

## Complément sur les suites - L'essentiel du cours

### a) Limites de suite

- Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.
- Pour les suites définies par  $U_n = f(n)$  : si  $f$  admet une limite en  $+\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $V_n \leq U_n \leq W_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$  ( $l$  réel) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ .

### b) Limite de $q^n$ avec $q > 0$

- si  $0 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

► *Exemples :*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1, 15)^n = +\infty$  car  $1, 15 > 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$  car  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

### c) Suites arithmétiques

- On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre  $r$  appelé raison de la suite.
- Pour tout  $n$  :  $U_{n+1} = U_n + r$  ;  $U_n = U_0 + nr$  ;  $U_n = U_p + (n - p)r$
  - Si pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = \text{constante}$  alors  $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
  - $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
  - Si la raison  $r$  est positive, la suite est croissante.
  - Si la raison  $r$  est négative, la suite est décroissante.

► *Exemple :*

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de 1er terme  $U_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$  ;  $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$   
 Pour tout  $n$ ,  $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$ .  $U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{2 + 32}{2} = 187$ .  
 La suite est strictement croissante car  $r > 0$ .

### d) Suites géométriques

- On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$  appelé raison de la suite.
- Pour tout  $n$  :  $U_{n+1} = q \times U_n$  ;  $U_n = q^n \times U_0$  ;  $U_n = q^{n-p} \times U_p$
  - Si pour tout  $n$ ,  $U_n \neq 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$  alors  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison égale à la constante.
  - $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$  (pour  $q \neq 1$ )
  - Si le premier terme est positif et si  $q > 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est croissante.
  - Si le premier terme est positif et si  $0 < q < 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est décroissante.

► *Exemple :*

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de 1er terme  $U_0 = 5$  et de raison  $q = 2$ .  
 $U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$  ;  $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$   
 Pour tout  $n$ ,  $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$ .  $U_0 + U_1 + \dots + U_8 = 5 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555$ .  
 La suite  $(U_n)$  est croissante car  $U_0 > 0$  et  $q > 1$ .

### e) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :* Soit  $(U_n)$ , la suite définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 0,6U_n + 2$ .

a) *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.*

On trace d'abord la droite  $D$  d'équation  $y = 0,6x + 2$  et la droite d'équation  $y = x$ .

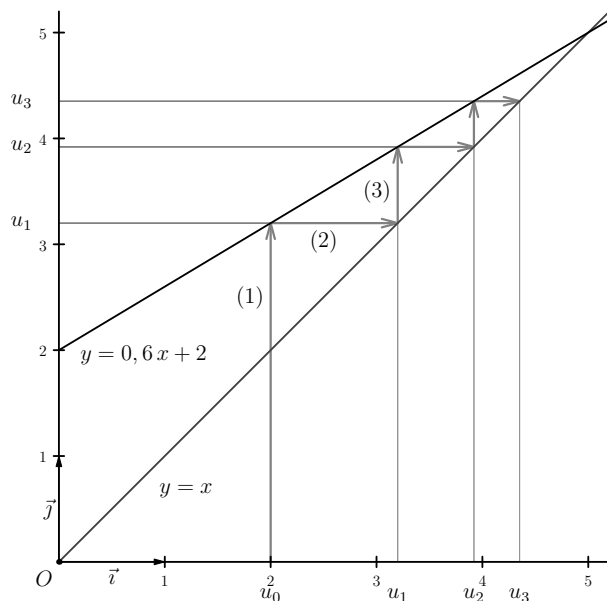
On part de  $U_0$  en abscisse : l'ordonnée du point de la droite  $D$  correspondant à cette abscisse nous donne  $U_1$  [(1) *sur le graphique*].

Pour déterminer  $U_2 = f(U_1)$ , il nous faut rabattre  $U_1$  sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation  $y = x$ .

© Dès lors,  $U_2$  est l'ordonnée du point de la droite  $D$  d'abscisse  $U_1$  [(3) *sur le graphique*].

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant  $U_2$  sur l'axe des abscisses...

Pascal Brachet - www.xmlmath.net - Licence CC BY NC SA - Utilisation commerciale interdite



b) Montrer que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - 5$  est géométrique.

**Méthode générale :**

- on calcule  $\frac{V_{n+1}}{V_n}$  en exprimant  $V_n$  et  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  et de  $U_{n+1}$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5}$$

- on remplace alors  $U_{n+1}$  par ce qu'indique la définition de la suite  $(U_n)$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5}$$

- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant  $U_n$  :

$$\begin{aligned} \frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n - 3}{U_n - 5} = \frac{0,6\left(U_n - \frac{3}{0,6}\right)}{U_n - 5} \\ &= \frac{0,6(U_n - 5)}{U_n - 5} = 0,6 \end{aligned}$$

Pour tout  $n$ , on a  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 0,6$ . Cela prouve bien que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,6$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$ .

c) En déduire l'expression de  $V_n$ , puis de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

Pour tout  $n$ ,  $V_n = q^n \times V_0 = -3(0,6)^n$ .

$$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3(0,6)^n + 5$$

d) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{-3(0,6)^n}_{\rightarrow 0} + 5 = 5 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6)^n = 0 \text{ car } 0 < 0,6 < 1 \right).$$

e) Étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n, U_{n+1} - U_n &= -3(0,6)^{n+1} + 5 - [-3(0,6)^n + 5] = \\ &= -3(0,6)^{n+1} + 3(0,6)^n \\ &= 3(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3(0,6)^n \times 0,4 = 1,2(0,6)^n. \end{aligned}$$

Le résultat étant positif pour tout  $n$ , on en déduit que  $(U_n)$  est croissante.

f) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $U_n > 4,997$ .

$$\begin{aligned} U_n > 4,997 &\Leftrightarrow -3(0,6)^n + 5 > 4,997 \Leftrightarrow -3(0,6)^n > -0,003 \Leftrightarrow 0,6^n < 0,001 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,6^n) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n \ln(0,6) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \quad (\text{car} \end{aligned}$$

$\ln(0,6) < 0$ ).

Or,  $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \approx 13,5$ . Le plus petit entier qui convient est donc 14.

g) Calculer  $V_0 + V_1 + \dots + V_9$  et en déduire  $U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .

$(V_n)$  est géométrique.

$$\text{Donc, } V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{1 - 0,6} = -3 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45.$$

Pour tout  $n$ ,  $U_n = V_n + 5$ . Donc,  $U_0 + U_1 + \dots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \dots + V_9 + 5 = V_0 + V_1 + \dots + V_9 + 50 \approx 42,55$ .

h) Déterminer l'expression de  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .

$$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \dots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \dots + V_n + 5(n+1).$$

Or  $(V_n)$  est géométrique.

$$\text{Donc, } V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{1 - (0,6)^{n+1}}{1 - 0,6} = -3 \times \frac{1 - (0,6)^{n+1}}{0,4}$$

$$= -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right).$$

D'où,  $S_n = -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right) + 5(n+1)$ .

## Complément sur les suites

### ► Exercice n°1

Déterminer les limites suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,7)^n$              | b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n$                         |
| c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times (0,6)^n$     | d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times (1,7)^n$                |
| e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + 5 \times (1,8)^n$ | f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 - 2 \times (0,75)^n$           |
| g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n}$              | h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2$ |

### ► Exercice n°2

On place un capital  $U_0 = 8000$  euros à 3 % par an avec **intérêts simples** (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3 % du capital **initial**).

On note  $U_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite  $(U_n)$ .
3. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

### ► Exercice n°3

On place un capital  $U_0 = 8000$  euros à 3 % par an avec **intérêts composés** (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3 % du capital de **l'année précédente**).

On note  $U_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite  $(U_n)$ .
3. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé ?

### ► Exercice n°4

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 5$  et de raison  $q = 3$ .

1. Calculer  $U_2$  et  $U_5$ .
2. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .

4. Calculer  $U_0 + U_1 + \dots + U_8$

### ► Exercice n°5

On dispose d'un échantillon d'os fossiles contenant initialement  $M_0 = 10$  grammes de carbone 14. On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de 1,2% par siècle et on note  $M_n$  la masse en grammes de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de  $n$  siècles.

1. Justifier que  $(M_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer  $M_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

### ► Exercice n°6

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).

On note  $U_0$  la masse initiale de l'élément radioactif et  $U_n$  sa masse au bout de  $n$  périodes de désintégration.

1. Justifier que la suite  $(U_n)$  est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium.  
On note  $U_0 = 5$  et  $U_n$  la masse de l'échantillon au bout de  $n$  périodes de désintégration.
  - a) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.
  - c) Au bout de combien d'années la masse de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 5 milligramme ?

### ► Exercice n°7

Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.

On note  $I_0 = 50$  et  $I_n$  l'intensité du rayon lumineux après le passage de  $n$  plaques.

1. Justifier que la suite  $(I_n)$  est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.
4. On cherche à déterminer le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd.

a) **Méthode 1 : avec un script python.**

Compléter la 3<sup>e</sup> ligne du script ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
n=0
I=50
while ..... :
    I=0.8*I
    n=n+1
print(n)
```

b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation.**

Déterminer, par le calcul, le plus entier  $n$  tel que  $I_n \leq 1$ .

► **Exercice n°8**

On tire  $n$  fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes et on note  $X$  le nombre d'as obtenus.

- Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- On note  $p_n$  la probabilité de n'obtenir aucun as lors de ce tirage de  $n$  cartes.
  - Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  - Quelle est la nature de la suite  $(p_n)$ ?
  - Déterminer le sens de variation et la limite de la suite  $(p_n)$ .
- On note  $q_n$  la probabilité d'obtenir au moins un as lors de ce tirage de  $n$  cartes.
  - Exprimer  $q_n$  en fonction de  $n$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(q_n)$ .
  - Déterminer le nombre minimum  $n$  de cartes qu'il faut tirer afin que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 0,99.

► **Exercice n°9**

Dans la feuille de calcul ci-dessous, on cherche à déterminer dans la colonne B les premiers termes de la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 10$  et  $U_{n+1} = 2U_n - 5$ .

	A	B
1	n	Un
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	

- Quelle valeur faut-il entrer dans la cellule B2?
- Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3 pour qu'en la recopiant ensuite vers le bas on obtienne automatiquement les premiers termes de la suite  $(U_n)$ ?

► **Exercice n°10**

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang  $n$  d'une suite  $(U_n)$  définie de façon récurrente.

```
U=25
n=int(input("n? "))
for i in range(1,n+1):
    U=0.9*U+2
print(U)
```

- Exprimer  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  et donner la valeur de  $U_0$ .
- Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .
- On considère la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - 20$ .
  - Calculer  $V_0, V_1$  et  $V_2$ .
  - Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
  - En déduire  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $U_{10}$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .
- Calculer  $V_0 + V_1 + \dots + V_9$ . En déduire  $U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .

► **Exercice n°11**

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.

Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2% par semaine et pour compenser cette évaporation, on ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau.

On note  $U_0 = 280$ , le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium et, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $U_n$  le volume d'eau dans l'aquarium, en litres,  $n$  semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

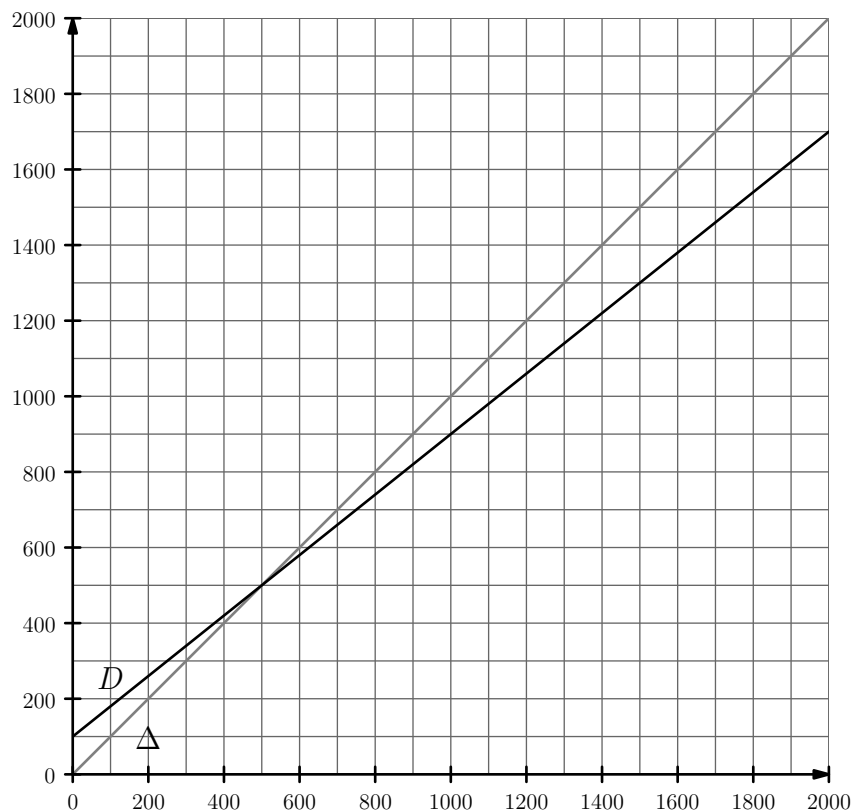
- Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,98U_n + 5$ .
- On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $V_n = U_n - 250$ .
  - Justifier que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme  $V_0$ .
  - En déduire  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau. Justifier que cette préconisation est respectée.

© Pascal Brachet - www.xmlmath.net - Licence CC BY NC SA - Utilisation commerciale interdite

► **Exercice n°12**

Le 1er janvier 2020, une entreprise compte  $U_0 = 2000$  employés. À partir de l'année 2020, 20% de l'effectif partira à la retraite chaque année et l'entreprise embauchera 100 jeunes par an pour compenser ces départs. On note  $U_n$  le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année  $(2020 + n)$ .

1. Expliquer pourquoi on a pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 100$ .
2. Sur le graphique ci-dessous figurent la droite  $D$  d'équation  $y = 0,8x + 100$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .



Construire sur le graphique  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$ .

3. Déterminer le réel  $a$  tel que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - a$  soit une suite géométrique de raison  $0,8$ .
4. Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
5. Quel sera le nombre d'employés le 1er janvier 2025 ?
6. Calculer  $U_{n+1} - U_n$  et montrer que, pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = -300 \times 0,8^n$ .

7. En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .
8. Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .
9. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'employés sera inférieur à 600.

► **Exercice n°13**

Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note  $P_0 = 500\ 000$  la population initiale,  $P_1 = 700\ 000$  la population au bout de un an et  $P_n$  la population au bout de  $n$  années. On a donc, pour tout  $n$ ,  $P_{n+2} - P_{n+1} = 0,5(P_{n+1} - P_n)$ .

1. Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .
2. On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies par :  
 $U_n = P_{n+1} - P_n$  et  $V_n = P_{n+1} - 0,5P_n$ .
  - a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Montrer que  $(V_n)$  est une suite constante. En déduire la valeur de  $V_n$ , pour tout  $n$ .
  - c) Montrer que  $2(V_n - U_n) = P_n$  et exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ .
  - d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ .

► **Exercice n°14**

Un emprunteur contracte auprès d'une banque un prêt d'un montant de 120 000 euros au taux annuel de 1 %. On note :

- $U_0 = 120\ 000$ , le capital emprunté ;
- $A$ , l'annuité que doit rembourser chaque année l'emprunteur (qui dépend de la durée de remboursement et que l'on va chercher à déterminer) ;
- $U_n$ , le capital qui reste à rembourser au bout de  $n$  années.

Quand on emprunte au taux de 1 %, la banque considère qu'elle doit recevoir, en plus de l'annuité de remboursement, des intérêts annuels égaux à 1 % de la somme qui reste à rembourser. Ces intérêts s'ajoutent au capital que doit rembourser l'emprunteur.

On a ainsi, pour tout entier positif  $n$ ,  $U_{n+1} = U_n - A + \frac{1}{100}U_n$ .

La suite  $(U_n)$  est donc définie par  $U_0 = 120\ 000$  et  $U_{n+1} = 1,01U_n - A$ .

1. Justifier que  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - 100A$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme  $V_0$ .
2. En déduire  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$  et de  $A$ .
3. Déterminer  $A$  pour que le prêt soit remboursé en 15 ans, c'est à dire que  $U_{15} = 0$ .  
 En déduire les mensualités que doit payer l'emprunteur à sa banque.

## Complément sur les suites

### ► Exercice n°1

- a)  $+\infty$  car  $1,7 > 1$   
 b)  $0$  car  $0 < 0,85 < 1$   
 c)  $0 < 0,6 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times (0,6)^n = 0$   
 d)  $1,7 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \times (1,7)^n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times (1,7)^n = -\infty$   
 e)  $1,8 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,8)^n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times (1,8)^n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + 5 \times (1,8)^n = +\infty$   
 f)  $0 < 0,75 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \times (0,75)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 - 2 \times (0,75)^n = 10$   
 g)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n = -\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0$   
 h)  $0 < \frac{3}{4} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2 = +\infty$

### ► Exercice n°2

- $\frac{3}{100} \times 8000 = 240$
- $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r = 240$ .
- $U_n = U_0 + nr = 8000 + 240n$ .
- $U_{15} = 8000 + 240 \times 15 = 11600$

### ► Exercice n°3

- capital d'une année = capital de l'année précédente + intérêts.  
On a donc  $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{100} \times U_n = \left(1 + \frac{3}{100}\right) U_n = 1,03U_n$
- $(U_n)$  est géométrique de raison  $q = 1,03$ .
- $U_n = q^n \times U_0 = 1,03^n \times 8000$ .
- $U_8 = 1,03^8 \times 8000 = 10134,2$
- Cela revient à déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $U_n \geq 16000 \Leftrightarrow 1,03^n \geq 2$   
 $\Leftrightarrow \ln(1,03^n) \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(1,03)}_+ \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1,03)} \approx 23,5$   
 Le plus petit entier qui convient est  $n = 24$ . Il faut attendre 24 ans.

### ► Exercice n°4

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 5$  et de raison  $q = 3$ .

- $U_2 = q^2 \times U_0 = 45$ ;  $U_5 = q^5 \times U_0 = 1215$ .
- $U_n = q^n \times U_0 = 3^n \times 5$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  car  $3 > 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- $U_0 + U_1 + \dots + U_8 = U_0 \times \frac{1 - q^9}{1 - q} = 49205$

### ► Exercice n°5

- Diminuer de 1,2% revient à multiplier par  $1 - \frac{1,2}{100} = 0,988$ . On passe donc d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,988.  $(M_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,988$ .
- $M_n = q^n \times M_0 = 0,988^n \times 10$ .
- Recherche du plus petit entier  $n$  tel que  $M_n \leq 5$  :  $0,988^n \times 10 \leq 5 \Leftrightarrow 0,988^n \leq 0,5 \Leftrightarrow \ln(0,988^n) \leq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0,988)}_- \leq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,988)}$ .  
Il faudra attendre 58 siècles.

### ► Exercice n°6

- On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,5.  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,5$ .
- a)  $U_n = q^n \times U_0 = 0,5^n \times 5$ .  
b) 10500 ans correspond à 7 périodes de désintégration et  $U_7 = 0,5^7 \times 5 \approx 0,04$   
c)  $0,5^n \times 5 \leq 0,005 \Leftrightarrow 0,5^n \leq 0,001 \Leftrightarrow \ln(0,5^n) \leq \ln(0,001)$   
 $\Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0,5)}_- \leq \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5)}$ . Le plus petit entier qui convient est 7 et 7 périodes correspondent à 10500 ans.

### ► Exercice n°7

- Diminuer de 20% revient à multiplier par  $1 - \frac{20}{100} = 0,8$ .  $(I_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,8$ .
- $I_n = q^n \times U_0 = 0,8^n \times 50$ .
- $I_4 = 0,8^4 \times 50 = 20,48$

4. a) **Méthode 1 : avec un script python.**

```
n=0
I=50
while I>1 :
    I=0.8*I
    n=n+1
print(n)
```

b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation.**

$$0,8^n \times 50 \leq 1 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,02 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,02)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n \ln(0,8)} \leq \ln(0,02) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,8)}$$

Le plus petit entier qui convient est 18.

► **Exercice n°8**

1. On répète  $n$  fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « As » ( $p = \frac{1}{8}$ ), « pas As » ( $1 - p = \frac{7}{8}$ ).  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{1}{8}$ .

2. a)  $p_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$ .

b) Pour tout  $n$ ,  $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{\left(\frac{7}{8}\right)^n} = \frac{7}{8}$ .

$(p_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{7}{8}$ .

c)  $p_0 > 0$  et  $0 < \frac{7}{8} < 1$  donc  $(p_n)$  est décroissante.  
 $0 < \frac{7}{8} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$

3. a) « obtenir au moins un as » est le contraire de « n'obtenir aucun as ».

$$q_n = 1 - p_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - p_n = 1$ .

c) On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n < 0,01$   
 $\Leftrightarrow \ln \left[ \left(\frac{7}{8}\right)^n \right] < \ln(0,01) \Leftrightarrow \underbrace{n \ln \left(\frac{7}{8}\right)} < \ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \approx 34,5$ .

Il faut tirer au moins 35 cartes.

► **Exercice n°9**

1. 10

2. 2\*B2-5 ou 2\*\$B2-5

► **Exercice n°10**

1.  $U_{n+1} = 0,9U_n + 2$ ;  $U_0 = 25$ .

2.  $U_1 = 0,9U_0 + 2 = 24,5$ ;  $U_2 = 0,9U_1 + 2 = 24,05$ .

3. a)  $V_0 = U_0 - 20 = 5$ ;  $V_1 = U_1 - 20 = 4,5$ ;  $V_2 = U_2 - 20 = 4,05$ .

b) Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 20}{U_n - 20} = \frac{0,9U_n + 2 - 20}{U_n - 20} = \frac{0,9U_n - 18}{U_n - 20}$   
 $= \frac{0,9(U_n - 20)}{U_n - 20} = 0,9$ . Donc  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,9$ .

c)  $V_n = q^n \times V_0 = 0,9^n \times 5$ .

$V_n = U_n - 20$  donc  $U_n = V_n + 20 = 0,9^n \times 5 + 20$ .

4.  $U_{10} = 0,9^{10} \times 5 + 20 \approx 21,743$ .

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$  car  $0 < 0,9 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n \times 5 = 0$ . On en déduit que  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 20$

6.  $V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \times \frac{1 - 0,9^{10}}{1 - 0,9} \approx 32,57$ .

$U_0 + U_1 + \dots + U_9 = V_0 + 20 + V_1 + 20 + \dots + V_9 + 20 = V_0 + V_1 + \dots + V_9 + 10 \times 20 \approx 232,57$

► **Exercice n°11**

1. Diminuer de 2% revient à multiplier par 0,98 et on ajoute les 5 litres d'eau.

2. a) Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 250}{U_n - 250} = \frac{0,98U_n + 5 - 250}{U_n - 250}$   
 $= \frac{0,98U_n - 245}{U_n - 250} = \frac{0,98(U_n - 250)}{U_n - 250} = 0,98$ . Donc  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,98$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 250 = 30$ .

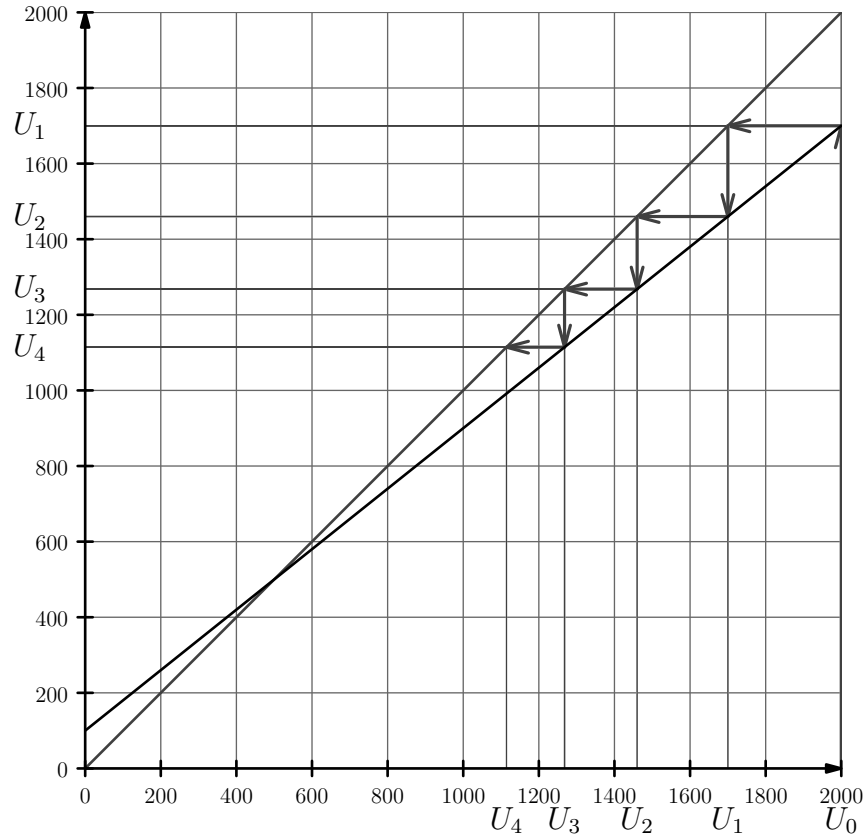
b)  $V_n = q^n \times V_0 = 0,98^n \times 30$ .

$V_n = U_n - 250$  donc  $U_n = V_n + 250 = 0,98^n \times 30 + 250$ .

3. Pour tout  $n$ ,  $0,98^n \times 30 > 0$  et donc  $U_n > 250$ . La préconisation est respectée.

► **Exercice n°12**

1. Diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8 et on ajoute les 100 embauches.
- 2.



3.  $(V_n)$  géométrique de raison 0,8  $\Leftrightarrow V_{n+1} = 0,8V_n \Leftrightarrow U_{n+1} - a = 0,8(U_n - a)$   
 $\Leftrightarrow 0,8 \times U_n + 100 - a = 0,8 \times U_n - 0,8 \times a \Leftrightarrow 100 = 0,2 \times a \Leftrightarrow a = \frac{100}{0,2} = 500.$
4.  $V_n = 0,8^n \times V_0 = 0,8^n \times 1500$  car  $V_0 = U_0 - 500 = 1500.$   
 $V_n = U_n - 500$  donc  $U_n = V_n + 500 = 0,8^n \times 1500 + 500.$
5.  $U_5 = 0,8^5 \times 1500 + 500 \approx 992.$
6.  $U_{n+1} - U_n = 0,8^{n+1} \times 1500 + 500 - 0,8^n \times 1500 - 500$   
 $= 0,8^n \times 1500 \times (0,8 - 1) = -300 \times 0,8^n.$

7.  $U_{n+1} - U_n$  reste toujours négatif, donc  $(U_n)$  est décroissante.
8.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$  car  $0 < 0,8 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n \times 1500 = 0.$  On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 500$
9. Cherchons le plus petit entier  $n$  tel que  $0,8^n \times 1500 + 500 \leq 600$   
 $\Leftrightarrow 0,8^n \times 1500 \leq 100 \Leftrightarrow 0,8^n \leq \frac{100}{1500} \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln\left(\frac{100}{1500}\right)$   
 $\Leftrightarrow \underbrace{n \ln(0,8)}_{-} \leq \ln\left(\frac{100}{1500}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{100}{1500}\right)}{\ln(0,8)} \approx 12,1.$

Le plus petit entier qui convient est 13, ce qui correspond à l'année 2033.

► **Exercice n°13**

1.  $P_2 - P_1 = 0,5(P_1 - P_0) \Leftrightarrow P_2 - 700\,000 = 100\,000$ , donc  $P_2 = 800\,000$   
 $P_3 - P_2 = 0,5(P_2 - P_1) \Leftrightarrow P_3 - 800\,000 = 50\,000$ , donc  $P_3 = 850\,000$
2. a)  $U_{n+1} = P_{n+1} - P_n = 0,5(P_{n+1} - P_n) = 0,5U_n.$  Donc  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,5$  et de premier terme  $U_0 = P_1 - P_0 = 200\,000.$  On en déduit que  $U_n = q^n \times U_0 = 200\,000 \times 0,5^n.$   
 b) Pour tout  $n$ ,  $V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - 0,5P_{n+1} - P_{n+1} + 0,5P_n$   
 $= P_{n+2} - P_{n+1} - 0,5P_{n+1} + 0,5P_n = 0,5(P_{n+1} - P_n) - 0,5(P_{n+1} - P_n) = 0.$   
 La suite  $(V_n)$  est bien constante.  
 Donc, pour tout  $n$ ,  $V_n = V_0 = P_1 - 0,5P_0 = 700\,000 - 250\,000 = 450\,000$   
 c)  $2(V_n - U_n) = 2(P_{n+1} - 0,5P_n - P_{n+1} + P_n) = P_n.$   
 Donc,  $P_n = 2(450\,000 - 200\,000 \times 0,5^n) = 900\,000 - 400\,000 \times 0,5^n.$   
 d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$  car  $0 < 0,5 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 400\,000 \times 0,5^n = 0.$  On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 900\,000.$

► **Exercice n°14**

1. Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 100A}{U_n - 100A} = \frac{1,01U_n - A - 100A}{U_n - 100A}$   
 $= \frac{1,01U_n - 101A}{U_n - 100A} = \frac{1,01(U_n - 100A)}{U_n - 100A} = 1,01.$  Donc  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 1,01$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 100A = 120\,000 - 100A.$
2.  $V_n = q^n \times V_0 = 1,01^n \times [120\,000 - 100A].$   
 $U_n = V_n + 100A = 1,01^n \times [120\,000 - 100A] + 100A$
3.  $U_{15} = 0 \Leftrightarrow 1,01^{15} \times [120\,000 - 100A] + 100A = 0.$   
 $\Leftrightarrow 1,01^{15} \times 120\,000 - 1,01^{15} \times 100A + 100A = 0$   
 $\Leftrightarrow 1,01^{15} \times 120\,000 = 100A(1,01^{15} - 1) \Leftrightarrow A = \frac{1,01^{15} \times 120\,000}{100(1,01^{15} - 1)} \approx 8654,85$   
 Mensualités  $\approx \frac{8654,85}{12} \approx 721,24.$