# Nombre dérivé

## 1 Sécante et tangente à une courbe représentative

**Définition : sécante à une courbe**

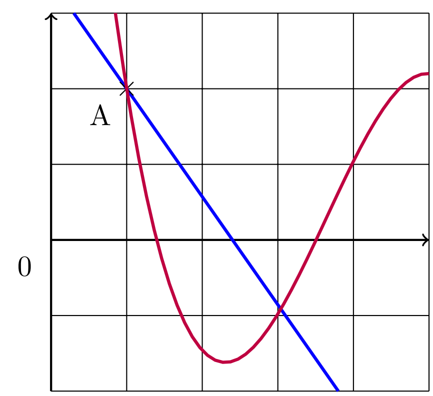
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soient $a$ un réel de $I$.

On appelle **sécante** à la courbe représentative de $f$ passant par A$(a\,;\,f(a))$, la droite passant par A et coupant la courbe représentative de $f$.

**Exemple**

Sur la figure ci-contre, on peut voir la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -0,4x^3 + 4,37x^2 - 13,77x + 11,8$.
On ne donne que la représentation graphique sur $[0\,;\,5]$.

En bleu, une sécante à la courbe représentative de la fonction $f$ en A$(1\,;\,2)$.



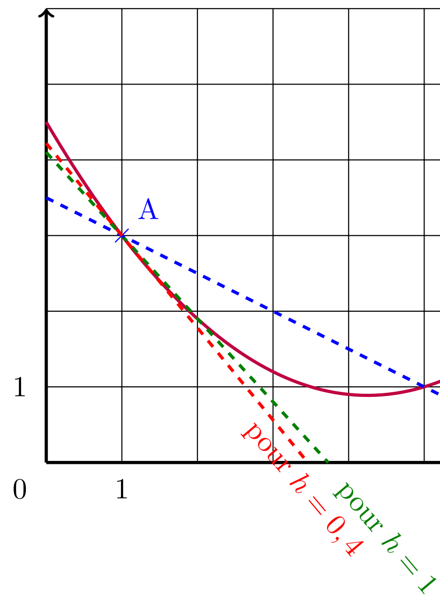

**Définition : taux de variation**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant un nombre réel $a$.
La fonction $\tau$ définie pour tout réel $h \neq 0$ telle que $a + h \in I$ par :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

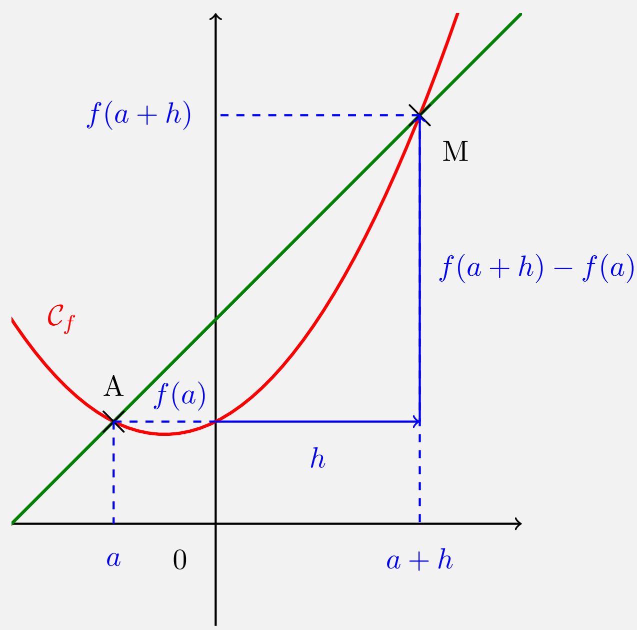
est appelée **taux d'accroissement** de $f$ en $a$.

**Représentations graphiques de plusieurs sécantes en fonction de la valeur de $h$**




**Remarque**

On considère deux points A et M de la courbe représentative de $f$ dont les abscisses respectives sont $a$ et $a+h$.
$\tau(h)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). On a en effet $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}$.




**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit M un point du plan.
La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en un point A est la position limite de la droite (AM) quand le point M se rapproche de A tout en restant sur $\mathcal{C}_f$.

## 2 Nombre dérivé

**Définition : nombre dérivé en un point**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $a$ un réel de $I$.
On dit que $f$ est **dérivable en $a$** si le taux d'accroissement de $f$ en $a$ admet une limite réelle quand $h$ tend vers 0. Ce nombre « limite » est noté $f'(a)$ est se nomme **nombre dérivé de $f$ en $a$**.
Quand $f$ est dérivable en $a$ on a ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**Exemple**

- On veut calculer la valeur du nombre dérivé de la fonction carré en 3.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = 6+h.$

  Si $h$ se rapproche de 0 alors $6+h$ se rapproche de 6. On note alors $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = 6$.
  Donc $f'(3) = 6$ en notant $f$ la fonction carrée.

- Notons $g$ la fonction racine carré. On veut vérifier si elle est dérivable en 0.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}.$

  Si $h$ se rapproche de 0 alors $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient extrêmement grand. On note alors $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = +\infty$ qui n'est pas un nombre réel.
  La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

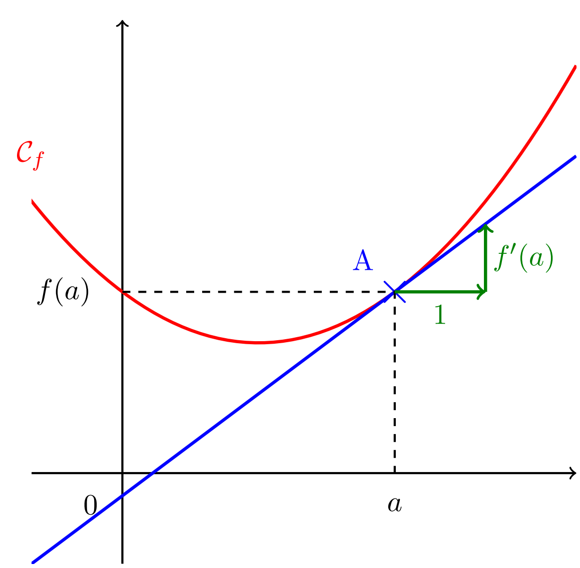
**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $a$ un réel de $I$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.
Si $f$ est dérivable en $a$, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $\mathrm{A}(a\,;\ f(a))$ est la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

**Propriété**

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\mathrm{A}(a\,;\ f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathcal{R}$ par $x^2 - x - 1$. On souhaite déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3. Une équation de cette tangente est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

$f(3) = 3^2 - 3 - 1 = 5$.

Pour calculer $f'(3)$, on doit connaître la limite du taux d'accroissement de $f$ en 3.

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - (3+h) - 1 - 5}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5.$$

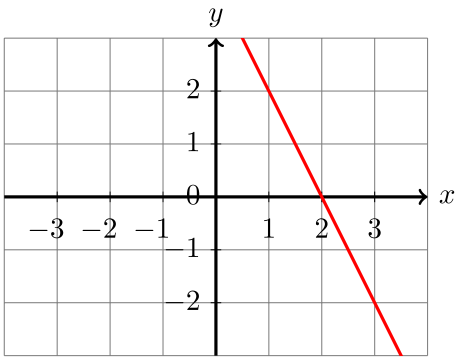
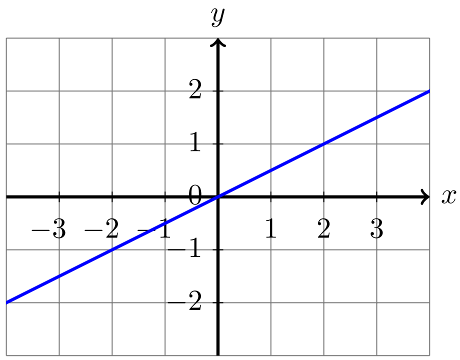
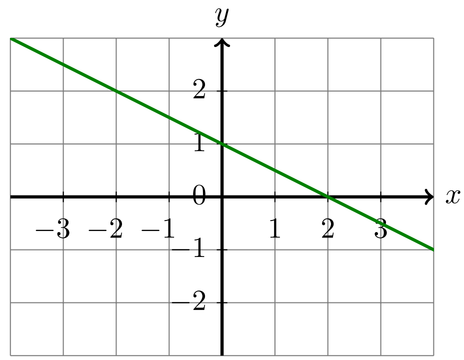
$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 5$. Donc $f'(3) = 5$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3 est donc $y = 5(x-3) + 5$.

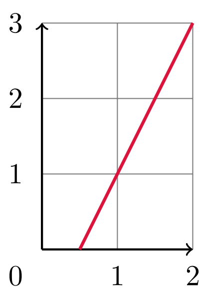
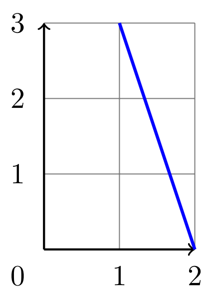
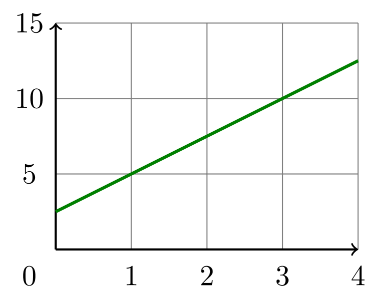
# Nombre dérivé

## > Rappels sur le coefficient directeur d'une droite

**Exercice n°1** Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites ci-dessous.

**Exercice n°2** Déterminer graphiquement le coefficient directeur des droites ci-dessous.

**Exercice n°3** Soit A$(-4\,;\,2)$, B$(0\,;\,5)$ et C$(2\,;\,-2)$.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AC).
3. Déterminer le coefficient directeur de la droite (BC).

## > Taux de variation et nombre dérivé

**Exercice n°4** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 1$.

1. Calculer le taux de variation de $f$ en 2.
2. En déduire que $f$ est dérivable en 2 et déterminer $f'(2)$.
3. De la même façon, déterminer $f'(3)$.

**Exercice n°5** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit A le point d'abscisse 1 appartenant à $\mathcal{C}_f$. Déterminer l'ordonnée de A.
2. Calculer le taux de variation de $f$ en 1.
3. En déduire que $f$ est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
4. De la même façon, déterminer $f'(-1)$.

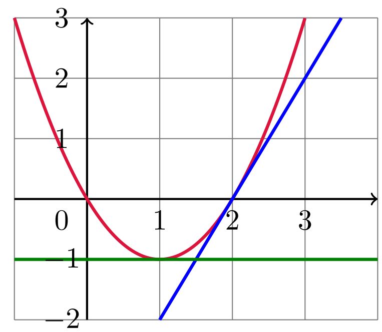
**Exercice n°6**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Déterminer $f'(2)$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto x^3$. Déterminer $g'(-1)$.
3. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x}$. Déterminer $h'(1)$.

## > Interprétation graphique du nombre dérivé.

**Exercice n°7** On considère la courbe représentative d'une fonction $f$ ci-dessous.

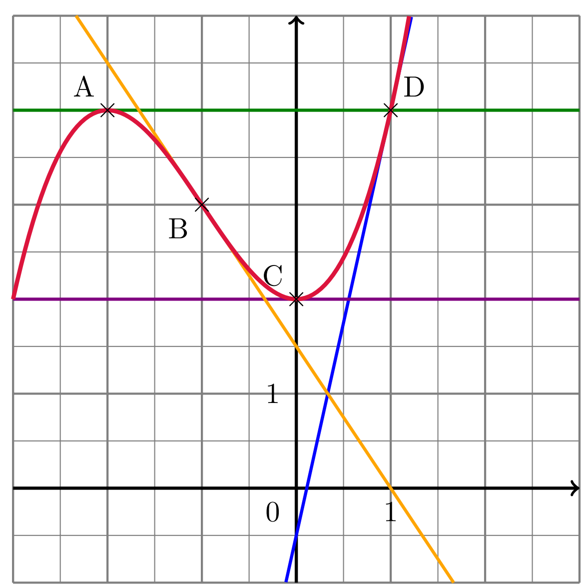
1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer graphiquement $f(2)$ et $f'(2)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en 1.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en 2.




**Exercice n°8**

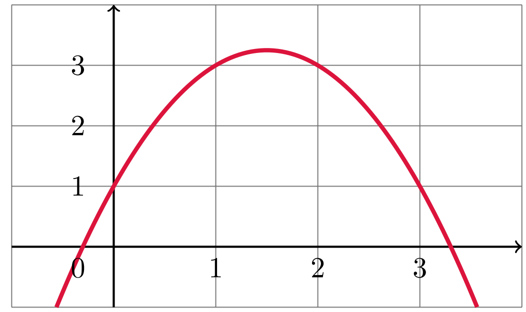
On considère la fonction $f$ dont on donne la courbe représentative ci-dessous. On a également tracé quatre tangentes à la courbe représentative de $f$.

1. Que vaut $f(1)$ ?
2. Que vaut $f'(1)$ ?
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $-1$. En déduire la valeur de $f'(-1)$.
4. Déterminer $f(0)$ puis $f'(0)$.
5. Déterminer $f(-2)$ puis $f'(-2)$.
6. Déterminer l'équation réduire de la tangente au point d'abscisse 1.
7. Déterminer l'équation réduire de la tangente au point d'abscisse $-1$.
8. Déterminer l'équation réduire de la tangente au point d'abscisse 0.



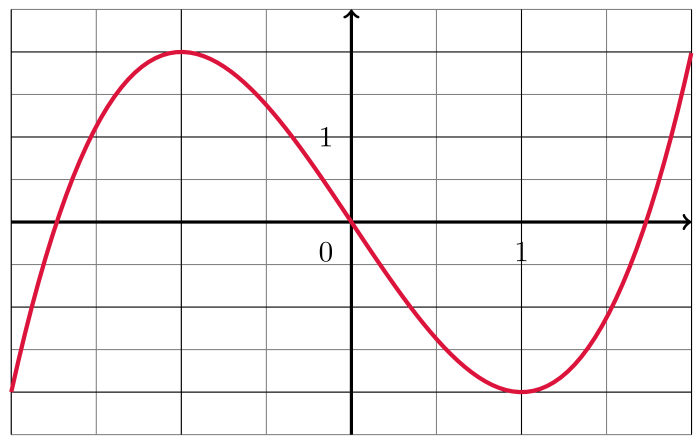
**Exercice n°9** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

1. Soit A le point d'abscisse 2. Sachant que A appartient à la courbe représentative de $f$, calculer l'ordonnée de A.
2. Placer le point A sur le repère ci-contre.
3. Calculer $f'(2)$.
4. Tracer alors la tangente à la courbe représentative de $f$ en A.




**Exercice n°10** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

1. Déterminer graphiquement l'abscisse des points de la courbe représentative de $f$ où la tangente est parallèles à l'axe des abscisses.
2. Tracer la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $-1$.
3. Déterminer, par le calcul, $f'(0)$.
4. Tracer la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.




## > Déterminer l'équation de la tangente par le calcul

**Exercice n°11**

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carré au point d'abscisse $-1$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carré au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 1.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction cube au point d'abscisse $-2$.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse 4.

**Exercice n°12**

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$ au point d'abscisse 2.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x}$ au point d'abscisse $-3$.

## Exercice n°13

Une entreprise fabrique des granulés de bois pour poêles de chauffage. Sa capacité de production quotidienne ne peut pas dépasser 70 tonnes. Le coût total de fabrication, en dizaines de milliers d'euros, réalisé par la fabrication de $x$ tonnes de granulés est donné par :

$$C(x) = 0,02x^2 + 0,08x + 5,08 \qquad \text{avec } x \in [0\,;\,70]$$

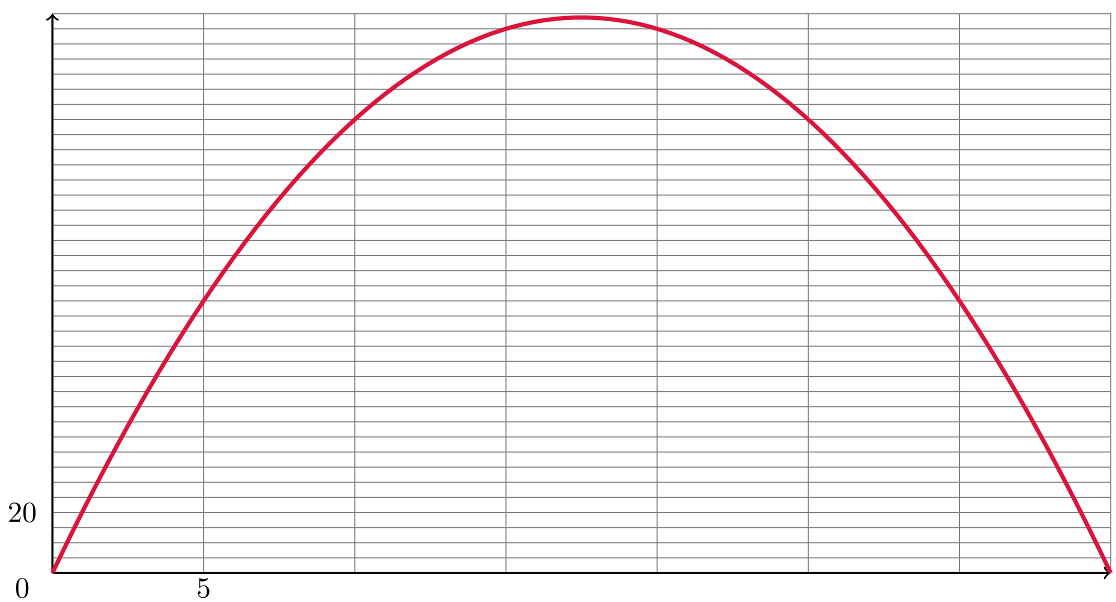
En économie, le coût marginal $C_m$ représente le coût supplémentaire engendré par la production de la dernière tonne produite lorsque l'on en a fabriqué $x$ tonnes.
On a ainsi $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$.

1. Montrer que la fonction coût marginal $C_m$ correspond au taux d'accroissement de la fonction coût total $C$ entre les réels $x-1$ et $x$.
2. Calculer le coût marginal de la $20^{\text{ème}}$ tonne produite et de la $50^{\text{ème}}$ tonne produite.
3. Montre que pour tout réel $x$ de $[0\,;\,70]$ on a $C_m(x) = 0,04x + 0,06$.
4. En mathématiques, une bonne approximation du coût marginal pour $x$ tonnes est le nombre dérivé de $C$ en $x$. Déterminer $C'(20)$ et $C'(50)$ et comparer les résultats avec la question 2.

## Exercice n°14

La hauteur dans le ciel, en mètres, d'une fusée de feu d'artifice depuis son lancement est donnée par $f(t) = -0,6t^2+21t$ où $t$ représente le temps écoulé, en secondes. On admet que la vitesse de la fusée à l'instant $t_0$ (en m/s) est égal au nombre dérivé $f'(t_0)$.

1. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f$




   Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la fusée. Au bout de combien de temps cette hauteur est-elle atteinte ?
2. Déterminer par le calcul le moment où la fusée retombe au sol si elle n'explose pas en plein vol.
3. On effectue un réglage pour que la fusée explose au bout de 6 secondes après son lancement.
   (a) Déterminer, par le calcul, la hauteur de la fusée au moment de son explosion.
   (b) Calculer $f'(6)$ puis interpréter le résultat.
4. On effectue un nouveau réglage pour que l'explosion se déclenche lorsque la fusée a atteint sa hauteur maximale.
   (a) Conjecturer, graphiquement, la vitesse de la fusée au moment de cette explosion.
   (b) Démontrer cette conjecture par le calcul.