

Compléments sur les espaces vectoriels

Table des matières

1	Espaces vectoriels de dimension finie	2
1.1	Dimension d'un espace vectoriel	2
1.2	Familles de vecteurs en dimension finie	3
1.2.1	Familles libres	3
1.2.2	Familles génératrices	4
1.2.3	Bases	5
1.3	Sous-espaces vectoriels en dimension finie	5
1.4	Rang d'une famille de vecteurs	5
2	Somme de deux sous-espaces vectoriels	7
2.1	Définition	7
2.2	Somme directe	7
2.3	Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie	8
2.4	Sous-espaces supplémentaires	10

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.1 : Espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel. E est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.

Exemple 1. $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont de dimension finie.

Exemple 2. $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Définition 1.2 : Rappel : base d'un espace vectoriel

Une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est libre et génératrice. Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot f_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(f_1, \dots, f_p)$.

Théorème 1.3 : Extraction de base d'une famille génératrice finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice finie de E , alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de E .

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de la famille $\mathcal{F}$. □

Exemple 3. Déterminer une base de $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

Solution.

Corollaire 1.4 : Existence d'une base en dimension finie

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ admet une base.

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ possède même une infinité de bases.

Théorème 1.5 : Théorème de la dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Admis □

Définition 1.6 : Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le nombre de vecteurs commun à toutes les bases de E est appelé **dimension** de E , notée $\dim(E)$.

Par convention, la dimension de l'espace réduit à $\{0_E\}$ est 0.

Exemple 4. (Exemples de référence)

(i) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ possède n vecteurs :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

(ii) La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ possède np vecteurs :

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np.$$

(iii) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ vecteurs :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

(iv) $\mathbb{R}[X]$ ne possède pas de famille génératrice finie, $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exemple 5. Déterminer la dimension de $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

Solution.

Définition 1.7 : Droites, plans, hyperplans

Soit E un espace vectoriel.

- (i) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**.
- (ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.
- (iii) Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$ est appelé **hyperplan** de E .

Exemple 6. Si $E = \mathbb{R}_3[X]$, alors

- (i) $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$ est une droite vectorielle.
- (ii) $G = \text{Vect}(X^2 + 1, 2X - 1)$ est un plan vectoriel.
- (iii) $H = \text{Vect}(X^3 + 1, X^2, X - 2)$ est un hyperplan de E .

1.2 Familles de vecteurs en dimension finie**1.2.1 Familles libres****Théorème 1.8 : Théorème de la base incomplète**

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de E , alors $p \leq n$ et il existe des vecteurs $f_{p+1}, \dots, f_n$ tels que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ soit une base de E .

Démonstration. Admis □

Exemple 7. Compléter la famille $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X^2 + 1)$ pour former une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

Proposition 1.9 : *Cardinal d'une famille libre en dimension finie*

Si $\mathcal{L}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$\text{card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E).$$

De plus,

$$\text{card}(\mathcal{L}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1.8 de la base incomplète. $\square$

Corollaire 1.10 : *Famille de cardinal supérieur à la dimension*

Soit $\mathcal{F}$ est une famille d'un espace vectoriel E de dimension finie,

$$\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E) \Rightarrow \mathcal{F} \text{ est une famille liée de } E.$$

Démonstration. C'est la contraposée de la proposition précédente. $\square$

Exemple 8. Déterminer si la famille $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X^2 + 1, X - 1, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

Méthode 1.11 : *Famille libre de cardinal égal à la dimension*

La proposition 1.9 est très importante : en dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Exemple 9. Montrer que $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.

Une famille libre de p vecteurs engendre un espace de dimension p . En effet, elle est génératrice de son espace vectoriel engendré par définition, et libre, donc c'est une base de celui-ci.

Exemple 10. Comme (X, X^2) est libre, alors $\text{Vect}(X, X^2)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

1.2.2 Familles génératrices

Proposition 1.12 : *Cardinal d'une famille génératrice en dimension finie*

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$\text{card}(\mathcal{G}) \geq \dim(E).$$

De plus,

$$\text{card}(\mathcal{G}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. On a vu dans le théorème 1.3 qu'il existait une sous-famille de $\mathcal{G}$ qui est une base de E . $\square$

En dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour montrer que c'est une base.

En pratique, on utilise cependant très peu cette proposition : en effet, on a la même propriété avec les familles libres, et la liberté d'une famille est beaucoup plus facile à prouver.

1.2.3 Bases

Proposition 1.13 : *Caractérisation d'une base en dimension finie*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal n d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Alors :

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E.$$

Démonstration. C'est une application évidente des propositions 1.9 et 1.12. $\square$

1.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 1.14 : *Dimension d'un sous-espace vectoriel*

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F est de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus,

$$\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E.$$

Démonstration. Toute famille libre de F est également une famille libre de E . Ainsi, si $\mathcal{F}$ est une base de F (composée a fortiori de $\dim(F)$ vecteurs), c'est une famille libre de E et, par la proposition 1.9, elle est composée de moins de $\dim(E)$ vecteurs. D'où

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E par la proposition 1.9. D'où $E = \text{Vect}(\mathcal{F}) = F$. $\square$

Méthode 1.15 : *Egalité d'espaces vectoriels*

En dimension finie, nous utiliserons souvent cette proposition pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

Exemple 11. Montrer que $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$ sont égaux.

Solution.

1.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 1.16 : *Rang d'une famille*

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie d'un espace vectoriel E . On définit le **rang** de $\mathcal{F}$ par

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$$

Le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ correspond au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 12. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X - 1)$.

Solution.

Exemple 13. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X^2 + X)$.

Solution.

Propriété 1.17 : Rang d'une famille

Si $\mathcal{F}$ est une famille finie d'un espace vectoriel E , alors

- (i) $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille libre.
- (ii) $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .
- (iii) $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une base de E .

Démonstration. (i) D'après la proposition 1.12,

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } \text{Vect}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une famille libre.}$$

(ii) Comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E , d'après la proposition 1.14,

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(E) \Leftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{F}) = E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } E.$$

(iii) C'est la combinaison de (i) et (ii). □

Exemple 14. Si f_1 et f_2 sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\text{rg}(f_1, f_2) = 2$.

On a vu dans le chapitre Espaces vectoriels qu'une opération élémentaire sur la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ ne change pas l'espace vectoriel engendré $\text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$. On reprend la proposition vue dans le chapitre Espaces vectoriels :

Proposition 1.18 : Règles de calcul

Soit $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})$ une famille de vecteurs de E .

- (i) $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \leq \text{rg}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})$
- (ii) Si f_{p+1} est une combinaison linéaire des p autres vecteurs, i.e. $f_{p+1} \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = \text{rg}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1})$$

(iii) On peut échanger deux vecteurs

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_p) = \text{rg}(f_1, \dots, f_j, \dots, f_i, \dots, f_p)$$

(iv) Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = \text{rg}(f_1, \dots, \lambda \cdot f_p)$$

(v) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$, alors

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = \text{rg}\left(f_1, \dots, f_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \cdot f_k\right)$$

Pour déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, on détermine une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ en effectuant des opérations élémentaires sur la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 15. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

Solution.

2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1 : Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme** de F et G l'ensemble, noté $F + G$, défini par

$$F + G = \{x + y \text{ avec } x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On a toujours : $F + G = G + F$, $F + E = E$ et $F + \{0_E\} = F$.

Exemple 16. Si $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_3 = 0 \right\}$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F + G \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Cependant on n'a pas l'unicité de l'écriture puisque

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Théorème 2.2 : Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. À faire en exercice. □

$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G .

2.2 Somme directe

Définition 2.3 : Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Lorsque la somme $F + G$ est directe, elle est notée $F \oplus G$.

Exemple 17. Soient $F = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ et $G = \text{Vect}(X^3)$. On a

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \quad \text{et} \quad F + G = \mathbb{R}_3[X] \quad \text{donc} \quad F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].$$

Exemple 18. Soient $F = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ et $G = \text{Vect}(X^2, X^3)$. On a $F + G = \mathbb{R}_3[X]$, mais $F \cap G = \text{Vect}(X^2) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Par conséquent, F et G ne sont pas en somme directe.

Théorème 2.4 : *Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \Leftrightarrow \forall z \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, z = x + y.$$

En situation de somme directe, tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Démonstration. $\Rightarrow$ On suppose que F et G sont en somme directe, donc $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $z \in F + G$, on considère deux décompositions de z en somme de deux vecteurs de F et G :

$$z = x + y = x' + y'.$$

Alors $x - x' = y' - y$. Or $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$, d'où $x - x' = y' - y = 0_E$ et on a bien unicité de la décomposition.

$\Leftarrow$ On suppose que la décomposition de chaque élément de $F + G$ est unique. On considère $z \in F \cap G$, on a alors

$$z = 0_E + z = z + 0_E$$

et, par unicité de la décomposition de z en somme de vecteurs de F et G , on obtient bien $z = 0_E$. D'où,

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

□

Exemple 19. Soient $F = \text{Vect}(X^2 + 1, X)$ et $G = \text{Vect}(-X^2 + 2, X - 1)$. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe.

Solution.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 2.5 : *Concaténation de bases de sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$. Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une famille génératrice de $F + G$

Démonstration. Si $z \in F + G$ alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$. Comme $x \in F$ (resp. $y \in G$), il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) des réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^q \mu_j v_j.$$

Ainsi

$$z = x + y = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^q \mu_j v_j$$

donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $F + G$.

□

La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ obtenue par juxtaposition des bases de F et de G n'est, en général, pas une base de $F + G$.

Exemple 20. Soient $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(X, X^2)$, on a $F + G = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Remarque 2.6 : Concaténation de familles libres

La concaténation de deux familles libres de F et de G ne donne pas forcément une famille libre de $F + G$. Il suffit par exemple de considérer le cas où ces deux familles ont un vecteur commun.

Théorème 2.7 : Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$. On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$.

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de $F \oplus G$.

- D'après la proposition 2.5, $\mathcal{B}$ est génératrice de $F \oplus G$.
- Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^q \mu_j v_j = 0_E$ alors comme F et G sont en somme directe

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i}_{\in F} = - \underbrace{\sum_{j=1}^q \mu_j v_j}_{\in G} \in F \cap G = \{0_E\}.$$

D'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$, car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont libres. D'où $\mathcal{B}$ est libre.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G$. Montrons alors que

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

$\Rightarrow$ On suppose que $F \oplus G = E$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G = E$.

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de E . Comme $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G$, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(E)$. D'après la proposition 1.14, comme $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E , alors $F \oplus G = E$. $\square$

Exemple 21. Soient $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(X^2)$. On a $F \oplus G = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 2.8 : Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 2.7. $\square$

Théorème 2.9 : Formule de Grassmann (hors programme)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

La formule de Grassmann est le pendant, pour la dimension des sous-espaces vectoriels, de la formule du cardinal d'une union (formule du crible).

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante : on considère une base de $F \cap G$. Avec le théorème 1.8 de la base incomplète, on complète cette base d'une part en une base de F , d'autre part en une base de G . On montre que lorsqu'on réunit tous ces vecteurs (en ne comptant qu'une fois ceux de $F \cap G$, d'où le « moins »), on obtient une base de $F + G$. $\square$

Exemple 22. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $\dim(F) = 4$, $\dim(G) = 5$ et $\dim(E) = 7$. Trouver les dimensions possibles de $F \cap G$.

Solution.

Exemple 23. Soient $E = \mathbb{R}^3$, P_1 et P_2 deux plans vectoriels distincts. Montrer que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ et que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

Solution.

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.10 : Sous-espace supplémentaire

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires dans E** si

$$F \oplus G = E.$$

Par les résultats précédents, deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$, ou encore, si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme de deux vecteurs de F et G .

Exemple 24. Soit $F = \text{Vect}(X)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$. Ce supplémentaire est-il unique ?

Solution.

Théorème 2.11 : Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F possède un sous-espace supplémentaire dans E .

Ce supplémentaire est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration. Il suffit de considérer une base $\mathcal{F}$ de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E . Les vecteurs ajoutés à $\mathcal{F}$ pour former $\mathcal{B}$ engendrent alors un supplémentaire de F dans E . $\square$

Proposition 2.12 : Caractérisation du supplémentaire en dimension finie

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

Démonstration. À faire en exercice en utilisant la formule de Grassmann. $\square$

D'après le théorème 2.7, deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de n'importe quelle base de F et de n'importe quelle base de G donne une base de E .

Exemple 25. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et P un plan vectoriel. Montrer que toute droite vectorielle qui n'est pas incluse dans P est un supplémentaire de P .

Solution.

Annexe : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, a et b deux réels. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** de paramètres (a, b) si

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Lemme 2.13 : *Structure d'espace vectoriel pour les solutions de $(*)$*

L'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Il est simple de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites réelles. Montrons que E est de dimension 2.

Considérons les deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par la relation $(*)$ et $v_0 = 1, v_1 = 0$ pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w_0 = 0, w_1 = 1$ pour $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Grâce au principe de récurrence, on vérifie que ces deux suites sont bien définies.

(i) La famille $((v_n), (w_n))$ est libre : soient λ, μ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda v_n + \mu w_n = 0.$$

En utilisant cette relation pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient immédiatement $\lambda = \mu = 0$.

(ii) La famille $((v_n), (w_n))$ est génératrice de E : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = u_0 v_n + u_1 w_n.$$

On a $z_0 = u_0$ et $z_1 = u_1$. Par récurrence double, en utilisant la relation $(*)$ vérifiée à la fois par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = u_n.$$

Ce qui montre que tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La famille $((v_n), (w_n))$ est donc une base de E : E est un espace vectoriel de dimension 2. $\square$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle de paramètres (a, b) . Son **équation caractéristique** est définie comme étant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(**) : x^2 - ax - b = 0.$$

Proposition 2.14 : *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2*

(i) Si $(**)$ possède deux solutions réelles x_1 et x_2 , alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

(ii) Si $(**)$ possède une unique solution réelle $x_0 = \frac{a}{2}$, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) x_0^n.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.13, l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour déterminer l'ensemble E , on cherche donc deux suites solutions formant une famille libre.

- (i) Si $(**)$ possède deux solutions réelles x_1 et x_2 , montrons que les deux suites $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans E .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, x_1^{n+2} &= x_1^n x_1^2 \\ &= x_1^n (a x_1 + b) \text{ car } x_1 \text{ est solution de } (**), \\ &= a x_1^{n+1} + b x_1^n \end{aligned}$$

$(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation $(*)$ et est donc dans E . De même, $(x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans E .

Montrons que $((x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille libre. Soient λ, μ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda x_1^n + \mu x_2^n = 0.$$

En utilisant cette relation pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient immédiatement $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $((x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille libre de cardinal 2 de E et E est un espace vectoriel de dimension 2. Par conséquent, $((x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de E .

- (ii) Si $(**)$ possède une unique solution réelle x_0 , de même que précédemment on montre que $((x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille libre de E , espace vectoriel de dimension 2 et donc une base de E .

En effet, pour montrer que $(n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E on effectue

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (n+2) x_0^{n+2} - (a(n+1) x_0^{n+1} + b n x_0^n) &= n x_0^n (x_0^2 - a x_0 - b) + 2 x_0^{n+2} - a x_0^{n+1} \\ &= 2 x_0^{n+2} - a x_0^{n+1} \text{ car } x_0 \text{ est solution de } (**), \\ &= x_0^{n+1} (2 x_0 - a) \\ &= 0 \quad \text{car } x_0 = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

□