

Objectifs du chapitre :

- Maîtriser les notions de domaine de définition, parité et périodicité
- Calculer des limites de fonctions (en l'infini, en un point, formes indéterminées)
- Exploiter la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires (TVI)
- Dériver des fonctions composées et appliquer les règles opératoires
- Connaître les propriétés des fonctions \ln , \exp et puissances
- Mener une étude complète de fonction (variations, asymptotes, représentation)
- Déterminer un développement limité et l'exploiter (tangente, position de la courbe)
- Étudier et tracer une courbe paramétrée (fonctions polynomiales de degré ≤ 2)
- Modéliser des phénomènes physiques par des fonctions (décroissance, optimisation)

Situation professionnelle**Thermique du bâtiment — Loi de refroidissement**

Un ingénieur thermicien étudie le refroidissement d'un local technique après l'arrêt du système de chauffage. La température intérieure suit une loi de la forme :

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-kt}$$

où $T_0 = 22 \text{ °C}$ est la température initiale, $T_{\text{ext}} = 5 \text{ °C}$ la température extérieure et $k > 0$ un coefficient dépendant de l'isolation.

Problème : Au bout de combien de temps la température descend-elle sous 12 °C ? Quelle est la vitesse de refroidissement à un instant donné ? Pour répondre, il faut maîtriser les *fonctions d'une variable réelle* : limites, continuité, dérivation, exponentielle.

1. Rappels sur les fonctions

1.1. Domaine de définition

DÉFINITION — DOMAINE DE DÉFINITION

Le **domaine de définition** \mathcal{D}_f d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe (a un sens dans \mathbb{R}).

MÉTHODE — DÉTERMINER UN DOMAINE DE DÉFINITION

Vérifier que :

- Aucun **dénominateur** ne s'annule
- L'expression sous une **racine carrée** (ou d'indice pair) est ≥ 0
- L'argument d'un **logarithme** est strictement positif

EXEMPLE

Déterminer \mathcal{D}_f pour $f(x) = \ln(2x - 3) + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

- Logarithme : $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$
- Racine au dénominateur : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ (et non nul, vérifié car > 0)

Intersection : $\mathcal{D}_f =]\frac{3}{2}; +\infty[$.

MINI-EXERCICE :

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x - 5}$.

1.2. Parité

DÉFINITION — PARITÉ

Soit f définie sur un domaine \mathcal{D} symétrique par rapport à 0.

- f est **paire** si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$ — courbe symétrique par rapport à l'axe (Oy)
- f est **impaire** si $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$ — courbe symétrique par rapport à l'origine O

PROPRIÉTÉ

La parité permet de réduire l'étude d'une fonction à $[0; +\infty[$ puis de compléter par symétrie.

1.3. Périodicité

DÉFINITION — PÉRIODICITÉ

f est **périodique de période** $T > 0$ si $\forall x \in \mathcal{D}, f(x + T) = f(x)$.

L'étude se réduit à un intervalle de longueur T .

EXEMPLE

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est impaire et périodique de période 2π . Son étude se réduit à $[0; \pi]$.

2. Limites de fonctions

2.1. Limites en l'infini

DÉFINITION — LIMITE EN $+\infty$

On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de ℓ pour x assez grand. On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Si $f(x)$ croît sans borne, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

LIMITES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$
x^n ($n \geq 1$)	$+\infty$	$(-1)^n \cdot \infty$
$\frac{1}{x^n}$	0	0
\sqrt{x}	$+\infty$	non définie
e^x	$+\infty$	0
$\ln(x)$	$+\infty$	non définie

2.2. Limites en un point

DÉFINITION — LIMITE EN UN POINT A

On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $f(x)$ se rapproche de ℓ quand x se rapproche de a (sans nécessairement que $f(a)$ existe).

OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors :

- $\lim(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim(f \times g) = \ell \times \ell'$
- $\lim \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$

Ces règles s'étendent aux cas où ℓ ou ℓ' est infini, **sauf dans les formes indéterminées.**

2.3. Formes indéterminées

ATTENTION — FORMES INDÉTERMINÉES

Les sept formes indéterminées sont :

$$\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0 \times \infty ; \infty - \infty ; 0^0 ; 1^\infty ; \infty^0$$

On ne peut pas conclure directement : il faut lever l'indétermination (factorisation, conjugaison, croissances comparées, règle de L'Hôpital...).

MÉTHODE — LEVER UNE FORME INDÉTERMINÉE $\frac{\infty}{\infty}$

Pour un quotient de polynômes,
factoriser par le terme de plus haut degré
au numérateur et au dénominateur.

EXEMPLE

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7}$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x^2 :

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7} = \frac{x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{7}{x^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$$

Croissances comparées (à retenir) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \geq 1)$$

L'exponentielle l'emporte sur toute puissance ; toute puissance l'emporte sur le logarithme.

EXEMPLE — CROISSANCES COMPARÉES

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$: forme $\infty \times 0$.

On écrit $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$. Par croissances comparées, e^x l'emporte sur x^2 , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

MINI-EXERCICE :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 2x + 4}$.

3. Continuité

DÉFINITION — CONTINUITÉ EN UN POINT

f est continue en a si :

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I .

FONCTIONS CONTINUES USUELLES

Les fonctions polynomiales, rationnelles (sur leur domaine), $\sqrt{\quad}$, \sin , \cos , \exp , \ln sont continues sur leur domaine de définition.

Toute somme, produit, quotient (dénominateur non nul) ou composée de fonctions continues est continue.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)

Si f est **continue sur** $[a; b]$ et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe **au moins un** $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

COROLLAIRE — TVI ET STRICTE MONOTONIE

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a; b]$.

EXEMPLE — APPLICATION DU TVI

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. f est continue (polynomiale) et strictement croissante sur \mathbb{R} (car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$).

$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. Par le TVI (corollaire), il existe un unique $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = 0$.

Par dichotomie : $f(0,68) \approx -0,006 < 0$ et $f(0,69) \approx 0,019 > 0$, donc $c \approx 0,68$.

4. Dérivation

4.1. Rappels

DÉFINITION — NOMBRE DÉRIVÉ

Le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$, est la limite (si elle existe) :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Géométriquement, c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a .

4.2. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
k (constante)	0	\mathbb{R}
x^n	$n x^{n-1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}_+^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}

4.3. Règles opératoires

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Opération	Dérivée
$k f$	$k f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' g + f g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' g - f g'}{g^2}$

4.4. Dérivée de fonctions composées

THÉORÈME — DÉRIVATION EN CHAÎNE

Si $f = g \circ u$ (c'est-à-dire $f(x) = g(u(x))$), alors :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Cas particuliers fondamentaux :

Fonction	Dérivée
$[u(x)]^n$	$n u'(x) [u(x)]^{n-1}$
$e^{u(x)}$	$u'(x) e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

EXEMPLE

Dériver $f(x) = e^{3x^2-1}$.

On pose $u(x) = 3x^2 - 1$, donc $u'(x) = 6x$.

$f(x) = e^{u(x)}$, d'où $f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = 6x e^{3x^2-1}$.

EXEMPLE

Dériver $g(x) = \ln(x^2 + 4)$.

On pose $u(x) = x^2 + 4$, donc $u'(x) = 2x$.

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 4}.$$

MINI-EXERCICE :

Dériver $h(x) = (2x + 1)^4$ puis $k(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

5. Fonctions logarithme népérien et exponentielle**5.1. Fonction exponentielle****DÉFINITION**

La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On la note \exp ou $x \mapsto e^x$.

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$
- $e^0 = 1$; $e^x > 0$ pour tout x

LIMITES FONDAMENTALES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5.2. Fonction logarithme népérien

DÉFINITION

Le **logarithme népérien** est la fonction réciproque de l'exponentielle :

$$\forall x > 0, y = \ln x \iff x = e^y$$

Domaine : $]0; +\infty[$. Image : \mathbb{R} .

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous $a, b > 0$:

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

LIMITES FONDAMENTALES

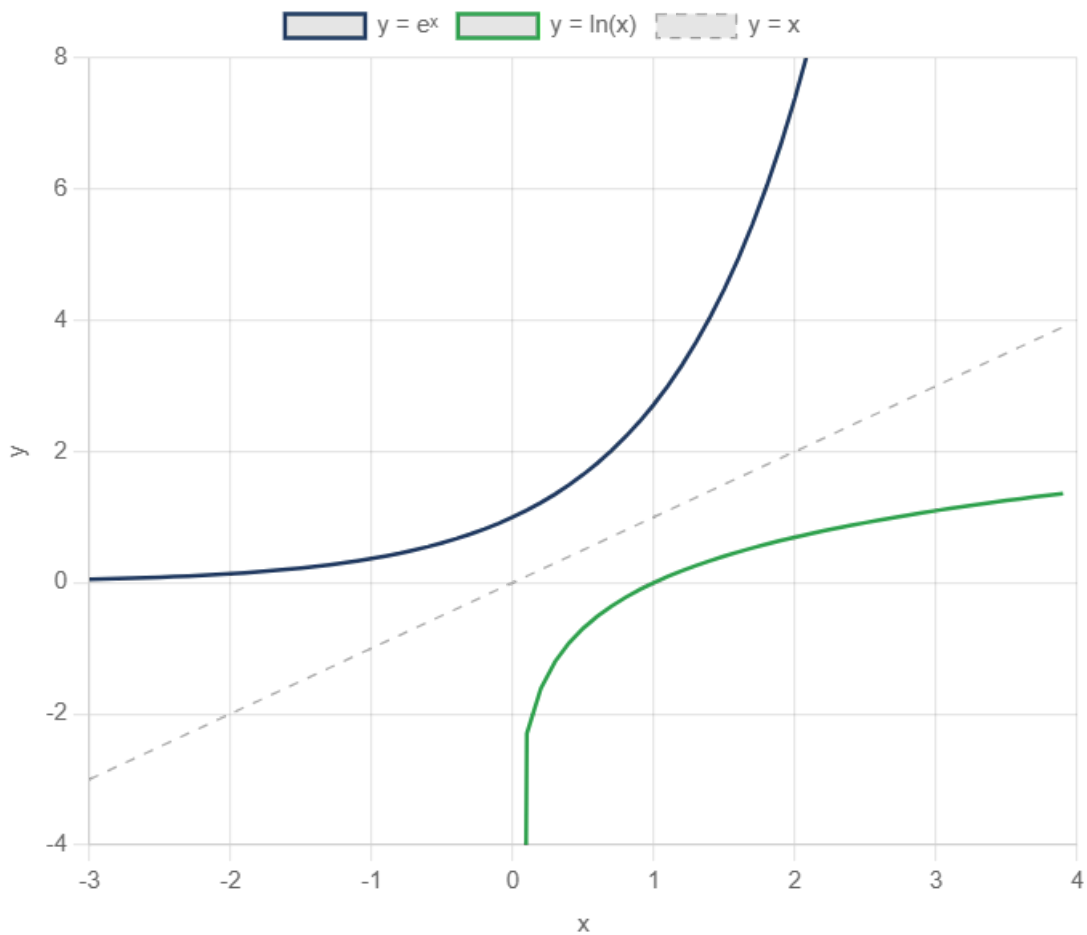
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Relation fondamentale :

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$$

Fonctions exponentielle et logarithme népérien



5.3. Résolution d'équations et inéquations

MÉTHODE — RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

- $e^{f(x)} = e^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$
- $e^{f(x)} = k > 0 \iff f(x) = \ln k$
- $\ln(f(x)) = \ln(g(x)) \iff f(x) = g(x)$ (avec $f(x) > 0, g(x) > 0$)
- $\ln(f(x)) = k \iff f(x) = e^k$ (avec $f(x) > 0$)

Pour les inéquations, utiliser le sens de variation (exp et ln strictement croissantes).

EXEMPLE

Résoudre $2e^{3x-1} = 10$.

$$e^{3x-1} = 5, \text{ donc } 3x - 1 = \ln 5, \text{ d'où } x = \frac{1 + \ln 5}{3} \approx 0,87.$$

MINI-EXERCICE :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(2x - 1) = 3$.

6. Fonctions puissances

DÉFINITION — FONCTION PUISSANCE X^A

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on définit :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Cette définition prolonge la notion de puissance entière à tout exposant réel.

PROPRIÉTÉS

Pour $x > 0$, $y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

DÉRIVÉE

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$$

EXEMPLE

Dériver $f(x) = x^{3/2}$ pour $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$

7. Étude complète de fonction

MÉTHODE — ÉTUDE COMPLÈTE

1. **Domaine de définition** \mathcal{D}_f
2. **Parité / périodicité** éventuelle (réduction du domaine d'étude)
3. **Limites** aux bornes du domaine — **asymptotes**
4. **Dérivée** $f'(x)$ — signe de f' — **tableau de variations**
5. **Points remarquables** : zéros de f , extrema, points d'inflexion
6. **Représentation graphique**

ASYMPTOTES

- Asymptote horizontale $y = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$
- Asymptote verticale $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
- Asymptote oblique $y = ax + b$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

EXEMPLE — ÉTUDE DE $F(X) = XE^{-X}$

1. **Domaine** : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. **Limites** :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées) — asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$ (car $x \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$)

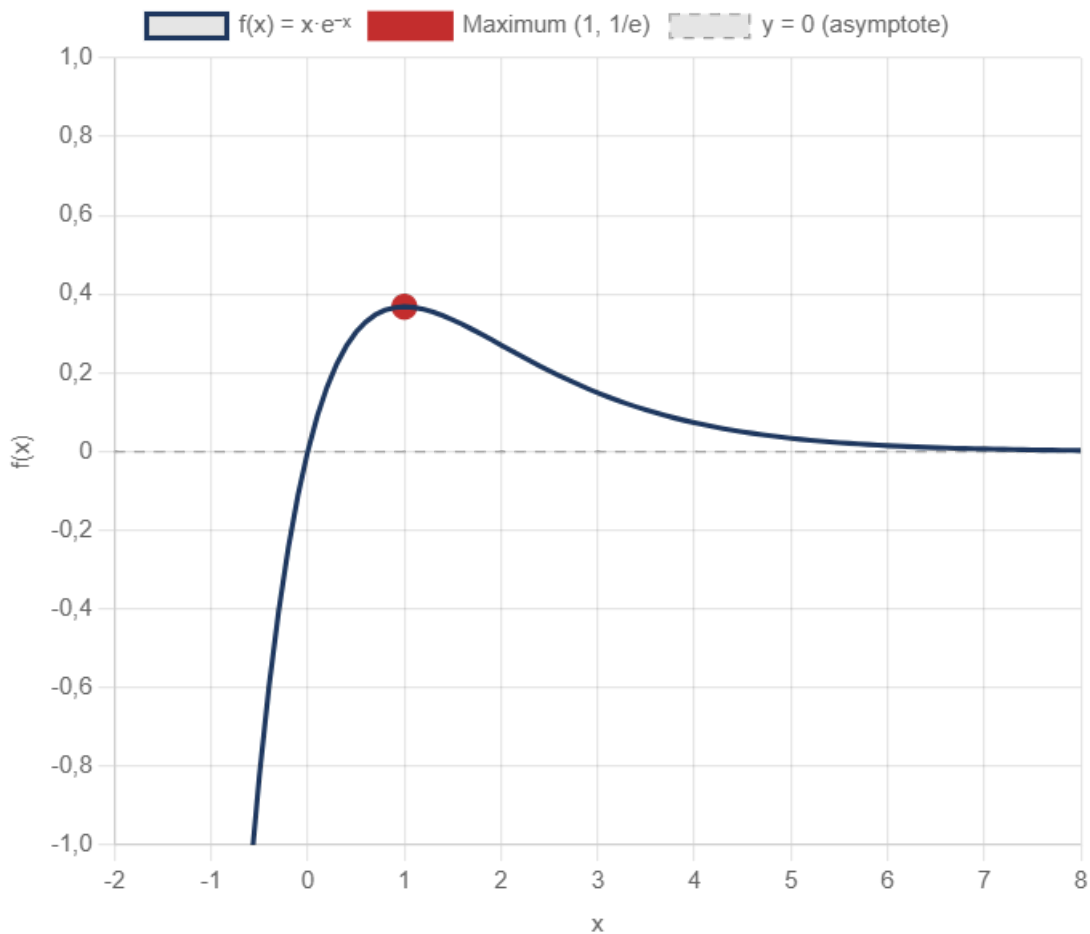
3. **Dérivée** : $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

- $f'(x) > 0$ si $x < 1$ — f croissante
- $f'(x) = 0$ si $x = 1$ — maximum
- $f'(x) < 0$ si $x > 1$ — f décroissante

4. **Maximum** : $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Étude de $f(x) = x \cdot e^{-x}$



8. Développements limités en 0 (Approximation locale)

8.1. Définition

DÉFINITION — DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre n** en 0 s'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Le polynôme $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est la **partie régulière** du DL, et $x^n \varepsilon(x)$ est le **reste**.

INTERPRÉTATION

Au voisinage de 0, la fonction $f(x)$ est **approchée par un polynôme**. Plus l'ordre n est élevé, meilleure est l'approximation. Le DL d'ordre 1 donne l'**approximation affine** (tangente).

8.2. DL usuels à connaître

Développements limités usuels au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

ATTENTION

Les DL ci-dessus sont valables **au voisinage de 0** uniquement. Pour un DL au voisinage d'un point $a \neq 0$, on pose $h = x - a$ et on écrit le DL en h au voisinage de 0.

8.3. Application : équation de la tangente

TANGENTE PAR DL

Le DL d'ordre 1 de f en 0 est $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$.

L'équation de la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse 0 est donc :

$$y = f(0) + f'(0)x$$

C'est la partie régulière du DL d'ordre 1.

EXEMPLE

Trouver l'équation de la tangente à $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

DL d'ordre 1 : $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$.

Tangente : $y = 1 + x$.

8.4. Position de la courbe par rapport à la tangente

MÉTHODE — POSITION COURBE/TANGENTE

On écrit le DL d'ordre 2 (ou plus) de $f(x)$. La différence $f(x) - y_T(x)$ (où y_T est la tangente) est donnée par les termes de degré ≥ 2 du DL :

- Si le premier terme non nul après la tangente est $a_2 x^2$ avec $a_2 > 0$: la courbe est **au-dessus** de la tangente au voisinage de 0
- Si $a_2 < 0$: la courbe est **en dessous** de la tangente
- Si $a_2 = 0$ et le premier terme non nul est de degré impair : **point d'inflexion** (la courbe traverse la tangente)

EXEMPLE — POSITION POUR E^x

DL d'ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$.

Tangente : $y = 1 + x$. Donc $f(x) - y_T = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \approx \frac{x^2}{2} > 0$ au voisinage de 0.

La courbe de e^x est **au-dessus** de sa tangente en 0 (ce qui est cohérent avec la convexité de l'exponentielle).

8.5. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

MÉTHODE — DÉTERMINER UN DL AVEC UN LOGICIEL

En pratique, les développements limités se calculent à l'aide d'un **logiciel de calcul formel**

(CAS) :

- **Python (SymPy)** : `from sympy import *; x = symbols('x');`
`series(exp(x), x, 0, 5)`
- **GeoGebra CAS** : commande `TaylorPolynomial(f, 0, n)`
- **Calculatrice** : menu *Calcul formel* → *Développement de Taylor*

Le logiciel fournit la partie régulière du DL à l'ordre souhaité, que l'on peut ensuite exploiter pour l'étude locale.

EXEMPLE — VÉRIFICATION PAR LOGICIEL

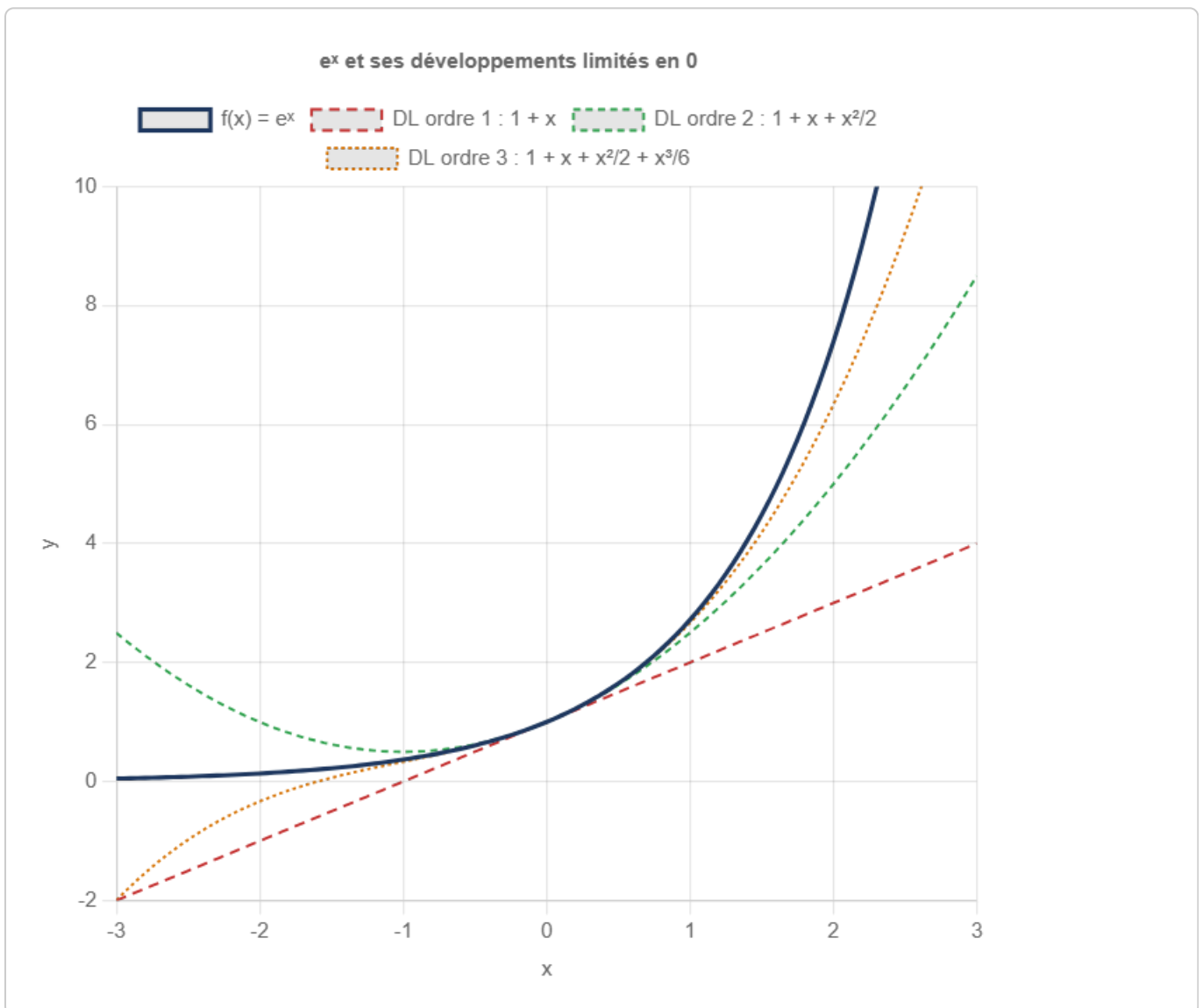
On souhaite le DL d'ordre 4 de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en 0.

On sait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$. En posant $u = -x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

Un logiciel confirme : `series(1/(1+x**2), x, 0, 5)` donne $1 - x^2 + x^4 + O(x^5)$.

8.6. Visualisation : fonction et ses approximations



Comparaison de e^x avec ses DL d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0.

À retenir sur les DL :

- Un DL d'ordre n approche $f(x)$ par un polynôme de degré n au voisinage de 0
- DL d'ordre 1 = tangente ; DL d'ordre 2 = position courbe/tangente
- Connaître les DL usuels de e^x , $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$

9. Courbes paramétrées

9.1. Définition

DÉFINITION — COURBE PARAMÉTRÉE

Une **courbe paramétrée** dans le plan est définie par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

où f et g sont des fonctions d'une variable réelle t (le **paramètre**) et I est un intervalle de \mathbb{R} .

À chaque valeur de t , on associe le point $M(t) = (f(t), g(t))$ du plan.

REMARQUE

Contrairement à une courbe $y = f(x)$, une courbe paramétrée peut se recouper et ne passe pas nécessairement le « test de la droite verticale ». Le paramètre t représente souvent le **temps** (trajectoire d'un objet).

9.2. Tableau de variation conjoint

MÉTHODE — CONSTRUIRE UN TABLEAU DE VARIATION CONJOINT

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$
2. Étudier le signe de $f'(t)$ (variations de x) et de $g'(t)$ (variations de y)
3. Construire un tableau à trois lignes :
 - Ligne 1 : valeurs de t
 - Ligne 2 : variations de $x = f(t)$ (flèches ↗ ou ↘)
 - Ligne 3 : variations de $y = g(t)$ (flèches ↗ ou ↘)
4. En combinant les deux lignes, on déduit la **direction de parcours** de la courbe

9.3. Vecteur tangent

DÉFINITION — VECTEUR TANGENT

En un point $M(t)$ de la courbe, le **vecteur tangent** (ou vecteur dérivé) est :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur indique la direction de la tangente à la courbe et le sens de parcours.

ATTENTION — POINT SINGULIER

Si $f'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) = 0$ simultanément, le vecteur tangent est nul : on parle de **point singulier**. L'étude de la tangente nécessite alors un calcul plus approfondi (DL du paramétrage).

ÉQUATION DE LA TANGENTE

Si $f'(t_0) \neq 0$, la tangente au point $M(t_0) = (x_0, y_0)$ a pour pente :

$$p = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

et son équation est :

$$y - y_0 = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - x_0)$$

9.4. Construction pas à pas

MÉTHODE — TRACER UNE COURBE PARAMÉTRÉE

1. **Déterminer l'intervalle d'étude** et les éventuelles symétries
2. **Calculer les dérivées** $f'(t)$ et $g'(t)$, trouver leurs zéros
3. **Construire le tableau de variation conjoint**
4. **Calculer les coordonnées** des points remarquables (extrémités, points où $f' = 0$ ou $g' = 0$)
5. **Tracer les vecteurs tangents** en quelques points clés
6. **Relier les points** en respectant le sens de parcours et les tangentes

9.5. Exemple : trajectoire parabolique

Contexte BTS — Arc parabolique en architecture

Un architecte dessine un **arc parabolique** pour la structure d'un hangar de stockage. La forme de l'arc est décrite par un paramétrage où t représente un paramètre de position le long de l'arc.

EXEMPLE — COURBE PARAMÉTRÉE POLYNOMIALE

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = -t^2 + 4 \end{cases} \quad t \in [-3; 3]$$

1. Dérivées : $x'(t) = 2$ et $y'(t) = -2t$.

$x'(t) = 2 > 0$ pour tout t : x est toujours croissante.

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. $y'(t) > 0$ si $t < 0$, $y'(t) < 0$ si $t > 0$.

2. Points remarquables :

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	-5	0	3	4	3	0	-5

3. Vecteur tangent en $t = 0$: $\vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ — tangente horizontale au sommet.

Vecteur tangent en $t = 1$: $\vec{V}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ — pente $\frac{-2}{2} = -1$.

4. Équation cartésienne : De $x = 2t$, on tire $t = \frac{x}{2}$, d'où $y = -\frac{x^2}{4} + 4$. C'est bien une parabole de sommet $(0; 4)$.

EXEMPLE — TRAJECTOIRE D'UN MATÉRIAU EN CHUTE

Un charpentier laisse tomber une pièce de bois depuis une passerelle en mouvement.

La trajectoire est modélisée par :

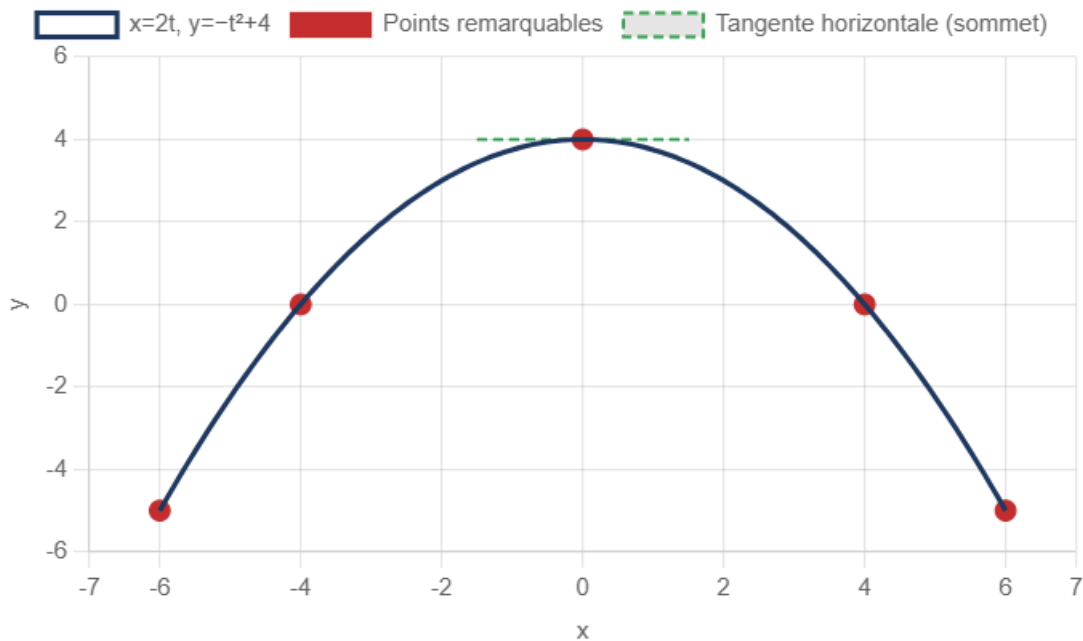
$$\begin{cases} x(t) = 1,5t \\ y(t) = 3 - 4,9t^2 \end{cases} \quad t \geq 0$$

C'est une courbe paramétrée polynomiale ($\text{deg} \leq 2$). Le vecteur tangent est

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -9,8t \end{pmatrix}.$$

En $t = 0$: $\vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (départ horizontal). La composante verticale augmente en valeur absolue : la trajectoire s'incurve vers le bas.

Courbe paramétrée : $x = 2t$, $y = -t^2 + 4$



Courbe paramétrée $x = 2t$, $y = -t^2 + 4$ pour $t \in [-3; 3]$.

À retenir sur les courbes paramétrées :

- Définies par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, le paramètre t parcourt un intervalle
- Le vecteur tangent est $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$
- Le tableau de variation conjoint permet de reconstituer le tracé
- En BTS, on se limite aux fonctions polynomiales de degré ≤ 2

10. Applications — Modélisation

10.1. Décroissance radioactive / Loi de refroidissement de Newton

MODÈLE EXPONENTIEL DÉCROISSANT

Lorsqu'une grandeur y décroît proportionnellement à sa valeur actuelle, elle suit une loi de la forme :

$$y(t) = y_0 e^{-kt} \quad (k > 0)$$

- y_0 : valeur initiale
- k : constante de décroissance
- Demi-vie : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$

EXEMPLE — REFROIDISSEMENT D'UN LOCAL

Un local technique est à $T_0 = 22\text{ °C}$. Le chauffage est coupé, la température extérieure est $T_{\text{ext}} = 5\text{ °C}$. La constante de refroidissement est $k = 0,12\text{ h}^{-1}$.

$$T(t) = 5 + 17e^{-0,12t}$$

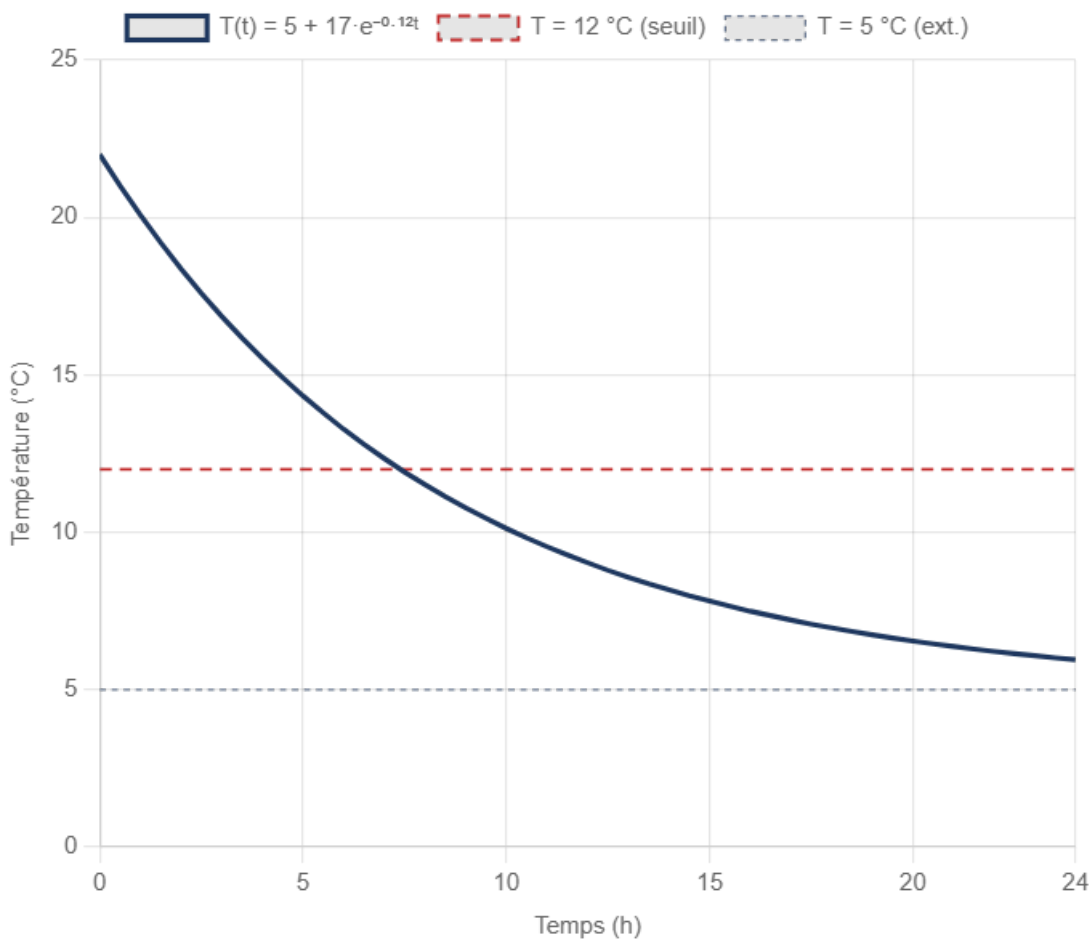
Question : Au bout de combien d'heures la température passe-t-elle sous 12 °C ?

$$T(t) = 12 \iff 5 + 17e^{-0,12t} = 12 \iff e^{-0,12t} = \frac{7}{17}$$

$$-0,12t = \ln\left(\frac{7}{17}\right) \implies t = \frac{-\ln(7/17)}{0,12} = \frac{\ln(17/7)}{0,12} \approx 7,4\text{ h}$$

La température passe sous 12 °C au bout d'environ **7 h 24 min**.

Refroidissement d'un local technique



10.2. Dépréciation d'un équipement

EXEMPLE — DÉPRÉCIATION EXPONENTIELLE

Une chaudière industrielle achetée **Math input error** se déprécie selon

$V(t) = 25\,000 e^{-0,15 t}$ (en euros, t en années).

- Valeur après 5 ans : **Math input error**
- Taux de dépréciation instantané à $t = 5$: **Math input error**
- Durée pour atteindre **Math input error** : $t = \frac{\ln(25\,000/5\,000)}{0,15} = \frac{\ln 5}{0,15} \approx 10,7$ ans

10.3. Optimisation de coûts

EXEMPLE — COÛT DE PRODUCTION

Le coût total de fabrication de x éléments de charpente (en dizaines) est modélisé par :

$$C(x) = 0,5 x^3 - 6 x^2 + 25 x + 50 \quad (x \in [1; 10])$$

Le coût moyen par dizaine est $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 0,5 x^2 - 6 x + 25 + \frac{50}{x}$.

Pour minimiser \bar{C} , on dérive : $\bar{C}'(x) = x - 6 - \frac{50}{x^2}$.

On résout numériquement $\bar{C}'(x) = 0$ et on trouve $x \approx 7,0$. Le coût moyen est minimal pour une production d'environ **70 éléments**.

L'essentiel du chapitre :

- Domaine, parité, périodicité : préalables à toute étude de fonction
 - Limites : résultat en $\pm\infty$ et en un point ; 7 formes indéterminées à lever
 - Croissances comparées : $e^x \gg x^n \gg \ln x$
 - TVI : existence (et unicité si monotonie) de solutions d'équations
 - Dérivation : tableau des dérivées, règles opératoires, dérivation en chaîne
 - ln et exp : fonctions réciproques, propriétés algébriques, limites
 - Fonctions puissances : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$
 - Étude de fonction : domaine, limites, dérivée, tableau de variations, graphique
 - Développements limités : approximation locale, tangente, position
courbe/tangente
 - Courbes paramétrées : vecteur tangent, tableau de variation conjoint, tracé
 - Applications : refroidissement de Newton, dépréciation, optimisation de coûts
-

Fonctions d'une variable réelle

Fonctions d'une variable réelle | BTS — Tous groupements

Compétences travaillées :

- Déterminer un domaine de définition et étudier la parité d'une fonction
- Calculer des limites, lever des formes indéterminées
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires
- Dériver des fonctions (fonctions composées incluses)
- Exploiter les propriétés de \ln , \exp et des fonctions puissances
- Mener une étude complète de fonction
- Calculer et exploiter des développements limités (tangente, position courbe/tangente)
- Étudier et tracer une courbe paramétrée, déterminer un vecteur tangent
- Modéliser et résoudre des problèmes concrets

1**Domaines de définition**

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

b. $g(x) = \sqrt{5-2x}$

c. $h(x) = \ln(3x+6)$

d. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \ln(4-x)$

Mes calculs :

2**Parité de fonctions**

Pour chaque fonction, dire si elle est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre. Justifier.

a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

b. $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c. $h(x) = e^x + e^{-x}$

d. $k(x) = x^3 + x + 2$

Mes calculs :

3**Calculs de limites directes**

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x}{3x^3 + 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{x - 3}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-x} + 3)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x^2)$

Mes calculs :

4**Dérivées — Fonctions simples**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$

b. $g(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$

c. $h(x) = (x^2 + 1)e^x$

d. $k(x) = 5 \ln x - \frac{1}{x}$

Mes calculs :

5

Formes indéterminées et croissances comparées

Calculer les limites suivantes en précisant la forme indéterminée rencontrée :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 5}$
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-2x}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Mes calculs :

6**Dérivées de fonctions composées**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes (préciser le domaine) :

a. $f(x) = e^{2x^2-3x}$

b. $g(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$

c. $h(x) = \sqrt{3x^2 - 12}$

d. $k(x) = (2x - 1)^5$

Mes calculs :

7**Application du TVI**Soit $f(x) = x + e^{-x} - 2$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$.
2. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 3]$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; 3]$.
4. Encadrer α à 10^{-1} près.

Mes calculs :

8

Équations logarithmiques et exponentielles

Résoudre dans \mathbb{R} :

a. $e^{2x-1} = 7$

b. $\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln 5$

c. $3^x = 20$ (écrire x en fonction de \ln)

d. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

Mes calculs :

9

Étude complète — Fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer \mathcal{D}_f et étudier la parité de f .
2. Calculer les limites en $\pm\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote.
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.
4. Déterminer $f(0)$, les zéros de f , et préciser l'image de f .

Mes calculs :

10

Étude complète — Fonction avec exponentielle

Soit $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ définie sur \mathbb{R} .

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure de la courbe.

Mes calculs :

11

Refroidissement d'un bâtiment

Un local industriel isolé est initialement à 24 °C. Le chauffage est coupé alors que la température extérieure est de 4 °C. On modélise la température intérieure par :

$$T(t) = 4 + 20 e^{-0,08 t}$$

où t est en heures.

- 1. Vérifier que $T(0) = 24$ °C. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter.
- 2. Calculer $T'(t)$. Quel est le signe de T' ? Interpréter.
- 3. Au bout de combien de temps la température passe-t-elle sous 15 °C ?
- 4. Calculer la vitesse de refroidissement (en °C/h) à $t = 0$ et à $t = 10$ h.

Mes calculs :

12

Développements limités — Calculs

Déterminer le développement limité à l'ordre indiqué, au voisinage de 0 :

a. $f(x) = e^{2x}$ à l'ordre 3

b. $g(x) = \ln(1 + 3x)$ à l'ordre 3

c. $h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ à l'ordre 4

Mes calculs :

13

DL — Tangente et position de la courbe

Soit $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Écrire le DL de f à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier le signe de $f(x) - y_{\mathcal{T}}(x)$ au voisinage de 0. La courbe est-elle au-dessus ou en dessous de sa tangente ?
4. Vérifier graphiquement à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Mes calculs :

DL — Comparaison d'approximations (contexte BTS)

Un technicien en énergie utilise la formule $P(x) = e^{-0,1x}$ pour modéliser la perte de puissance (en proportion) d'un signal dans un câble de longueur x mètres.

1. Écrire le DL d'ordre 2 de $e^{-0,1x}$ en $x = 0$.
2. Pour $x = 2$ m, comparer la valeur exacte $P(2)$ avec l'approximation d'ordre 1 (P_1) et d'ordre 2 (P_2).
3. Pour quelle longueur maximale l'approximation d'ordre 1 donne-t-elle une erreur inférieure à 1 % ?

Mes calculs :

Courbe paramétrée — Tracé et vecteur tangent

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad t \in [-2; 2]$$

1. Compléter le tableau de valeurs pour $t = -2, -1, 0, 1, 2$.
2. Calculer le vecteur tangent $\vec{V}(t)$. Existe-t-il un point singulier ?
3. Déterminer l'équation de la tangente au point correspondant à $t = 1$.
4. Montrer que cette courbe est une parabole en éliminant le paramètre.
5. Tracer la courbe dans un repère.

Mes calculs :

Courbe paramétrée — Tableau de variation conjoint

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases} \quad t \in [0; 5]$$

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Déterminer les valeurs de t où chaque dérivée s'annule.
2. Construire le tableau de variation conjoint sur $[0; 5]$.
3. Calculer les coordonnées des points clés : $t = 0, 1, 2, 3, 5$.
4. Déterminer le vecteur tangent en $t = 2$. Que se passe-t-il en ce point ?
5. Tracer la courbe.

Mes calculs :

17

Courbe paramétrée — Trajectoire en charpente (contexte BTS)

Un élément de charpente est soulevé par une grue. Sa trajectoire est modélisée par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = -2t^2 + 8t \end{cases} \quad t \in [0; 4]$$

où x et y sont en mètres et t en secondes.

1. Calculer les coordonnées du point de départ ($t = 0$) et du point d'arrivée ($t = 4$).
2. Déterminer le vecteur tangent $\vec{V}(t)$. Calculer $\vec{V}(0)$ et $\vec{V}(4)$.
3. Pour quelle valeur de t la hauteur y est-elle maximale ? Quelles sont les coordonnées du point le plus haut ?
4. Montrer que la trajectoire est une parabole et donner son équation cartésienne.

Mes calculs :

Étude complète avec logarithme

Soit $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.
3. En déduire le minimum de f et montrer que $f(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x - \ln x = 3$.

Mes calculs :

Optimisation — Coût de fabrication

Une entreprise de charpente bois produit x lots de pièces par jour ($x \in [1 ; 12]$). Le coût total de production (en euros) est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 100$$

1. Calculer le coût moyen par lot : $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.
2. Montrer que $\bar{C}'(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 - 100}{x^2}$.
3. Soit $g(x) = 2x^3 - 12x^2 - 100$. Montrer que g admet un unique zéro x_0 dans $[1 ; 12]$ et que $x_0 \in [7 ; 8]$.
4. En déduire les variations de \bar{C} et le nombre optimal de lots à produire.
5. Calculer le coût moyen minimal (à l'euro près).

Mes calculs :

Dépréciation et amortissement

Un compresseur d'air pour chantier est acheté ~~Mal~~ à une valeur résiduelle après t années est modélisée par :

$$V(t) = 18\,000 e^{-0,2t}$$

1. Justifier que V est décroissante. Calculer $V(5)$ et $V(10)$.
2. Déterminer la **demi-vie** de la valeur (temps pour perdre la moitié de la valeur initiale).
3. L'entreprise décide de revendre le compresseur quand sa valeur passe sous ~~Mal~~ ~~Après~~ ~~put error~~ combien d'années cela se produit-il ?
4. On définit le taux de dépréciation instantané par $\frac{V'(t)}{V(t)}$. Calculer ce taux et commenter.

Mes calculs :

Problème de synthèse — Ventilation et concentration de CO₂

Dans un atelier de menuiserie, la concentration en CO₂ (en ppm au-dessus du niveau extérieur) suit, après mise en marche de la ventilation mécanique, la loi :

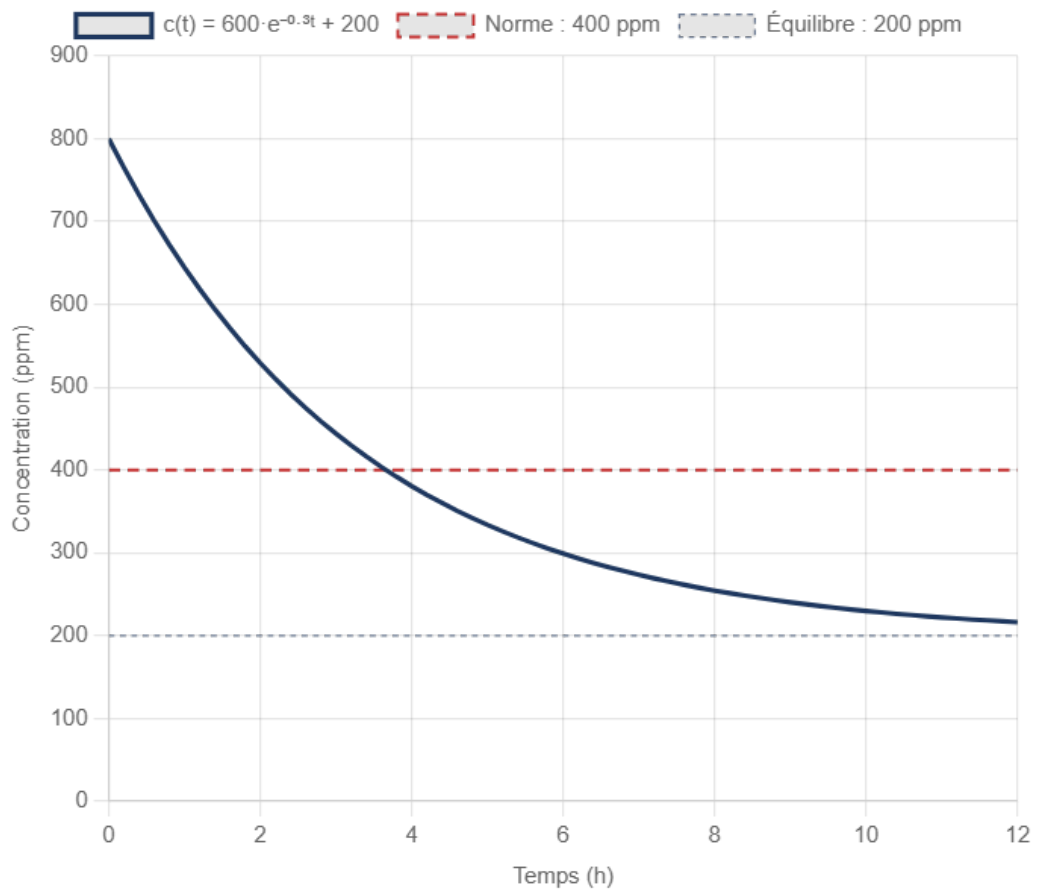
$$c(t) = 800 e^{-0,3t} + 200 (1 - e^{-0,3t})$$

où t est en heures. Le premier terme représente la décroissance du CO₂ initial, le second l'apport par les occupants (équilibre à 200 ppm).

1. Simplifier $c(t)$ sous la forme $c(t) = A e^{-0,3t} + B$.
2. Calculer $c(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$. Interpréter physiquement.
3. Calculer $c'(t)$ et montrer que c est strictement décroissante.
4. La norme impose une concentration inférieure à 400 ppm. Au bout de combien de temps la norme est-elle respectée ?
5. Représenter graphiquement $c(t)$ et la droite $y = 400$. Vérifier la cohérence.

Mes calculs :

Concentration de CO₂ dans l'atelier



Fonctions d'une variable réelle

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Domaine de définition (3 pts)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ (1,5 pt)

b. $g(x) = \ln(3x-6)$ (1,5 pt)

Exercice 2 — Limites (4 pts)

Calculer les limites suivantes en précisant la méthode.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4}$ (1,5 pt)

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ (1,5 pt)

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$ (1 pt)

Exercice 3 — Dérivation (4 pts)

Dériver les fonctions suivantes (préciser u et u' pour les fonctions composées).

a. $f(x) = e^{2x^2-1}$ (1,5 pt)

b. $g(x) = \ln(x^2 + 5)$ (1,5 pt)

c. $h(x) = (3x - 2)^4$ (1 pt)

Exercice 4 — Logarithme et exponentielle (4 pts)

a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3e^{2x-1} = 12$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée. (2 pts)

b. Résoudre dans son domaine l'équation $\ln(3x + 1) = 2$. Vérifier la condition d'existence. (2 pts)

Exercice 5 — Étude locale et développement limité (5 pts)

On considère la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$, définie au voisinage de 0. On rappelle le développement limité :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0.$$

- Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0. (2 pts)
 - À l'aide du DL d'ordre 2, déterminer la position de la courbe de f par rapport à T au voisinage de 0. (3 pts)
-