

Séries de fonctions – TD₁₃**Exercice 1 :**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I .

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convexe sur I .

Réponse

Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f_k(x) + \lambda f_k(y).$$

D'où, en sommant pour $k = 0$ à $k = N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^N f_k((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) \sum_{k=0}^N f_k(x) + \lambda \sum_{k=0}^N f_k(y) \quad (\star).$$

Or, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I , donc,

$$\sum_{k=0}^N f_k((1-\lambda)x + \lambda y) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k((1-\lambda)x + \lambda y), \quad \sum_{k=0}^N f_k(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^N f_k(y) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(y).$$

Donc, en passant à la limite dans l'inégalité $(\star)$:

$$S((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)S(x) + \lambda S(y).$$

S est convexe.

Exercice 2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S possède une limite en $+\infty$.
4. Donner un équivalent simple de S en $+\infty$.

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\frac{1}{n^2 + x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0$.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge.

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc,

S est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Les fonctions f_n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

Donc, $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$.

Par théorème de comparaison, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Par théorème,

S est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ et $+\infty$ est une extrémité de $\mathbb{R}$.

Donc, par théorème de la limite double,

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

4. *Indication* : comparaison série/intégrale. Avec $x > 0$ fixé, utiliser la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$.

Exercice 3 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \times x + 1}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la limite ℓ de S en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de $S(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note $u_n = \frac{1}{n \times x + 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Comme $x > 0$, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Donc,

S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on note $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \times x + 1}$.

Les fonctions f_n sont continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Comme, la série $\sum f_n(x)$ est alternée,

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \times x + 1}.$$

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \times a + 1}.$$

Donc,

$$0 \leq \|R_n\|_{[a, +\infty[}^\infty \leq \frac{1}{(n+1) \times a + 1}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\|R_n\|_{[a, +\infty[}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Autrement dit, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Par théorème S est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$.

Donc,

S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, on a montré que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de la limite double,

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

3. *Indication* : Théorème de la limite double, pour déterminer la limite de $xS(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition I de f .
- Montrer que f est continue sur I .
- Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
- Montrer que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et déterminer cette limite.
- Déterminer un équivalent de $f(x) - \ell$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : $x \geq 0$. Dans ce cas, $e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Donc, la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

Cas 2 : $x > 0$. Par théorème de comparaison, $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum e^{-\sqrt{n}x}$ converge absolument, donc, converge.

Ainsi,

f est définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on note $u_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}$.

Les fonction u_n sont continues sur I .

De plus, pour tout $a > 0$ et $x \geq a$, $|u_n(x)| \leq e^{-\sqrt{n}xa}$.

Donc, $0 \leq \|u_n\|_{[a, +\infty[}^\infty \leq e^{-\sqrt{n}xa}$.

Or, comme $a > 0$, la série $\sum e^{-\sqrt{n}xa}$ converge (**Q1**).

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|u_n\|_{[a, +\infty[}^\infty$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

Par théorème, f est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

f est continue sur $]0, +\infty[$.

ATTENTION! la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement $]0, +\infty[$. En effet, la fonction u_n étant décroissante, $\|u_n\|_{]0, +\infty[}^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = 1$ et la série $\sum \|u_n\|_{]0, +\infty[}^\infty$ diverge grossièrement

3. *Indication* : comparaison série/intégrale.

4. On a :

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, on a montré que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Par théorème de la limite double,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

5. *Indication* : comparaison série/intégrale.

Exercice 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

- Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. Dans la suite, on note S la somme de la série.
- Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
- Calculer $S'(1)$.

Réponse

- Soit $x \in [0, 1]$. On sait que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc, converge.

Ainsi,

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n \times (n+x)}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

De plus, $n+x \geq n$ et $|x| \leq 1$, donc,

$$|f'_n(x)| = \frac{x}{n \times (n+x)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc,

$$0 \leq \|f'_n\|_{[0,1]}^\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par théorème de comparaison, $\sum \|f'_n\|_{[0,1]}^\infty$ converge.

Donc, $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

Par théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions,

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

3. On a :

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

En reconnaissant une somme télescopique,

$$S'(1) = -1.$$

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note $f_n(x) = \text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n)$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

On pourra montrer que, pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$.

Exercice 7 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 \times x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S .
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Cas 1 : $x = 0$. On a $\frac{1}{1+n^2 \times x^2} = 1$. Donc, la série $\sum \frac{1}{1+n^2 x^2}$ diverge grossièrement.

Cas 2 : $x \neq 0$. On a $\frac{1}{1+n^2 \times x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2} \geq 0$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{1+n^2 x^2}$ converge.

Donc,

S est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. La fonction S est paire. On l'étudie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2 \times x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$, on a $1+n^2 x^2 \geq 1+n^2 a^2 \geq n^2 a^2 > 0$.

Donc, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2 a^2}$.

Donc, $0 \leq \|f_n\|_{[a, +\infty[}^\infty \leq \frac{1}{n^2 a^2}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{[a, +\infty[}^\infty$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Par théorème, S est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

S est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme S est paire,

S est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

Par le théorème de la limite double,

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 8 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{n \times x})}{n^3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S .
2. Démontrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. La fonction S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition ?

Exercice 9 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n \times x}}{1 + n^2}$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer, pour tout $x > 0$, $S''(x) + S(x)$.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Réponse

1. On note $f_n : x \mapsto \frac{e^{-n \times x}}{1 + n^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum f_n(x)$ converge.

Donc, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1 + n^2} \quad \text{et} \quad f''_n(x) = \frac{n^2 e^{-nx}}{1 + n^2}.$$

De plus, pour tout $x > 0$, $|f'_n(x)| \leq ne^{-nx}$.

Comme $x > 0$, $ne^{-nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum f'_n(x)$ converge.

Donc, la série de fonction $\sum f'_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, pour tout $x \geq a$, $|f''_n(x)| \leq e^{-na}$.

Donc, $\|f''_n\|_{[a, +\infty[} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$.

Comme $a > 0$, $|e^{-a}| < 1$, donc, la série géométrique $\sum e^{-na}$ converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f''_n\|_{[a, +\infty[}$ converge.

Donc, la série de fonction $\sum f''_n$ converge normalement, donc, uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par théorème, S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc,

S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $x > 0$,

$$S''(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+n^2)e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}.$$

3. On a : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

Pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Donc, $\|f_n\|_{]0, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{]0, +\infty[}$ converge.

Par théorème de la limite double,

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

Exercice 10 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n \times x)}{n^2}$

- Déterminer l'ensemble de définition D de S .
- Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.
- Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \setminus \{0\}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S' \left(\frac{1}{p} \right) \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{2n}$.

La fonction S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(n \times x)}{n^2}$.

Comme Arctan est bornée, on a $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

Donc,

la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $D = \mathbb{R}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonction f_n sont continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Donc,

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Par théorème de comparaison, $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions,

S est continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{n}{n^2 \times (1 + n^2 \times x^2)} = \frac{1}{n \times (1 + n^2 \times x^2)}.$$

Par **Q1**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc, converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On travaille ensuite sur $]0, +\infty[$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n \times (1 + n^2 \times a^2)} \leq \frac{1}{n^3 \times a^2}.$$

Donc,

$$0 \leq \|f'_n\|_{[a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^3 \times a^2}.$$

Or, $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $3 > 1$).

Par théorème de comparaison, $\sum \|f'_n\|_{[a, +\infty[}$ converge.

Donc, la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

Par théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.

Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(-x) = -S(x)$, donc S est impaire et, par conséquent,

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$.

4. On a :

$$S'\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times \left(1 + \frac{n^2}{p^2}\right)}.$$

Chaque terme de la somme est positif, donc,

$$S'\left(\frac{1}{p}\right) \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{n \times \left(1 + \frac{n^2}{p^2}\right)}.$$

Pour tout $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $0 \leq 1 + \frac{n^2}{p^2} \leq 1 + \frac{p^2}{p^2} \leq 2$.

Donc,

$$S'\left(\frac{1}{p}\right) \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{2n}.$$

On sait que la série harmonique diverge et est à termes positifs, donc,

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{2n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc,

$$S'\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc,

S n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

Exercice 11 :

On considère la série des fonctions $f_n(x) = n \times x^2 \times e^{-x \times \sqrt{n}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions.
2. Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[a, +\infty[$ de cette série de fonctions.

Réponse

1. Convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Cas 1 : $x > 0$. Par croissances comparées, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum f_n(x)$ converge.

Cas 2 : $x = 0$. Dans ce cas, $f_n(x) = 0$, donc, $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi,

la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Converge uniforme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \times x^2 \times e^{-x \sqrt{k}}.$$

Comme les termes de la somme sont positifs,

$$R_n(x) \geq (n+1) \times x^2 \times e^{-x \sqrt{n+1}} \geq 0.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\|R_n\|_\infty \geq R_n(x) \geq (n+1) \times x^2 \times e^{-x \sqrt{n+1}}$.

On note $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|R_n\|_\infty \geq 1 \times e^{-1}.$$

On en déduit que la suite $(\|R_n\|_\infty)_n$ ne converge pas vers 0.

Donc,

la série de fonction $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Converge normale

On sait que la converge normale implique la converge uniforme.

Comme il n'y a pas convergence uniforme,

la série de fonction $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : montrons qu'il n'y a pas convergence normale directement. Pour cela, on peut étudier la fonction f_n . Les fonctions f_n sont dérivables et, pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = 2n \times x \times e^{-x\sqrt{n}} - n \times \sqrt{n} \times x^2 e^{-x\sqrt{n}} = n \times x \times e^{-x\sqrt{n}} \times (2 - \sqrt{n} \times x).$$

On en déduit la tableau de variations de f_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

x	0	$\frac{2}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$4e^{-2}$	0

Donc, $\|f_n\|_\infty = \left| f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \right| = 4e^{-2}$.

On en déduit que $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge grossièrement. On retrouve bien que la série de fonction $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Convergence simple

Comme $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$,

la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$.

Converge normale

Les fonctions f_n sont dérivables et, pour tout $x \geq a$,

$$f'_n(x) = 2n \times x \times e^{-x\sqrt{n}} - n \times \sqrt{n} \times x^2 e^{-x\sqrt{n}} = n \times x \times e^{-x\sqrt{n}} \times (2 - \sqrt{n} \times x).$$

Donc, f_n est décroissante sur $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$.

Pour n assez grand, $[a, +\infty[\subset \left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$.

Donc, f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. De plus, f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Donc,

$$\|f_n\|_{[a, +\infty[}^\infty = f_n(a) = n \times a^2 \times e^{-a\sqrt{n}}$$

Comme $a > 0$, d'après l'étude de la convergence simple, la série $\|f_n\|_{[a, +\infty[}^\infty$ converge.

Donc,

la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

La convergence normale implique la convergence uniforme,

la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 12 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note $f_n(x) = n^\alpha \times x^n \times (1 - x)$.

Discuter selon les valeurs de α de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.