ESPACES VECTORIELS : GÉNÉRALITÉS

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1) Notion d'espace vectoriel

Définition (espace vectoriel) Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- ⋆ une loi de composition *interne* $+ : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$;
- ⋆ une loi de composition *externe* $\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$.

On dit que le triplet $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou que E est un espace vectoriel) si :

$(\mathrm{Ev})_1$ $(E,+)$ est un groupe abélien
On notera 0_E le vecteur nul de $(E,+)$.

$(\mathrm{Ev})_2$ $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$
On dit que 1 est élément neutre pour la multiplication par les scalaires.

$(\mathrm{Ev})_3$ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x,y \in E,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
On parle de distributivité de la multiplication par les scalaires par rapport à l'addition dans E.

$(\mathrm{Ev})_4$ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
On parle de distributivité de la multiplication par les scalaires par rapport à l'addition des scalaires.

$(\mathrm{Ev})_5$ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
On parle d'associativité de la multiplication par les scalaires.

Vocabulaire : les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Remarque : dans la pratique, on omettra le « $\cdot$ » de le multiplication externe : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on écrira λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

Exemple ⋆ L'ensemble $\mathbb{K}$ (muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (on vérifie facilement que les propriétés $(\mathrm{Ev})_1$ à $(\mathrm{Ev})_5$ sont vraies).

⋆ De même, $(\mathbb{K}^2,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où l'on définit $+$ et $\cdot$ par :

$$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y)+(a,b) = (x+a,y+b) \qquad \text{et} \qquad \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Proposition (équations produit dans un espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E$. Alors :

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$$

Démonstration Soit $(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E$. On raisonne par double implication.

$(\Longleftarrow)$ On traite deux cas.

⋆ Supposons que $\lambda = 0$. Puisque $0+0=0$, on a :

$$(0+0 \cdot x = 0 \cdot x \qquad \text{soit, d'après } (\mathrm{Ev})_4, \qquad 0 \cdot x + 0 \cdot x = 0 \cdot x,$$

Comme $0 \cdot x$ est inversible dans le groupe $(E,+)$, on a bien $0 \cdot x = 0_E$.

⋆ En supposant maintenant que $x = 0_E$, on utilise cette fois le fait que $0_E + 0_E = 0_E$ et la propriété $(\mathrm{Ev})_3$ pour obtenir que $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$. Si $\lambda = 0$, alors il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. On utilise les propriétés $(\text{Ev})_5$ et $(\text{Ev})_2$:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = 0_E,$$

Ainsi, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et donc $x = 0_E$. ∎

Notation/rappel : dans le groupe additif $(E, +)$, l'inverse d'un élément $x \in E$ est noté $-x$ (et on a $x + (-x) = 0_E$).

Proposition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$. Alors :

$$(-1) \cdot x = -x$$

Démonstration Soit $x \in E$. On a :

$$1 \cdot x + (-1) \cdot x = \big(1_{\mathbb{K}} + (-1)\big) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$$

d'où le résultat par unicité de l'inverse dans un groupe. ∎

2) Exemples fondamentaux

(a) $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des opérations $+$ et $\cdot$ définies par, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + \lambda y_1, \ldots, x_n + \lambda y_n)$$

On peut vérifier que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$.

Remarque : on peut aussi dire que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (si on multiplie un élément de $\mathbb{C}^n$ par un réel, on obtient encore un élément de $\mathbb{C}^n$), mais $\mathbb{R}^n$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(b) Espace $\mathbb{K}[X]$

L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le vecteur nul étant $0_{\mathbb{K}[X]}$ (polynôme nul).

(c) Espace des fonctions $\mathbb{K}^\Omega$

Soit Ω un ensemble non vide. On rappelle que $\mathbb{K}^\Omega$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $f, g \in \mathbb{K}^\Omega$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on rappelle que la fonction $f + \lambda g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par :

$$\forall x \in \Omega, \qquad (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

On vérifie facilement que $(\mathbb{K}^\Omega, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de cet espace est la fonction nulle $0_{\mathbb{K}^\Omega} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \omega & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$.

Cas particulier : pour $\Omega = \mathbb{N}$, on obtient que l'ensemble $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(d) Espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le triplet $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau ($\times$ désigne ici le produit matriciel). On vérifie facilement que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, le triplet $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul est $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$ (matrice nulle).

(e) Produit cartésien d'espaces vectoriels

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, +_1, \cdot_1), \dots, (E_n, +_n, \cdot_n)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On peut montrer que le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations $+$ et $\cdot$ définies par :

$$(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_1 \lambda \cdot_1 y_1, \dots, x_n +_n \lambda \cdot_n y_n)$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E$. On vérifie que $(E, +, \cdot)$ vérifie bien les propriétés de $(\mathrm{Ev})_1$ à $(\mathrm{Ev})_5$.

3) Notion de combinaison linéaire

Définition (combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs) Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $u \in E$. On dit que le vecteur u s'exprime comme *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \qquad \textit{i.e.} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Exemple ⋆ Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(-2, 0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2)$ et $(3, 2)$ car :

$$(-2, 0) = (1, 2) - (3, 2) = 1 \times (1, 2) + (-1) \times (3, 2)$$

- ⋆ Dans $\mathbb{R}[X]$, Le polynôme $\mathrm{P} = X^2 - 2X + 3$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $1, X, X^2$.
- ⋆ Plus généralement, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n (*i.e.* tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$) s'exprime comme combinaison linéaire des monômes $1, X, \dots, X^n$.
- ⋆ Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ s'exprime comme combinaison linéaire de :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $A = B - iC - D$.

On peut généraliser la notion de combinaison linéaire en introduisant celle de famille presque nulle.

Définition (famille presque nulle) Soit I un ensemble non vide.

- ⋆ Une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est dite *presque nulle* s'il existe un sous-ensemble *fini* J de I tel que :

$$\forall i \in I \setminus J, \qquad \lambda_i = 0$$

- ⋆ On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.

Définition (combinaison linéaire d'une famille de vecteurs) Soit $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E et $u \in E$. On dit que u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ presque nulle telle que $u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$.

Exemple Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II – Sous-espaces vectoriels

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Définition

Définition (sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel) Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

$(\text{Sev})_1$ $0_E \in F$

$(\text{Sev})_2$ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\ x+\lambda y \in F$

On dit que l'ensemble F est stable par combinaisons linéaires.

Exemple On vérifie facilement que $\{0_E\}$ et E sont des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E (dits *triviaux*). On dit aussi que $\{0_E\}$ est l'*espace nul.*

L'intérêt de cette notion réside dans le propriété suivante.

Proposition Si $F \in \mathscr{P}(E)$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $0_F = 0_E$.

Démonstration On vérifie facilement que les propriétés $(\text{Ev})_1$ à $(\text{Ev})_5$ sont vérifiées. ■

Remarque : ainsi, pour montrer qu'un ensemble a une structure d'espace vectoriel, il suffira de montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel classique.

Exemple L'ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-y-z=0\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration Comme $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et puisque $F \subset \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ⋆ On a $0-0-0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z),(a,b,c) \in F$. Montrons que $(x,y,z)+\lambda(a,b,c) \in F$. On a :

$$(x,y,z)+\lambda(a,b,c) = (x+\lambda a, y+\lambda b, z+\lambda c)$$

et :

$$\begin{aligned}(x+\lambda a)-(y+\lambda b)-(z+\lambda c) &= (x-y-z)+\lambda(a-b-c)\\ &= 0+\lambda\times 0 \qquad (\text{car } (x,y,z),(a,b,c)\in F)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $(x,y,z)+\lambda(a,b,c) \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ■

2) Exemples

(a) Espace de polynômes $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \,\middle|\, \deg(P) \leqslant n\right\}$$

Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration ⋆ Clairement, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ est de degré $-\infty$. Ce degré est bien inférieur ou égal à n. Donc $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$.

⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après les propriétés du degré, on a :

$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant \max(n, n) = n$$

car on sait que $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$ (puisque P et Q appartiennent à $\mathbb{K}_n[X]$). Donc $P+Q \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus :

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(P) & \text{si } \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a $\deg(\lambda P) \leqslant n$ donc $\lambda P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. ■

(b) Droites vectorielles

Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$.

Définition (droite vectorielle) On appelle *droite vectorielle de E engendrée (ou dirigée) par le vecteur v* le sous-ensemble de E suivant :

$$\mathscr{D}_v = \left\{\lambda v \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K}\right\}$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, si $v = (1, 0)$, alors $\mathscr{D}_v = \left\{(\lambda, 0) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ est l'axe des abscisses.

Proposition La droite vectorielle $\mathscr{D}_v$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Tout d'abord, il est clair que $\mathscr{D}_v \subset E$.

⋆ On a $0_E = 0 \cdot v$ (et $0 \in \mathbb{K}$) donc $0_E \in \mathscr{D}_v$.

⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathscr{D}_v$. Il existe alors $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_x v$ et $y = \lambda_y v$. Par conséquent :

$$x + \lambda y = \lambda_x v + \lambda(\lambda_y v) = (\lambda_x + \lambda\lambda_y)v \in \mathscr{D}_v$$

Ainsi, $\mathscr{D}_v$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Remarques :

⋆ Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion de droite (vectorielle) usuelle vue dans les classes antérieures.

⋆ Si $v = 0_E$, alors $\mathscr{D}_v = \{0_E\}$.

(c) Plans vectoriels

Soient u et v deux vecteurs *non colinéaires* de E (ce qui signifie qu'il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$).

Définition (plan vectoriel) On appelle plan vectoriel de E engendré par les vecteurs u et v le sous-ensemble de E suivant :

$$\mathscr{P}_{u,v} = \left\{\lambda u + \mu v \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

Comme pour les droites vectorielles, on montre facilement que $\mathscr{P}_{u,v}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion de plan (vectoriel) vu en terminale.

✎✎✎ **Exercice**

1. Montrer que $K = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[X] \,\middle|\, \mathrm{P}' - 2X\,\mathrm{P} = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $L = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, M + M^{\mathrm{T}} = 0_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire *homogène* :

$$AX = 0_{\mathbb{K}^n}$$

d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Démonstration Posons $\mathrm{Sol} = \left\{X \in \mathbb{K}^p \,\middle|\, AX = 0_{\mathbb{K}^n}\right\}$.

- ⋆ Tout d'abord, il est clair que $\mathrm{Sol} \subset \mathbb{K}^p$.
- ⋆ Ensuite, $A \times 0_{\mathbb{K}^p} = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc $0_{\mathbb{K}^p} \in \mathrm{Sol}$.
- ⋆ Enfin, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X, Y \in \mathrm{Sol}$, on a :

$$A(X + \lambda \cdot Y) = AX + \lambda \cdot AY = 0_{\mathbb{K}^n} + \lambda \cdot 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Ainsi, $X + \lambda Y \in \mathrm{Sol}$.

Donc Sol est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. ■

(e) D'autres exemples

- ⋆ L'ensemble c des suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- ⋆ Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et Ω un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\Omega}$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- ⋆ L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

On rappelle que, si I est un ensemble non vide et si $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E, alors l'intersection des ensembles de cette famille est définie par :

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall i \in I,\ x \in F_i\right\}$$

Proposition (intersection de sous-espaces vectoriels) Soient I un ensemble non vide et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Tout d'abord, il est clair que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i \subset E$.

- ⋆ Pour tout $i \in I$, on a $0_E \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in \displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$. Soit $i \in I$. Alors $x, y \in F_i$ donc $x + \lambda y \in F_i$ (puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E). Ainsi, $x + \lambda y \in \displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$.

Finalement, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Attention : le résultat précédent est faux pour la réunion.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $i = (1,0)$ et $j = (0,1)$. On considère les droites vectorielles $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_j$. Si $\mathscr{D}_i \cup \mathscr{D}_j$ était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors on aurait :

$$i + j = (1,1) \in \mathscr{D}_i \cup \mathscr{D}_j,$$

ce qui n'est pas le cas.

4) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie quelconque de E.

Définition ⋆ L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A est appelée le *sous-espace vectoriel de E engendré par A*. On le note $\mathrm{Vect}(A)$. On a donc :

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ SEV de } E \\ A \subset F}} F$$

⋆ Si $A = (a_i)_{i \in I} \in E^I$ est une famille de vecteurs de E, on note aussi :

$$\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(a_i)_{i \in I}$$

Remarques :

- ⋆ En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E, l'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ⋆ Par définition de $\mathrm{Vect}(A)$, on a clairement $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.
- ⋆ Par définition, $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, *i.e.* :

$$\forall F \text{ SEV de } E, \qquad A \subset F \implies \mathrm{Vect}(A) \subset F$$

Exemple ⋆ $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \mathrm{Vect}(\{0_E\}) = E$ et $\mathrm{Vect}(E) = E$

- ⋆ Si v est un vecteur de E, alors $\mathrm{Vect}(\{v\}) = \mathscr{D}_v$.
- ⋆ Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathscr{P}_{u,v}$.

On dispose d'une caractérisation plus pratique de $\mathrm{Vect}(A)$.

Proposition Si $A = (a_i)_{i \in I} \in E^I$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de A, *i.e.* :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$$

Démonstration On note F l'ensemble des vecteurs de E qui s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de A, *i.e.* :

$$F = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$$

- ⋆ On vérifie facilement que F est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Par définition de $\mathrm{Vect}(A)$, on a donc l'inclusion $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
- ⋆ Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Pour tout $i \in I$, on a $a_i \in A$ et $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $a_i \in \mathrm{Vect}(A)$. Comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i a_i \in \mathrm{Vect}(A)$. Ainsi, on a l'inclusion $F \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Par double inclusion, on a bien l'égalité $F = \mathrm{Vect}(A)$. ■

Exemple ⋆ $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big)$

Démonstration On a :

$$\mathbb{R}^2 = \big\{(x,y) \,\big|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} = \big\{x(1,0)+y(0,1) \big|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,0),(0,1)\big),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

⋆ $\mathbb{C}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$

Démonstration Par définition de $\mathbb{C}_2[X]$, on a :

$$\mathbb{C}^2[X] = \big\{aX^2 + bX + c \,\big|\, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\big\} = \mathrm{Vect}(1, X, X^2),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

⋆ $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

Démonstration On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\} &= \left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : pour montrer que $F \in \mathscr{P}(E)$ est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de trouver une partie A de E telle que $F = \mathrm{Vect}(A)$.

Exemple L'ensemble $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - 2y + z = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration ⋆ Tout d'abord, on a bien $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition de F.

⋆ Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F \iff x - 2y + z = 0 &\iff x = 2y - z\\ &\iff (x,y,z) = (2y - z, y, z)\\ &\iff (x,y,z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)\\ &\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)\end{aligned}$$

On a donc $F = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$.
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemple L'ensemble $G = \big\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[X] \,\big|\, X\,\mathrm{P}' = \mathrm{P}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration ⋆ Tout d'abord, on a bien $G \subset \mathbb{R}_2[X]$ par définition de G.

⋆ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. On a $P' = 2aX + b$ et :

$$\begin{aligned} P \in G \iff P = XP' &\iff aX^2 + bX + c = X(2aX + b) \\ &\iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff \begin{cases} a = 2a \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \qquad \text{(par unicité des coefficients d'un polynôme)} \\ &\iff a = c = 0 \\ &\iff P = bX \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}(X) \end{aligned}$$

Donc $G = \mathrm{Vect}(X)$.
On peut donc conclure que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. ■

Exemple L'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques de taille 2×2 à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration ⋆ On a clairement $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

⋆ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \iff A^{\mathrm{T}} = A \iff b = c \iff A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ \iff A &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'égalité :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2})$$

Donc $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. ■

Proposition Soient A et B deux parties de E.

- ⋆ Si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
- ⋆ Si $a \in A$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de $A \setminus \{a\}$, *i.e.* si $a \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$, alors :

$$\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$$

Démonstration ⋆ On sait que $A \subset B \subset \mathrm{Vect}(B)$. Or $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

⋆ Soit $a \in A$ tel que $a \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$.

$\boxed{\subset}$ On sait que $a \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$ donc $\{a\} \subset \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$. De plus, par définition de l'espace vectoriel engendré, on a aussi $A \setminus \{a\} \subset \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$. Par conséquent :

$$\{a\} \cup (A \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\}) \qquad i.e. \qquad A \subset \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$$

Comme $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, on a l'inclusion :

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$$

$\boxed{\supset}$ On a $A \setminus \{a\} \subset A$ donc, d'après le premier point, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}(A \setminus \{a\}) \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Par double inclusion, on a bien l'égalité annoncée. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, on a $(1, 2, 1) = (1, 0, 1) + 2(0, 1, 0)$, donc :

$$\mathrm{Vect}\big((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\big) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big)$$

III – Familles remarquables de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble non vide.

1) Famille libre, famille génératrice, base

Définition (famille libre, famille génératrice, base) Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E (*i.e.* : $\forall i \in I,\ e_i \in E$).

- ⋆ On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E si :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Autrement dit, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

- ⋆ On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre si pour tout famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ presque nulle de scalaires, on a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \Longrightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}})$$

Autrement dit, la famille $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire des vecteurs de la famille qui donne le vecteur nul 0_E est celle dont tous les scalaires sont nuls.

- ⋆ On dit que $\mathscr{F}$ est une base de E si $\mathscr{F}$ est à la fois une famille libre et génératrice de E.

Exemple ⋆ Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est libre.
- ⋆ La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- ⋆ La famille $(1, X, X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ⋆ La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{C}[X]$.

Exemple Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les éléments :

$$c : x \longmapsto \cos(x), \qquad s : x \longmapsto \sin(x) \qquad \text{et} \qquad t : x \longmapsto x\cos(x)$$

La famille $\mathscr{G} = (c, s, t)$ est libre.

Démonstration Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha c + \beta s + \gamma t = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha c(x) + \beta s(x) + \gamma t(x) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$. Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \beta\sin(x) + \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta = 0$. Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \gamma x\cos(x) = 0$$

En évaluant enfin en $x = \pi$, on obtient $-\gamma\pi = 0$, c'est-à-dire $\gamma = 0$. Finalement, la famille (c, s, t) est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ■

Remarques :
- ⋆ La famille $\mathscr{F} = \varnothing$ est libre.
- ⋆ Si $u \in E \setminus \{0_E\}$, alors la famille (u) est libre.

  Démonstration Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, si $\lambda u = 0_E$, alors $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$, *i.e.* $\lambda = 0$. ■

Proposition Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, *i.e.* :

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Démonstration Soit $x \in E$. On traite séparément l'existence et l'unicité.

- ⋆ **Existence :** comme $\mathscr{B}$ est une base de E, elle est une famille génératrice de E. Ainsi :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$$

On a $x \in E = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ donc il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$.

- ⋆ **Unicité :** soient $(\lambda_i)_{i\in I}, (\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ deux familles presque nulles de scalaires telles que :

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$$

Montrons que, pour tout $i \in I$, on a $\lambda_i = \mu_i$. On a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i \qquad \text{donc} \qquad \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

Or la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre (puisqu'il s'agit d'une base de E) donc :

$$\forall i \in I, \qquad \lambda_i - \mu_i = 0 \qquad i.e. \qquad \lambda_i = \mu_i,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Vocabulaire : une famille qui n'est pas libre est aussi dite *liée*. Ainsi, une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que :

- ⋆ $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$;
- ⋆ il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Avec ces notations, on a :

$$e_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} \lambda_i e_i$$

Ainsi, une famille est liée si et seulement s'il existe un vecteur de la famille qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exemple Toute famille de vecteurs de E qui comporte le vecteur nul est liée.

Définition (coordonnées d'un vecteur dans une base) Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $u \in E$. L'unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que :

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

est appelée famille des coordonnées du vecteur de u dans la base $\mathscr{B}$.

2) Bases des espaces vectoriels classiques

(a) Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad e_i = (\delta_{i,j})_{j \in [\![1,n]\!]}$$

est une base de E (appelée *base canonique*) de $\mathbb{K}^n$.

Exemple La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$.

(b) Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne qui vaut 1. On remarque que :

$$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\big(\big\{\mathrm{E}_{i,j} \,\big|\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\big\}\big)$$

On vérifie facilement la liberté de la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. Cette famille est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille constituée des matrices :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Espaces de polynômes

- ⋆ Comme tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}[X]$.
- ⋆ De même, pour tout entier naturel n, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.

On dispose d'une condition suffisante qui garantit la liberté d'une famille de polynômes.

Proposition Soient I un ensemble non vide et $(P_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts (on dit que la famille est *échelonnée en degré*). Alors la famille $(P_i)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant que la famille $(P_i)_{i\in I}$ est liée. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{K}^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} P_{i_k} = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Quitte à ré-indexer les polynômes de la famille, on peut supposer que :

$$\deg(P_{i_1}) < \deg(P_{i_2}) < \cdots < \deg(P_{i_n})$$

On a :

$$\lambda_{i_n} P_{i_n} = -\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} P_{i_k}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\deg(\lambda_{i_k} P_{i_k}) = \deg(P_{i_k})$ (car λ_{i_k}) et, puisque les polynômes sont de degrés deux à deux distincts,

$$\deg\left(-\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} P_{i_k}\right) = \max\big(\deg(P_{i_1}, \dots, \deg(P_{i_{n-1}})\big) = \deg(P_{i_{n-1}}) < \deg(P_{i_n}),$$

ce qui contredit l'égalité précédente. ■

Exemple La famille $\mathscr{F} = (X, X^2+1, -X^3+1, 2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Démonstration La famille $\mathscr{F}$ est composée de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ de degrés deux à deux distincts. Celle famille est donc libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. ■

3) Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition (sur les familles libres) Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E.

- ⋆ Toute sous-famille $(e_i)_{i\in J}$ (où $J \subset I$) de $\mathscr{F}$ est libre.
- ⋆ Soit $x \in E$. Si $x \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, alors la famille $(\mathscr{F}, x)$ est libre.

Démonstration ⋆ Soit $(\lambda_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^{(J)}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{i\in J} \lambda_i e_i = 0_E$. Ceci peut se réécrire :

$$\sum_{i\in J} \lambda_i e_i + \sum_{i\in I\setminus J} 0 \cdot e_i = 0_E$$

Or la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre donc, pour tout $i \in J$, on a $\lambda_i = 0$. La famille $(e_i)_{i\in J}$ est donc libre.

⋆ Soit $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Montrons que la famille $\big((e_i)_{i\in I}, x\big)$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On suppose que :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i + \mu x = 0_E$$

Si $\mu \neq 0$, alors on obtient que x est combinaison linéaire des vecteurs e_i ($i \in I$), ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $\mu = 0_{\mathbb{K}}$, et il reste $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$. On conclut en utilisant la liberté de $\mathscr{F}$. ■

Proposition (sur les familles génératrices) Soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

- ⋆ Toute sur-famille $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$ de $\mathscr{F}$ est génératrice de E.
- ⋆ Soit $x \in E$ tel que $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F} \setminus \{x\})$. Alors $(\mathscr{F}, x)$ est une famille génératrice de E.

Démonstration ⋆ Comme $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Par hypothèse sur la famille $\mathscr{F}$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = E$ et comme E est un espace vectoriel, on a aussi l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subset E$. Ainsi :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subset E$$

Par double inclusion, il vient $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. La famille $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E.

⋆ Cette propriété provient de l'égalité $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}, x)$, déjà démontrée. ■

IV – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Dans cette partie, on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels F et G de E.

1) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition (somme de F et G) On définit la somme de F et G, notée $F + G$, par :

$$F + G = \big\{x \in E \,\big|\, \exists\, (x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G\big\},$$

i.e. :

$$F + G = \big\{x_F + x_G \,\big|\, (x_F, x_G) \in F \times G\big\}$$

Par définition, $F+G$ est donc un sous-ensemble de E.

Proposition (structure de $F+G$) L'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Tout d'abord, on a $F+G \subset E$.

- ⋆ Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_E \in F \cap G$ donc $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$.
- ⋆ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F+G$. Par définition de $F+G$, il existe $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$ tels que :

$$x = x_F + x_G \qquad \text{et} \qquad y = y_F + y_G$$

Ainsi :

$$x + \lambda y = (x_F + x_G) + \lambda(y_F + y_G) = (x_F + \lambda y_F) + (x_G + \lambda x_G)$$

Or $x_F, y_F \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E donc $x_F + \lambda y_F \in F$. De la même manière, on a $x_G + \lambda y_G \in G$. Ainsi, $x + \lambda y \in F+G$.

Finalement, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les vecteurs $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ et $w = (0,-1)$, ainsi que les droites vectoriels $\mathscr{D}_u$, $\mathscr{D}_v$ et $\mathscr{D}_w$.

- ⋆ On a :

$$\mathscr{D}_u + \mathscr{D}_v = \left\{\lambda(1,0) + \mu(0,1) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\lambda, \mu) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$$

- ⋆ De plus :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_v + \mathscr{D}_w = \left\{\lambda(0,1) + \mu(0,-1) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} &= \left\{(0, -\lambda - \mu) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(0, \theta) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathscr{D}_v\end{aligned}$$

2) Somme directe

Définition (somme directe de deux sous-espaces) On dit que F et G sont *en somme directe* si tout vecteur de $F+G$ se décompose d'une unique manière comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, *i.e.* si :

$$\forall z \in F+G,\ \exists!\,(x,y) \in F \times G,\ z = x + y$$

Dans ce cas, l'ensemble $F+G$ est alors noté $F \oplus G$ pour préciser que la somme est directe.

Exemple Si $v = (0,1)$ et $w = (0,-1)$, alors les droites vectorielles $\mathscr{D}_v$ et $\mathscr{D}_w$ ne sont pas en somme directe car $v \in \mathscr{D}_v + \mathscr{D}_w$ et :

$$v = v + 0_{\mathbb{R}^2} = 0_{\mathbb{R}^2} + (-w)$$

Le vecteur v se décompose donc de deux manières différentes comme la somme d'un vecteur de $\mathscr{D}_v$ et d'un vecteur de $\mathscr{D}_w$. Ces deux sous-espaces vectoriels ne sont donc pas en somme directe.

Le résultat suivant permet en pratique de montrer que deux sous-espaces vectoriels de E sont en somme directe.

Proposition Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que E et F sont en somme directe. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a clairement l'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap G$. Soit maintenant $x \in F \cap G$. Alors :

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$$

En particulier, $x \in F + G$ et, par unicité de la décomposition, on a nécessairement $x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, on peut conclure que $F \cap G = \{0_E\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $z \in F + G$. On suppose qu'il existe $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ tels que :

$$z = x + y \qquad \text{et} \qquad z = x' + y'$$

Alors :

$$x - x' = y' - y \in F \cap G$$

car F et G sont des espaces vectoriels. Or $F \cap G = \{0_E\}$ donc $x - x' = 0_E$ et $y' - y = 0_E$, *i.e.* $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, F et G sont en somme directe. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les espaces $F = \mathrm{Vect}(\cos)$ et $G = \mathrm{Vect}(\sin)$ sont en somme directe.

Démonstration Soit $f \in \mathrm{Vect}(\cos) \cap \mathrm{Vect}(\sin)$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f = \lambda \cos = \mu \sin$, *i.e.* tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lambda \cos(x) = \mu \sin(x)$$

En évaluant en 0, on obtient $\lambda = 0$, d'où l'on tire que $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Ainsi, on a l'inclusion $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$ et comme l'inclusion réciproque est immédiate, on a $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$. Autrement dit, F et G sont en somme directe dans E. ■

3) Sous-espaces supplémentaires

Définition Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Remarque :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff \forall x \in E,\ \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G \\ &\iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, si $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$, alors $\mathbb{R}^2 = \mathscr{D}_u \oplus \mathscr{D}_v$.

Démonstration Comme $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels :

$$\mathscr{P} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - y + z = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$$

sont supplémentaires.

Démonstration Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que :

$$\exists\,!\,(Y, Z) \in \mathscr{P} \times \mathscr{P},\ (x, y, z) = Y + Z$$

en raisonnant par analyse-synthèse.

- ⋆ **Analyse :** supposons qu'il existe $(Y, Z) \in \mathscr{P} \times \mathscr{P}$ tel que $(x, y, z) = Y + Z$. Comme $Z \in \mathscr{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Z = \lambda(1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Ainsi :

  $$Y = (x, y, z) - Z = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda)$$

  et on sait que $Y \in \mathscr{P}$ donc :

  $$(x - \lambda) - (y - \lambda) + (z - \lambda) = 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \lambda = x - y + z$$

  Ainsi, $Z = (x - y + z, x - y + z, x - y + z)$ et $Y = (y - z, -x + 2y - z, -x + y)$. Les vecteurs Y et Z sont donc uniquement déterminés.
- ⋆ **Synthèse :** considérons les vecteurs $Y = (y - z, -x + 2y - z, -x + y)$ et $Z = (x - y + z, x - y + z, x - y + z)$. On a :

  $$Z = \underbrace{(x - y + z)}_{\in \mathbb{R}}(1, 1, 1) \in \mathscr{D} \qquad \text{et} \qquad y - z - (-x + 2y - z) - x + y = 0$$

  donc $Y \in \mathscr{P}$. Enfin, on a bien l'égalité $(x, y, z) = Y + Z$. Ceci prouve l'existence de la décomposition. ■

Finalement :

$$\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$$