, dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note X et Y les numéros des deux boules tirées.

Déterminer $V(X + Y)$.

Remarque.

Le théorème précédent signifie que deux var discrètes indépendantes sont non corrélées.

9.6 Corrélation

Dans ce paragraphe, X et Y sont deux var réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et ayant des variances non nulles (ni X , ni Y ne sont des var certaines ou quasi-certaines).

Définition 9.6 (🔗 [coefficient de corrélation](#)).

On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y , le réel noté $\rho(X, Y)$ défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

EXERCICE 9.10.

On reprend l'exo 9.6, calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Théorème 9.21 (🔗 [encadrement du coefficient de corrélation](#)).

Pour tout couple de (X, Y) de var, on a : $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1 \Leftrightarrow |\rho(X, Y)| \leq 1$

Théorème 9.22 (var corrélées ou pas).

1. $\rho(X, Y) = \pm 1$ ssi les deux var X et Y sont presque sûrement liés par une relation du type : il existe deux réels a ($a \neq 0$) et b tels que $Y = aX + b$.

Ce qui est équivalent à dire :

$\rho(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, P(Y = aX + b) = 1$. On dit que X et Y sont corrélées linéairement.

2. Si a est positif, $\rho(X, Y) = 1$ et dans ce cas, Y varie dans le même sens que X .
3. Si a est négatif, $\rho(X, Y) = -1$ et dans ce cas, Y varie dans le sens contraire de X .
4. Si $|\rho(X, Y)| \neq 1$, X et Y sont dites non corrélées.

EXERCICE 9.11.

On reprend l'exo 9.8. Calculer $\rho(X, Y)$.

Remarques.

Il en résulte que deux var discrètes et indépendantes, ayant des moments d'ordre 2 sont non corrélées.

Un coefficient de corrélation nulle n'implique pas que les var soient indépendantes!! Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.

Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1 , plus la corrélation entre les variables est forte; on emploie simplement l'expression " fortement corrélées " pour qualifier les deux variables.

EXERCICE 9.12.

On reprend l'exo 9.9. Calculer $\rho(X, Y)$.

• Point méthode pour déterminer la variance, la covariance, le coefficient de corrélation de 2 var discrètes

Covariance par calcul direct : deux possibilités

1. Soit on calcule $E(XY)$ et ensuite on utilise la formule de Huygens :
 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. Soit on utilise les propriétés de linéarité à gauche et à droite de la covariance dans le cas où l'on cherche $Cov(X + Y, X - Y)$.

Covariance par calcul indirect : si variances connues

1. On utilise la formule : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$ qui donne
 $Cov(X, Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2}$.

Variance d'une somme

1. Soit on connaît la loi de la somme et on calcule la variance avec la formule de K-H.
2. Soit on ne connaît pas la loi de la somme mais on connaît la
 $Cov(X, Y)$: $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
3. Si les var sont indépendantes (cas le plus facile) : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Coefficient de corrélation

1. Si l'on connaît la $Cov(X, Y)$ et $V(X), V(Y)$ alors on utilise la définition 9.6.
2. Si X et Y sont indépendantes alors le coefficient de corrélation vaut 0.
3. Si X et Y sont liées linéairement : $Y = aX + b, a \neq 0$ alors le coefficient de corrélation vaut 1.

9.7 Suites de variables aléatoires discrètes

9.7.1 Lois conjointes-Lois marginales

Définition 9.7.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des var réelles discrètes, définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors le n -uplet $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelé vecteur aléatoire réel discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Ce vecteur prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définitions 9.8 (Loi conjointe-Loi marginale).

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle loi conjointe des var $X_1, X_2, \dots, X_n$ l'application de $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

Pour tout $k \in [1, n]$, l'application $x_k \mapsto P(X_k = x_k)$ est appelée loi marginale de X_k .

Théorème 9.23.

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et g une application de $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'application Z de Ω dans $\mathbb{R}$, définie pour tout élément ω de Ω par

$$Z(\omega) = g(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

est une var discrète elle aussi et notée $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Cas particuliers :

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel discret, alors $\sum_{i=1}^n X_i, \max(X_1, X_2, \dots, X_n), \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \prod_{i=1}^n X_i$ sont des var discrètes.

9.7.2 Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes

Définition 9.9.

Les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes si l'on a :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

9.7.3 Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes

Définition 9.10.

On dit qu'une suite de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de var mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}^*$, les var X_k ($k \in I$) sont mutuellement indépendantes.

Théorème 9.24 (Lemme des coalitions).

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute var, fonction de p d'entre elles ($p < n$), est indépendante de toute var fonction des $(n - p)$ autres.

Ou encore de façon équivalente :

Alors pour toutes fonctions f et g on a : $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 9.8.

Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 var discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.

• **Point méthode pour déterminer la loi du max n var**

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ var discrètes. La var discrète : $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est définie par $\forall \omega \in \Omega, S_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$

1. **Pour trouver la loi de S_n , on utilise la fonction de répartition, après avoir justifié par une phrase type l'égalité suivante :**

$$\forall k \in S_n(\Omega), (S_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k).$$

2. **Cette phrase est la suivante :**

$\forall k \in S_n(\Omega)$, pour chaque ω de Ω , dire que le plus grand des $S_n(\omega)$ est plus petit que k , c'est dire que les n $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ sont plus petits que k .

3. **D'où la formule :** $\forall k \in S_n(\Omega), (S_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k).$

4. **Il s'ensuit que comme les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont généralement mutuellement indépendantes,** $P(S_n \leq k) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k).$

5. **On a :** $\forall k \in S_n(\Omega), P(S_n = k) = P(S_n \leq k) - P(S_n \leq k-1).$

• **Point méthode pour déterminer la loi du min de n var**

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ var discrètes. $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est définie par :

$\forall \omega \in \Omega, I_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$

1. **Pour trouver la loi de I_n , on utilise la fonction d'anti-répartition, après avoir justifié par une phrase type l'égalité suivante :**

$$\forall k \in I_n(\Omega), (I_n > k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > k).$$

2. **Cette phrase est la suivante :**

$\forall k \in I_n(\Omega)$, pour chaque ω de Ω , dire que le plus petit des $I_n(\omega)$ est plus grand que k , c'est dire que les n $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ sont plus grands que k .

3. **D'où la formule :** $\forall k \in I_n(\Omega), (I_n > k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > k).$

4. **Il s'ensuit que comme les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont généralement mutuellement indépendantes,** $P(I_n > k) = \prod_{i=1}^n P(X_i > k).$

5. **On a :** $\forall k \in I_n(\Omega), P(I_n = k) = P(I_n \leq k) - P(I_n \leq k-1) = (1 - P(I_n > k)) - (1 - P(I_n > k-1)) = P(I_n > k-1) - P(I_n > k).$

EXERCICE 9.13 (Loi du max, loi du min suite de var).

On tire au hasard et successivement n boules ($n \geq 2$), avec remise après chaque tirage de la boule tirée, dans une urne contenant m boules numérotées de 1 à m (avec $m \geq 1$).

Pour tout entier naturel $i \in [1, n]$, on note X_i la var égale au numéro de la boule tirée au i -ème tirage. On pose $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Montrer que $\forall k \in [1, m]$, on a : $(S_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)$ et $(I_n > k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > k).$

En déduire la loi de S_n et I_n .

9.7.4 Espérance et variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes

Théorème 9.25 (Linéarité de l'espérance).

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des var définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant chacune une espérance, on a :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

Théorème 9.26 (Variance).

Si les var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et possèdent des variances, alors on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Remarque.

Le premier théorème est la linéarité de l'espérance, mais la variance elle n'est pas linéaire!! Le deuxième théorème ne s'applique que si les $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes!!

9.7.5 Stabilité des lois binomiales et de Poisson par l'addition

Théorème 9.27 (☞ somme de var de Bernoulli).

Une var binomiale peut toujours s'écrire comme somme de var de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p .

Si n var $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ alors $\sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Remarque.

En effet si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ on peut considérer que X est égale au nombre de succès obtenus au cours de n épreuves identiques et indépendantes, et si l'on note X_k la var qui vaut 1 si l'on a obtenu un succès au cours de la k ème épreuve et qui vaut 0 sinon, alors on a bien : $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Propriété 9.28 (☞ Stabilité de la loi binomiale par l'addition).

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si m var $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont mutuellement indépendantes et si, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n_j, p)$

alors $\sum_{j=1}^m X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^m n_j, p\right)$

Remarque.

Ce résultat se démontre par récurrence à l'aide de 9.11 mais il se comprend bien grâce au théorème 9.27, en constatant que pour tout j de $[1, m]$, X_j est la somme de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p , ce qui fait que, par indépendance des var $X_1, X_2, \dots, X_m$, la var $\sum_{i=1}^m X_i$ est la somme de $(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$ var de Bernoulli indépendantes de paramètre p , ce qui montre que

$$\sum_{j=1}^m X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^m n_j, p\right)$$

Propriété 9.29 (Stabilité de la loi de Poisson par l'addition).

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si m var $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont mutuellement indépendantes et si, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, X_j \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_j)$ alors

$$\sum_{j=1}^m X_j \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j\right)$$

Remarque.

Dans le cas général, pour trouver la loi de la somme de plus de 2 var, on essaie, par un changement de variable aléatoire, de se ramener au cas de var de Bernoulli, de Poisson, ou binomiales, ou bien on procède par récurrence.

• Point méthode pour déterminer la loi de la somme de n var

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ var discrètes. Pour trouver la loi de la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$: 3 possibilités

1. Soit c'est du cours, si var mutuellement indépendantes et suivants des lois binomiales ou de poisson et on utilise 9.28 et 9.29
2. Soit on se raccroche au cours par un changement de var voir exo ci-après 9.14
3. Soit dans de rares cas, on peut trouver un modèle concret adapté à la var $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et en déduire sa loi (exo ??) ou procéder par récurrence (exo 9.15).

EXERCICE 9.14.

Soit une suite de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes dont la loi commune est donnée,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = 1/3, P(X_n = 2) = 2/3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, donner la loi de S_n .

EXERCICE 9.15.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$).

1. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

En admettant la formule $\sum_{k=m_1}^{m_2} \binom{k}{m_1} = \binom{m_2+1}{m_1+1}$ avec $m_1 \leq m_2$, montrer par récurrence sur n

que la loi de S_n est donnée par : $\forall k \in \llbracket n, +\infty \llbracket, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

2. On se propose de retrouver directement la loi de S_n . On considère alors que, lors d'une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p , la var X_1 peut être considérée comme le rang d'apparition du premier succès et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, chaque var X_k peut être considérée comme le rang d'apparition du k^e succès à partir du $(k-1)^e$ succès.

Pour tout entier naturel k non nul, on désignera par N_k la var égale au nombre de succès obtenu lors des k premières épreuves.

- (a) Que représente alors la var S_n ?
- (b) Pour tout k de $S_n(\Omega)$, écrire l'événement $[S_n = k]$ à l'aide de la var N_{k-1} et de l'événement A_k : « on obtient un succès à la k^e épreuve ».
- (c) En déduire la loi de S_n .

Feuille d'exercices n°9

COUPLES DE VAR DISCRETES.

Exercice 1. Montrer que l'on a affaire à la loi d'un couple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que, si l'on note $p_{i,j} = \frac{2i}{en(n+1)j!}$ pour tout $i \in [0, n]$, tout $j \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble $\{(i, j, p_{i,j}) / (i, j) \in [0, n] \times \mathbb{N}\}$ définit la loi d'un couple.

Exercice 2. Trouver la loi conjointe d'un couple de var discrètes

1. On lance deux dés tétraédriques équilibrés et de façons indépendantes, un rouge et un bleu, numérotés de 1 à 4. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience et l'on considère : X_1 la var donnant le numéro de la face sur le sol du dé bleu ; X_2 la var donnant le numéro de la face sur le sol du dé rouge et Y la var donnant le plus grand de ces deux numéros. Déterminer le tableau de la loi conjointe du couple (X_1, Y) .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance n fois une pièce équilibrée. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience et l'on considère : L_1 la var désignant la longueur de la première série de résultats identiques et L_2 , la var désignant la longueur de la deuxième série de résultats identiques. Par exemple si pour $n = 8$, on obtient "Pile, Pile, Face, Face, Face, Pile, Face, Pile " alors $L_1 = 2, L_2 = 3$.
Pour tout couple $(i, j) \in L_1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, déterminer $p_{i,j} = P(L_1 = i, L_2 = j)$.
Vérifier que $\sum_{(i,j) \in L_1(\Omega) \times L_2(\Omega)} p_{i,j} = 1$
3. Une pièce de monnaie amène "Pile "avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On lance la pièce indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience. On note X_1 la var égale au rang d'apparition du premier " Pile" et X_2 la var qui donne le rang d'apparition du deuxième " Pile" .
Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) .
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Dans la station de ski des Gets en Haute Savoie, le nombre de skieurs arrivant " au Ranfoilly" pendant une heure suit la loi de Poisson de paramètre λ . Un skieur qui arrive au Ranfoilly, a le choix entre 5 remontées mécaniques et il en choisit une de façon aléatoire. Une seule de ces remontées permet de redescendre directement au parking du château. On note N le nombre de skieurs qui arrivent en une heure au Ranfoilly et X le nombre de skieurs utilisant la remontée mécanique d'accès direct au parking du château. On admet qu'il existe un espace

probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette situation et que les skieurs sont indépendants. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la var $X_{[N=n]}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (on convient que la var certaine égale à 0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(0, p)$).

Déterminer la loi du couple (N, X) .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{n})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Exercice 3. Trouver les lois marginales d'un couple de var discrètes

- On reprend l'exemple des dés tétraédriques. Déterminer la loi de Y .
- On reprend l'exemple de l'étude du choix des remontées mécaniques. Déterminer la loi de X .
- On reprend l'exemple de l'étude des rangs d'apparition du premier "Pile" et du second "Pile". Déterminer la loi de X_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n urnes numérotées de 1 à n . On suppose que l'urne U_i contient i boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à i . On choisit une urne au hasard, et l'on note N la var désignant le numéro de l'urne choisie. Puis, on prélève une boule au hasard dans cette urne et l'on note X la var désignant le numéro de cette boule. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience. Déterminer la loi de N puis celle de X .

Exercice 4. Trouver une loi conditionnelle

- Poursuivre l'étude des deux dés tétraédriques. Déterminer la loi de X_1 conditionnée par l'événement $[Y = 2]$.
- On reprend l'exemple de l'étude des rangs d'apparition du premier "Pile" et du second "Pile". Soit $n \in [2, +\infty[$, déterminer la loi de X_1 conditionnée par l'événement $[X_2 = n]$.

Exercice 5. Trouver la loi d'une somme de deux var discrètes

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note X_1 la var qui donne le nombre de tirs qui touchent la cible au premier coup et X_2 la var qui donne le nombre de tirs qui touchent la cible au deuxième coup. Quelle est la loi de la var $X_1 + X_2$?
- Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la loi de la var $G_1 + G_2$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes K et L suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda/5$ et $4\lambda/5$. Déterminer la loi de la var $K + L$.
4. On considère une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience. On note J_p la var qui donne le numéro du premier jeton tiré et J_s la var qui donne le numéro du deuxième jeton tiré. Déterminer la loi du couple (J_p, J_s) . En déduire la loi de la var $J_p + J_s$.

Exercice 6. Trouver la loi d'une fonction d'un couple de var discrètes

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les var $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$. Déterminer les lois des var I et S .
2. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit la var $D = G_1 - G_2$. Déterminer la loi de D .

Exercice 7. Déterminer l'espérance d'une var discrète

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les var $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$. Déterminer l'espérance de I et de S .
2. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les var $I = \min(G_1, G_2)$ et $\Delta = |G_1 - G_2|$. Déterminer l'espérance de Δ .
3. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère la var G_1 suivant la loi géométrique de paramètre p . Déterminer les valeurs du réel t pour lesquelles l'espérance de la var e^{tG_1} existe. Déterminer alors l'espérance de la var e^{tG_1} .
4. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Démontrer que pour tout réel $t < \ln(\frac{1}{q})$, la var $e^{t(G_1+G_2)}$ admet une espérance que l'on déterminera.
5. Dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n , on tire successivement et sans remise deux jetons au hasard. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience. On note J_1 la var qui donne le numéro du premier jeton tiré et J_2 la var qui donne le numéro du deuxième jeton tiré. On définit la var $A = \max(J_1, J_2)$. Déterminer $E(A)$.

Exercice 8. Déterminer la variance d'une var discrète

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit la var $I = \min(G_1, G_2)$, déterminer la variance de I .
2. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les var $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$. Montrer que la var $P = IS$ admet une variance que l'on déterminera.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note X_1 la var qui donne le nombre de tirs qui touchent la cible au premier coup et X_2 la var qui donne le nombre de tirs qui touchent la cible au deuxième coup. Déterminer la variance de la var $X_1 + X_2$.
4. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la variance des var $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$.
5. Soient U et V deux var de loi uniforme sur $[1, 5]$ définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $\text{cov}(U, V) = -1$. Déterminer la variance de la var $U + V$.

Exercice 9. Déterminer la covariance d'un couple de deux var discrètes

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les var $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$. Déterminer la covariance du couple de var (I, S) . En déduire la variance de la var S .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la var qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la var qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Déterminer la covariance $\text{cov}(A, B)$.
3. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la covariance $\text{cov}(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$.

Exercice 10. Déterminer si deux var discrètes sont indépendantes

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Dans la station de ski des Gets en Haute Savoie, le nombre de skieurs arrivant "au Ranfoilly" pendant une heure suit la loi de Poisson de paramètre λ . Un skieur qui arrive au Ranfoilly, a le choix entre 5 remontées mécaniques et il en choisit une de façon aléatoire. Une seule de ces remontées permet de redescendre directement au parking du château. On note N le nombre de skieurs qui arrivent en une heure au Ranfoilly et X le nombre de skieurs utilisant la remontée mécanique d'accès direct au parking du château. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette situation et que les skieurs sont indépendants. On note Y la var qui donne le nombre de skieurs qui ne choisissent pas la remontée du "château". Les var X et Y sont-elles indépendantes?
2. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux var indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Les var $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ sont-elles indépendantes?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la var qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la var qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Les var A et B sont-elles indépendantes?

Exercice 11. EML 2013

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 - (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
 - (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .

Exercice 12. EML 2011

Soit $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X . Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y .
4. (a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
- (b) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

Exercice 13. EML 2009

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z , la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

- (b) Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

- (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

- (b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

- (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.
4. Montrer que les variables aléatoires Y , Z et $X - 1$ sont égales.
5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice 14. EML 1998

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

- On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

- Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?
- Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante : pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement :

" les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ième}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ième}}$ est verte"

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB \dots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
 - Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
 - Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
- Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

- En déduire la loi de la variable aléatoire Y .
 - Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
- Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).
 - Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 15. ECRICOME 2010

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.

Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{\text{ème}}$ partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1 , E_2 et E_3 .
2. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1 .
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3 .
(b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3) .
On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
(c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3 .
6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.
En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n .
(b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

Exercice 16. ECRICOME 2004

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B .

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
 - (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
 - (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBAA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B , et le jour 6 le serveur A . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\dots$)

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

- (a) Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

- (b) Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

- (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1 .
- (d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2) .
- (e) En déduire la loi de L_2

Exercice 17. **ESCP 1996** On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires et r pour les rouges ($p + q + r = 1$)

On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1, 2, ... etc. Ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

Toutes les variables aléatoires sont définies dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 ; calculer son espérance et sa variance.
2. On note X_2 la variable aléatoire représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche.
 - (a) Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l) , la probabilité de l'événement $\{X_1 = k, X_2 = k + l\}$. En déduire la loi de probabilité de X_2 .
 - (b) Montrer que la variable $U_2 = X_2 - X_1$ est indépendante de X_1 et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance et la variance de X_2 .
3. On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple (k, l) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $\{W = l\}$ sachant que $X_1 = k$. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?
4. On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.
 - (a) Trouver la loi de probabilité du couple (X_1, Y_1) . Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes?
 - (b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1
5. Soit, pour n entier strictement positif, Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule blanche est tirée, -1 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule noire est tirée, 0 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule rouge est tirée. On note $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$
 - (a) Trouver la loi de probabilité de S_1 . Calculer son espérance et sa variance; en déduire l'espérance et la variance de S_n pour tout $n \geq 1$.
 - (b) Soit t un réel strictement positif. On pose $V_n = t^{S_n}$. Trouver la loi de probabilité de la variable V_1 et calculer son espérance.
 - (c) En déduire l'espérance de V_n .

Exercice 18. **ESCP 1997**

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B . On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a , et que la probabilité que la pièce B donne pile est b .

1. (a) Pour tout entier naturel n , calculer la probabilité μ_n , que la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)^{ième}$ expérience, face pour la première fois. Calculer de même la probabilité ν_n que la pièce B donne n piles et, à la $(n+1)^{ième}$ expérience, face pour la première fois.
 (b) Montrer que les suites $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ces lois seront notées dorénavant respectivement μ et ν .
2. On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement μ et ν . (La variable aléatoire X représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne face pour la première fois).
 (a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
 (b) Trouver, pour tout entier naturel k , la valeur de $P(X \geq k)$.
 (c) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
 Calculer, pour tout entier naturel k , la probabilité $\mathbf{P}(M \geq k)$. En déduire la loi de probabilité de M .
 (d) Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A , c'est-à-dire $\mathbf{P}(Y \geq X)$.
3. On note $U = X + Y$.
 (a) Déterminer la loi de probabilité de U . (On distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).
 (b) Calculer, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(Y = k / U = j)$.
4. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.
 (a) Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r , la probabilité de l'événement $(M = k \text{ et } V = r)$. (On distinguera le cas $r \geq 0$ et le cas $r < 0$).
 (b) Trouver la loi de probabilité de V . Les variables aléatoires M et V sont-elles indépendantes?