

TH5 - Statique des fluides

Table des matières

1	Actions mécaniques dans un fluide	1
1.1	Approximation des milieux continus	1
1.2	Forces surfaciques dues à la pression	2
1.3	Forces volumiques	4
1.4	Équivalent volumique des forces de pression	4
1.5	Equation locale de la statique des fluides	5
2	Statique des fluides incompressibles	6
2.1	Champ de pression	6
2.2	Applications	7
3	Statique des fluides compressibles : cas de l'atmosphère	7
4	Poussée d'Archimède	9
5	Actions exercées par un fluide au repos sur un solide	10
5.1	Expression de la force de pression	10
5.2	Prise en compte des symétries	11

1 Actions mécaniques dans un fluide

1.1 Approximation des milieux continus

Dans un fluide, on définit un **élément de fluide** (aussi appelé **particule de fluide**) comme un **volume correspondant à l'échelle mésoscopique** de l'ordre du μm^3 qui contient un très grand nombre de molécules (ou d'atomes) du fluide.

L'intérêt d'un tel volume est de pouvoir réaliser des moyennes de grandeurs intensives (comme par exemple la température ou la pression) à l'échelle de ce volume. Le volume étant grand par rapport à l'échelle microscopique, les moyennes effectuées ne sont pas soumises aux fluctuations statistiques. Néanmoins, les valeurs moyennées peuvent varier d'un élément de fluide à un autre, et ainsi décrire localement les propriétés du fluide.

Le fluide est alors considéré comme un milieu continu, c'est-à-dire que les grandeurs intensives définies comme expliqué ci-dessus **s'expriment comme des fonctions de la position et du temps**. Elles sont typiquement nommées champs. On distingue :

- les champs scalaires qui, à chaque point du fluide (et à chaque instant), attribuent un nombre. Ce sont par exemple le champ de pression $P(M, t) = P(x, y, z, t)$, de température $T(M, t)$, de masse volumique $\rho(M, t)$
- les champs vectoriels qui, à chaque point du fluide (et à chaque instant), attribuent un vecteur. On peut ainsi citer le champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$, le champ de pesanteur $\vec{g}(M)$...

En statique des fluides les champs sont stationnaires (ils ne dépendent pas du temps) et le champ des vitesses est nul en tout point.

Définition de la masse volumique

Pour un élément de fluide situé autour du point Q (figure 1) de volume $d\tau$ et de masse δm , la masse volumique (ou champ de masse volumique) en Q est définie par :

$$\rho(Q) = \frac{\delta m}{d\tau}$$

Pour un fluide homogène de masse m et de volume V , la masse volumique a pour expression :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La masse volumique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

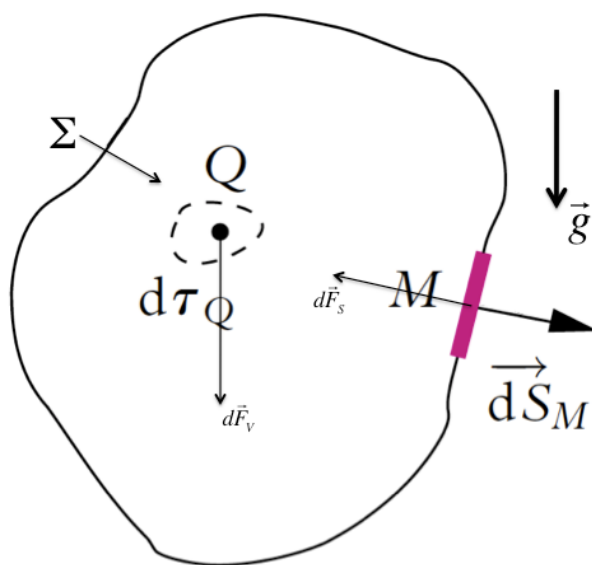


Figure 1 – Forces s'exerçant sur un fluide au repos

Considérons un fluide (figure 1) au repos dans lequel une surface fictive fermée Σ délimite deux zones :

- la zone de volume V située à l'intérieur de Σ que nous appellerons le système $\mathcal{S}$
- la zone située à l'extérieur de Σ

1.2 Forces surfaciques dues à la pression

Définition du vecteur surface élémentaire

Le **vecteur surface élémentaire** $\overrightarrow{dS_M}$ en un point M de la surface fermée Σ est le vecteur :

- de norme dS_M qui est la surface élémentaire située autour de M sur la surface Σ
- orthogonal à la surface Σ en M
- dirigé vers l'extérieur de Σ

Définition des forces surfaciques et de la densité surfacique de force

Les **forces surfaciques** sont des forces à courte portée qui s'exercent sur les éléments de surface dS de la frontière Σ du système $\mathcal{S}$. La force surfacique élémentaire $d\vec{F}_S(M)$ exercée sur l'élément de surface dS_M (ou surface élémentaire) situé autour de M est proportionnelle à dS_M et on définit une **densité surfacique de force** $\vec{f}_S$ par :

$$d\vec{F}_S(M) = \vec{f}_S(M) dS_M$$

Propriété des forces surfaciques de pression

A cause des interactions du courte portée entre particules, au voisinage d'un point M quelconque de Σ , les particules extérieures à Σ exercent sur les particules intérieures à Σ une force surfacique (car proportionnelle à la surface) de pression :

$$d\vec{F}_{S,press}(M) = -P(M) d\vec{S}_M = -P(M) dS_M \vec{n}$$

où dS_M est la surface élémentaire autour du point M , $\vec{n}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur normal en M à cette surface et $P(M)$ la pression en M .

Ainsi la **densité surfacique des forces de pression** est :

$$\vec{f}_{S,press}(M) = -P(M) \vec{n}$$

Sur la surface de séparation entre deux fluides au repos, l'égalité des forces de pression de part et d'autre de cette surface immobile implique que la pression doit être la même des deux cotés de cette surface, en résumé :

Propriété de l'interface entre deux fluides au repos

A l'interface entre deux fluides au repos, la pression est continue.

1.3 Forces volumiques

Définition des forces volumiques et de la densité volumique de force

Les **forces volumiques** sont des forces à longue portée qui s'exercent sur les éléments de volume $d\tau$ contenu dans le volume V du système $\mathcal{S}$ délimité par Σ .

On peut citer par exemple le poids ou la force électrique de Lorentz dans la cas d'un fluide chargé. La force volumique élémentaire $d\vec{F}_V(Q)$ (figure 1) exercée sur l'élément de volume $d\tau$ (ou volume élémentaire) située autour de Q est proportionnelle à $d\tau$ et on

définit une **densité volumique de force** $\vec{f}_V$ par :

$$d\vec{F}_V(Q) = \vec{f}_V(Q) d\tau$$

Propriété des forces volumiques de pesanteur

Les particules du fluide sont soumises à une force à longue portée : le poids. On note ρ la masse volumique du fluide et $\vec{g}$ le champ de pesanteur. Si on considère un volume élémentaire quelconque du fluide noté $d\tau$ situé autour d'un point quelconque Q , de masse $\delta m = \rho d\tau$, il subit une **force volumique de pesanteur** (car proportionnelle au volume) égale à son poids qui s'écrit :

$$d\vec{F}_{V,pes} = \delta m \vec{g} = \rho \vec{g} d\tau$$

Ainsi la **densité volumique des forces de pesanteur** est :

$$\vec{f}_{V,pes} = \rho \vec{g}$$

1.4 Équivalent volumique des forces de pression

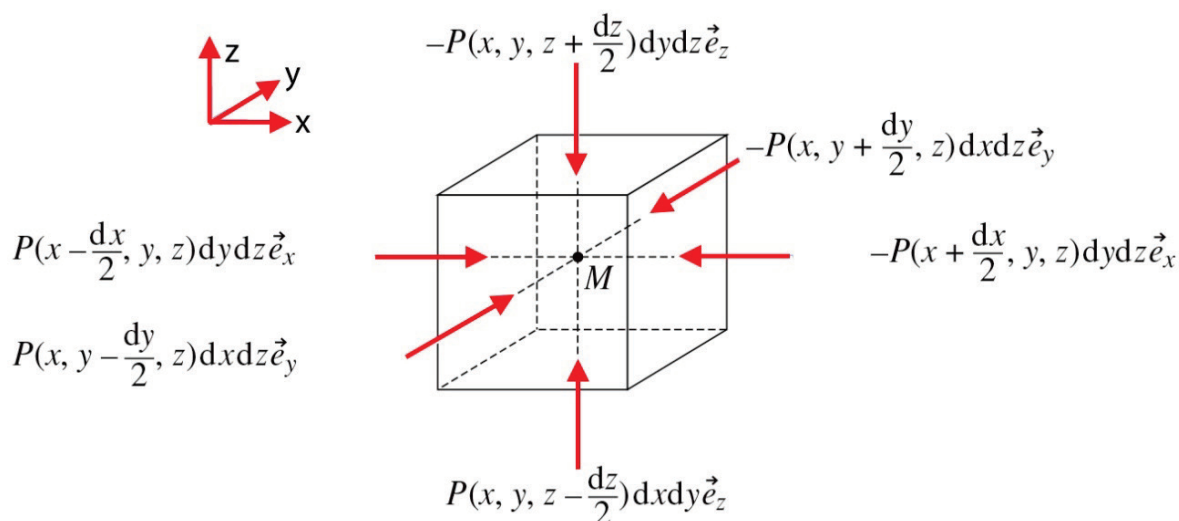


Figure 2 – Résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume élémentaire $d\tau$

Calculons la résultante $d\vec{F}_S$ des forces de pression exercées sur un petit parallélépipède de fluide de volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$ situé autour du point $M(x, y, z)$ représenté sur la figure 2.

◇ La composante de cette force sur l'axe (Ox) est :

$$d\vec{F}_S \cdot \vec{u}_x = P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dydz - P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dydz$$

On rappelle l'expression de la dérivée partielle de $P(x, y, z)$ par rapport à la variable x en $M(x, y, z)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)}{dx}$$

On en déduit, comme dx est un infiniment petit :

$$P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) \approx \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \times dx$$

On obtient alors :

$$d\vec{F}_S \cdot \vec{u}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau$$

◇ En considérant les forces de pression s'exerçant sur les six faces, on obtient :

$$d\vec{F}_S = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau \vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y} d\tau \vec{u}_y - \frac{\partial P}{\partial z} d\tau \vec{u}_z = -\vec{\text{grad}} P d\tau$$

Équivalent volumique des forces de pression

Les forces surfaciques de pression sont équivalentes à une force volumique de densité volumique de force $-\vec{\text{grad}} P$.

1.5 Equation locale de la statique des fluides

Considérons le volume élémentaire $d\tau$ de fluide de la figure 2, à l'équilibre la somme des forces de pression $-\vec{\text{grad}} P d\tau$ et des forces volumiques $\vec{f}_V d\tau$ est nulle donc :

$$-\vec{\text{grad}} P d\tau + \vec{f}_V d\tau = \vec{0}$$

Dans le cas d'un fluide soumis aux seules forces volumiques de pesanteur $\vec{f}_V = \vec{f}_{V, pes} = \rho \vec{g}$, on obtient :

Equation locale de la statique des fluides

Pour un fluide au repos soumis aux seules forces volumiques de pesanteur, on a en tout point M de ce fluide :

$$-\vec{\text{grad}} P(M) + \rho(M) \vec{g} = \vec{0} \quad (1)$$

2 Statique des fluides incompressibles

2.1 Champ de pression

Définition d'un fluide incompressible

Un fluide est incompressible si **sa masse volumique est une constante, indépendante de la pression et de la température**. On ne peut pas faire diminuer le volume d'une masse donnée de ce fluide même en augmentant considérablement la pression. En conséquence, le champ de masse volumique est uniforme (ne dépend pas de la position, des variables spatiales).

Il ressort de cette définition que les liquides sont incompressibles (en première approximation), contrairement au gaz, qui eux sont compressibles.

Pour un fluide incompressible de masse volumique $\rho(M) = \rho$ constante soumis aux seules forces volumiques de pesanteur, en choisissant un axe (Oz) vertical ascendant, (1) devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \overrightarrow{g} = -\rho g \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad g = \|\overrightarrow{g}\|$$

En projetant cette équation sur (Oz) puis en l'intégrant entre z_0 donné et z quelconque, on obtient :

$$P(z) = P(z_0) - \rho g(z - z_0)$$

$$\Rightarrow P(z) + \rho g z = P(z_0) + \rho g z_0 = \text{cst}$$

Schéma (figure 3) et démonstration :

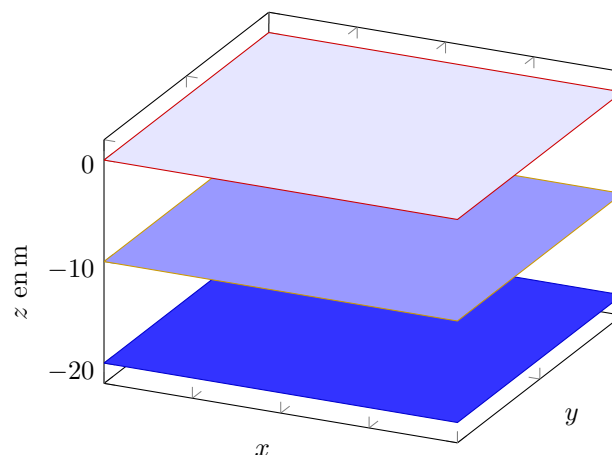


Figure 3 – Surface isobares dans la mer

Application : Calculons comment évolue la pression dans la mer en fonction de la profondeur.

·
·
·
·
·

Propriété des surfaces isobares

Il ressort de cette analyse que les **surfaces isobares**, surfaces en tout point desquelles la pression est constante, sont des surfaces à altitude constante ($z = cst$).

2.2 Applications

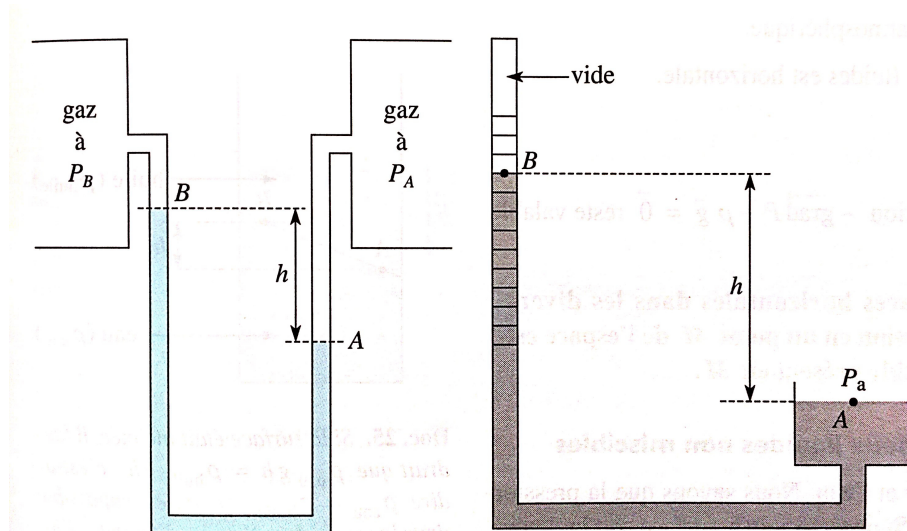


Figure 4 – Nanomètre différentiel (à gauche) et baromètre à mercure (à droite)

Un **manomètre différentiel** (dessin de gauche), dont le tube contient de l'eau (de masse volumique ρ_1) permet d'évaluer une différence de pression, on obtient :

$$P_A + \rho_1 g z_A = P_B + \rho_1 g z_B$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = \rho_1 g (z_B - z_A) = \rho_1 g h$$

Dans un **baromètre à mercure** (dessin de droite), P_a est la pression atmosphérique et P_B est nulle (vide), la dénivellation h de la colonne de mercure (de masse volumique ρ_2) indique alors la valeur de P_a :

$$P_A + \rho_2 g z_A = \underbrace{P_B}_0 + \rho_2 g z_B$$

$$\Rightarrow P_A = \rho_2 g (z_B - z_A) = \rho_2 g h$$

3 Statique des fluides compressibles : cas de l'atmosphère

L'épaisseur de la troposphère (partie de l'atmosphère comprise en 0 km et 10 km d'altitude) étant de 10 km à comparer au rayon de la Terre $R_T = 6400$ km, on peut considérer que

le module de champ de pesanteur est le même en tout point de la troposphère.

L'air sera considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et **sa température sera supposée constante de valeur T_0** .

◇ Considérons un élément de fluide situé à l'altitude z et contenant δn moles d'air à la température T_0 , à la pression $P(z)$, de masse δm et occupant un volume $d\tau$, la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$P(z)d\tau = \delta n RT_0 = \frac{\delta m}{M} RT_0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\delta m}{d\tau}}_{\rho(z)} = \frac{P(z)M}{RT_0}$$

On remarque que la masse volumique $\rho(z)$ de l'air diminue quand la pression $P(z)$ diminue.

◇ L'intégration de l'équation locale (1) de la statique des fluides entre $z = 0$ et z quelconque, nous donne :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

où

$$H = \frac{RT_0}{Mg}$$

est la **hauteur d'échelle** de la pression pour notre modèle de la troposphère isotherme.

Pour $T_0 = 288\text{K} = 15^\circ\text{C}$, on obtient $H \approx 8\text{km}$.

Schéma et démonstration :

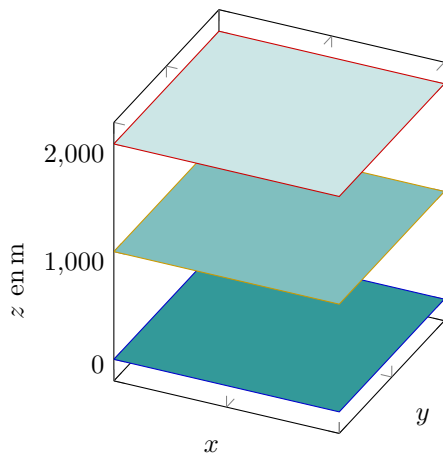


Figure 5 – Surfaces isobares de l'atmosphère

L'équation locale de la statique des fluides donne :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{P(z)Mg}{RT_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0}P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0 \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

$$\Rightarrow P(z) = A \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

or on suppose $P(0) = P_0$ connue, donc $P_0 = A$.

Au final :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

On peut remarquer, comme pour les liquides, que **les surfaces isobares sont des surfaces à altitude constante $z = \text{cst}$** .

Le modèle plus affiné de l'atmosphère à gradient de température, qui modélise bien la Troposphère, sera étudié en exercice.

4 Poussée d'Archimède

La répartition non uniforme de la pression autour d'un corps partiellement ou totalement immergé est responsable de l'apparition d'une force résultante de poussée $\vec{\Pi}$ appelée poussée d'Archimède.

Un corps placé au sein d'un fluide au repos semble avoir pris la place d'une quantité de fluide qui nous appellerons « fluide déplacé » de volume noté V_d .

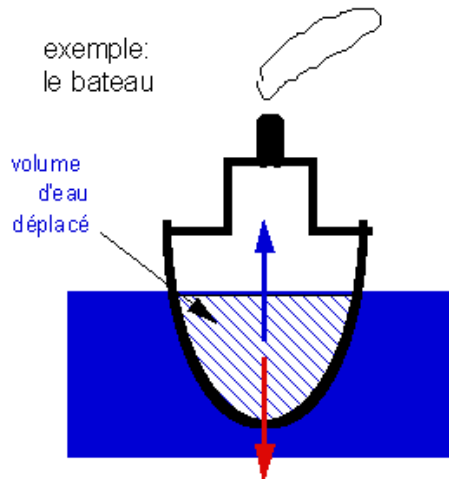


Figure 6 – Poussée d'Archimède exercée sur un bateau

Théorème d'Archimède

Les forces de pression exercées par un fluide au repos de masse volumique ρ sur un corps placé en son sein ont une résultante, appelée poussée d'Archimède notée $\vec{\Pi}$, qui est opposée au poids du volume de « fluide déplacé » par ce corps :

$$\vec{\Pi} = -\rho V_d \vec{g} = +\rho V_d g \vec{u}_z$$

pour un axe (Oz) vertical ascendant, en notant $g = \|\vec{g}\|$ et V_d le volume de « fluide déplacé ».

Remarque hors programme : Le moment des forces de pression peut être calculé en considérant que la poussée d'Archimède est appliquée au centre d'inertie C du « fluide déplacé », appelé centre de poussée.

5 Actions exercées par un fluide au repos sur un solide

5.1 Expression de la force de pression

La force exercée par un fluide sur une paroi solide est la somme des forces élémentaires de pression $d\vec{F}_S(M)$ qu'il exerce sur les différentes surfaces élémentaires de cette paroi. On a vu que la force exercée par le fluide sur une surface élémentaire dS_M est :

$$d\vec{F}_S = -P(M)d\vec{S}_M$$

où $d\vec{S}_M = dS_M \vec{n}$ est le vecteur surface élémentaire en M , orthogonal à la paroi du solide et dirigé du solide vers le fluide. **Pour ne pas se tromper sur le sens d'une force de pression, il faut bien garder à l'esprit que cette force est dirigée vers l'intérieur du système qui subit la force.**

On va s'intéresser au calcul de la force exercée par un fluide sur une surface solide $\mathcal{S}$ en contact avec le fluide. Cette force est donnée par l'intégrale double :

$$\vec{F} = \iint_{M \in \mathcal{S}} d\vec{F}_S = \iint_{M \in \mathcal{S}} -P(M) d\vec{S}_M$$

Calculer cette intégrale de vecteurs consiste à priori à calculer trois intégrales pour avoir les composantes selon les trois axes d'un repère. Par exemple, la composante suivant le vecteur $\vec{u}_x$, est :

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = \iint_{M \in \mathcal{S}} -P(M) d\vec{S}_M \cdot \vec{u}_x$$

Cependant, si l'on choisit bien le repère et si le problème a un plan ou un axe de symétrie, il n'y a le plus souvent qu'une composante non nulle et on n'a besoin de calculer qu'une seule intégrale.

On pourra se référer aux différentes animations Flash pour retrouver l'expression de $d\vec{S}_M$ en coordonnées cartésiennes ¹, cylindriques ² ou sphériques ³.

Exercice : Retrouver, à l'aide d'un calcul d'intégrale double, la surface d'un disque de rayon R , la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h , la surface d'une sphère de rayon R .

Surface d'un disque de rayon R :

$$S_{dis} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} dr \cdot r d\theta = \int_{r=0}^R r dr \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

Surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :

$$S_{cyl} = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} dz \cdot R d\theta = R \cdot \int_{z=0}^h dz \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi R h$$

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.html

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.html

3. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.html

Surface d'une sphère de rayon R :

$$S_{sph} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R d\theta \cdot R \sin(\theta) d\varphi = R^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

5.2 Prise en compte des symétries

Dans ce qui suit, on appelle « problème » la donnée de la paroi solide et de la distribution de pression $P(M)$. La prise en compte des symétries du problème permet souvent de connaître, sans calcul, la direction de la résultante des forces de pression $\vec{F}$. Il faut toujours commencer par les analyser.

Définition d'un plan de symétrie du problème

Le problème admet un plan de symétrie (P) si :

- la surface solide est symétrique par rapport au plan (P)
- la pression est la même en deux points M et M' symétriques par rapport au plan (P).

Dans ce cas, comme on le voit sur la figure ci-dessous, les forces élémentaires $d\vec{F}_S(M)$ et $d\vec{F}_S(M')$ exercées par le fluide sur deux éléments de surface symétriques par rapport à (P) sont symétriques par rapport à (P). Il en résulte que la somme de $d\vec{F}_S(M) + d\vec{F}_S(M')$ est parallèle à (P).

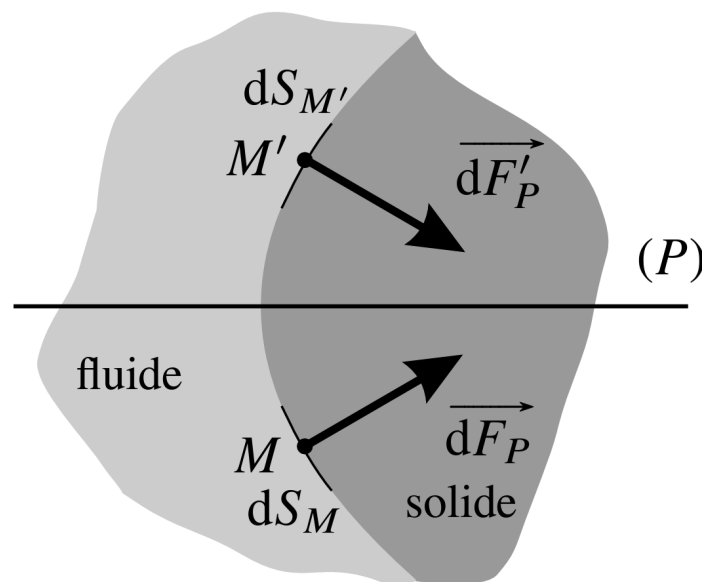


Figure 7 – Plan de symétrie du problème dans le cas d'un barrage

Par suite la force totale $\vec{F}$ est parallèle au plan (P).

Propriété de $\vec{F}$ en présence d'un plan de symétrie du problème

Lorsque le problème possède un plan de symétrie, la résultante des forces de pression $\vec{F}$ est parallèle à ce plan.