

Énergie électromagnétique

L'étude de l'induction électromagnétique a permis de réaliser des bilans énergétiques complets. On comprend aussi aisément que de l'énergie est stockée dans un condensateur. Il semble donc tout à fait naturel de s'intéresser aux phénomènes énergétiques qui entourent le concept de champ électromagnétique

A. Interaction entre champ électromagnétique et matière

A.1 Force de LORENTZ

On s'intéresse à un porteur de charge q , animé d'une vitesse $\vec{v}$. On cherche à déterminer l'effet d'un champ électromagnétique sur le mouvement de ce porteur.

Définition EM5.1 - Force électromagnétique de LORENTZ

Les effets conjoints des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont modélisés par la force électromagnétique dite de LORENTZ :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

La forme ci-dessous met en exergue la proportionnalité entre la charge et l'action du champ électromagnétique.

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

A.2 Densité volumique de force électromagnétique

Dans ce qui suit, on considère un échantillon de matière dans lequel un seul type de porteur de charge existe.¹

On considère un porteur de charge p_i (électron, ion, ...) et on note q_i sa charge et $\vec{v}_i$ son vecteur vitesse. Placé dans un champ électromagnétique, il subit assez simplement la force électromagnétique de LORENTZ $\vec{F}_i$ telle que :

$$\vec{F}_i = q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right)$$

Dans un échantillon de matériau de volume infinitésimal $d\tau$, la densité de porteurs de charge identique à p_i est définie et vaut n_i . Dans ce volume $d\tau$, la force $d\vec{F}$ vaut :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= n_i d\tau \vec{F}_i \\ &= n_i d\tau q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

1. Le raisonnement serait similaire en considérant des types de porteurs de charge différents.

On définit la densité volumique de force (ou force volumique) $\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}}{d\tau}$, telle que :

$$\begin{aligned}\vec{f}_V &= \frac{d\vec{F}}{d\tau} \\ &= n_i q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \\ &= n_i q_i \vec{E} + n_i q_i \vec{v}_i \times \vec{B}\end{aligned}$$

On reconnaît la densité volumique de charge $\rho = n_i q_i$. On fait aussi apparaître la densité volumique de courant, lié à la mobilité des porteurs p_i telle que $\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i$.

Définition EM5.2 - Force volumique $\vec{f}_V$

Un volume $d\tau$, contenant des porteurs de charge de densité ρ , qui génèrent un courant de densité volumique $\vec{j}$ subit une force volumique $\vec{f}_V$ telle que :

$$\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

La norme de la force volumique s'exprime en N.m^{-3} .

Remarque

Pour déterminer la force électromagnétique $\vec{F}_{\text{em}}$ s'exerçant sur un échantillon de taille macroscopique, on réalise l'intégration de la densité volumique de force sur l'ensemble du volume délimité par l'échantillon.

$$\vec{F}_{\text{em}} = \iiint_{\tau} \vec{f}_V d\tau$$

Si le vecteur $\vec{f}_V$ est uniforme (constant en norme, direction, sens) dans tout le volume τ , alors

$$\vec{F}_{\text{em}} = \vec{f}_V \iiint_{\tau} d\tau$$

$$\vec{F}_{\text{em}} = \vec{f}_V \tau$$

A.3 Densité volumique de puissance cédée aux porteurs de charge

On cherche à définir une grandeur volumique liée à la puissance : elle permettra de définir localement la puissance cédée. On définit donc la densité volumique de puissance cédée aux porteurs de charge (en W.m^{-3}) notée $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$.

On rappelle que la puissance d'un effort mécanique, appliqué à un système de vitesse $\vec{v}$, modélisé par un vecteur force $\vec{F}$, est donnée par $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} &= \vec{f}_V \cdot \vec{v} \\ &= (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho \vec{E} \cdot \vec{v} + (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} + 0\end{aligned}$$

Résultat EM5.1 - Puissance volumique cédée aux porteurs de charge

Dans un milieu possédant des porteurs de charges, le champ électromagnétique peut céder de l'énergie à ces porteurs de charges. On peut y définir une puissance volumique cédée, exprimée en W.m^{-3} , telle que :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Seule la partie électrique du champ électromagnétique permet de céder de l'énergie aux porteurs de charge.

B. Conduction ohmique

B.1 Conduction électrique

Les conducteurs sont des corps caractérisés par leur capacité à conduire les charges électriques. Cette conduction est rendue possible par des porteurs de charge pouvant se déplacer librement. On peut citer :

- les métaux dans lesquels les porteurs de charges mobiles sont des électrons (électrons de conduction)
- les solutions ioniques dans lesquelles la conduction est assurée par des ions (cations et anions).
- les semi-conducteurs dopés dans lesquels la conduction est assurée par des électrons (dopage de type N) ou des lacunes électroniques appelées trous (dopage de type P).

B.2 Conductivité électrique γ (ou σ)

La conductivité électrique γ quantifie la capacité d'un matériau à permettre le passage du courant. Plus γ est grand, plus le passage du courant est facilité, mieux le milieu conduit.

La conductivité électrique γ est donc une grandeur caractéristique du matériau et s'exprime en S.m^{-1} ou en $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$. Les valeurs typiques sont regroupées dans le tableau.

métal	$\gamma > 10^5$	$\gamma_{\text{Cu}} = 5,9 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
semi-conducteur	$10^{-7} < \gamma < 10^5$	$\gamma_{\text{Si}} = 1 \text{ S.m}^{-1}$
isolant	$\gamma < 10^{-7}$	$\gamma_{\text{verre}} = 1 \times 10^{-17} \text{ S.m}^{-1}$

TABLE 1 – Valeurs de conductivité électrique γ

B.3 Loi d'OHM

B.3.1 Loi d'OHM locale

La loi d'OHM connue ($u = Ri$) est un bilan macroscopique des phénomènes de conduction ayant lieu au niveau des porteurs de charge, c'est-à-dire au niveau microscopique.

Microscopiquement, les électrons soumis à un champ électrique $\vec{E}$ sont mis en mouvement, faisant naître localement une densité de courant $\vec{j}$. Passé un régime transitoire (voir TD), le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est colinéaire au vecteur champ électrique $\vec{E}$. Le coefficient de proportionnalité est la conductivité électrique γ . Cette relation constitue la loi d'OHM locale.

Loi EM5.1 - Loi d'OHM locale

Dans un milieu conducteur de conductivité γ , le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et le vecteur champ électrique $\vec{E}$ sont colinéaires.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

γ est la conductivité électrique du milieu.

B.3.2 Loi d'OHM macroscopique

La loi d'OHM locale ([eq :LoiDOhm]) contient évidemment la loi d'OHM macroscopique bien connue.

Pour s'en convaincre, on considère un cylindre de longueur ℓ , de section S , et de conductivité électrique γ . On applique aux bornes de ce cylindre conducteur une différence de potentiel u . Un courant d'intensité i circule alors. Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{j}$ sont dirigés suivant l'axe du cylindre.

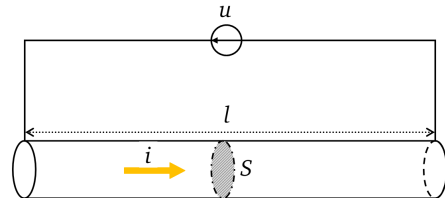


FIGURE 1 – Loi(s) d'OHM

Suivant cet axe, on a donc $j = \gamma E$. Comme j est uniforme sur la section, $j = \frac{i}{S}$. De plus, E est constant et vaut $\frac{u}{\ell}$. Ainsi, $\frac{i}{S} = \gamma \frac{u}{\ell}$ et on retrouve la loi d'OHM macroscopique :

$$R = \frac{u}{i} = \frac{\ell}{\gamma S}$$

B.4 Densité volumique de puissance JOULE

La densité volumique de puissance JOULE autre que la puissance volumique cédée aux porteurs de charge dans le cas particulier de la conduction via la loi d'OHM locale. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau} &= \vec{j} \cdot \vec{E} \\ &= \gamma \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \\ &= \gamma \cdot E^2 \end{aligned}$$

Résultat EM5.2 - Densité volumique de puissance JOULE

La densité volumique de puissance cédée par effet JOULE vaut :

$$\frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau} = \gamma \cdot E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

Dans sa forme, cette relation est à rapprocher de la définition de la puissance JOULE la reliant à l'intensité du courant ou à la tension appliquée :

$$\mathcal{P}_j = \frac{U^2}{R} = R I^2$$

C. Densité volumique d'énergie électromagnétique

Dans cette partie, on s'intéresse en premier lieu à l'énergie stockée dans un condensateur et on tentera de l'exprimer en fonction du champ électrique $\vec{E}$. Par similarité, on définira la densité volumique d'énergie magnétique w_B , pour enfin retenir l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em} .

C.1 Cas du condensateur infini

Il a été noté dans le cours d'électrocinétique de première année que l'énergie W_C stockée dans un condensateur est définies par : $W_C = \frac{1}{2} C u^2$. C est la capacité du condensateur (en F) et u est la tension appliquée aux bornes du condensateur.

Or, on sait depuis le chapitre EM1 que la capacité d'un condensateur infini vaut $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$, où S est la surface des armatures et e la distance inter-armatures. On a aussi mis en évidence l'uniformité du champ électrique $\vec{E}$, et donc que $E = \frac{u}{e}$.

On peut donc en déduire que :

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (E e)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S e \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau \end{aligned}$$

où $\tau = S e$ représente le volume entre les armatures du condensateur.

On s'aperçoit ainsi que l'énergie n'est pas stockée sur les armatures (où les charges s'accumulent), mais bien localisée entre les armatures, là où règne le champ $\vec{E}$. De plus, on peut ici définir une densité volumique d'énergie $w_{E,\text{cond}}$, uniforme :

$$w_{E,\text{cond}} = \frac{W_C}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Définition EM5.3 - Densité volumique d'énergie électrique w_E

La relation précédente est généralisable aux cas pour lesquels $\vec{E}$ n'est pas uniforme. Dans un milieu de permittivité ϵ_0 , la densité volumique d'énergie électrique w_E est donc définie par :

$$w_E = \frac{d W_E}{d \tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

C.2 Généralisation

Le raisonnement effectué pour le condensateur infini est adaptable au cas du solénoïde infini. Ce raisonnement nous amène à définir la densité volumique d'énergie magnétique w_B telle que :

$$w_B = \frac{d W_B}{d \tau} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Assez logiquement, dans un milieu où règne à la fois un champ électrique et un champ magnétique, la densité volumique d'énergie est la somme des deux contribution.

Définition EM5.4 - Densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em}

On définit localement la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em} :

$$\begin{aligned} w_{\text{em}} &= w_E + w_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \\ w_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique s'exprime J.m^{-3} .

Remarque

Cette nouvelle grandeur est parfois symbolisée par u , à ne pas confondre avec la différence de potentiel.

D. Puissance rayonnée par une onde électromagnétique

Définitions EM5.5 - Vecteur de POYNTING et puissance rayonnée

- On définit le vecteur de POYNTING associé à un champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$, noté $\vec{\Pi}$ (ou $\vec{R}$) :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

- Le flux du vecteur à travers une surface correspond à la puissance rayonnée par le champ électromagnétique :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \phi(\vec{\Pi}) = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur de POYNTING est donc une puissance surfacique rayonnée. La norme du vecteur de POYNTING s'exprime donc en W.m^{-2} .

E. Bilan d'énergie électromagnétique

E.1 Équation locale de POYNTING

On s'intéresse à un milieu de volume fini τ , dans lequel règne un champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$. L'énergie électromagnétique W contenue dans ce volume s'exprime :

$$W = \iiint_{\tau} w_{\text{em}} d\tau$$

Pendant un temps dt , l'énergie électromagnétique contenue dans le volume varie de dW . Les causes de cette variation sont doubles :

- une partie de l'énergie est rayonnée vers l'extérieur par le champ électromagnétique.
- une partie de l'énergie est cédée à la matière.

La puissance rayonnée vers l'extérieur par le champ électromagnétique, notée $\mathcal{P}_{\text{rayonnée}}$, est le flux du vecteur de POYNTING à travers la surface fermée $\mathcal{S}$ définie par le volume τ :

$$\mathcal{P}_{\text{rayonnée}} = \phi(\vec{\Pi}) = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

La puissance cédée $\mathcal{P}_{\text{cédée}}$ par le champ à la matière est déterminée grâce à l'équation car elle correspond à la puissance donnée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge qui constitue -en partie- le milieu. Elle donc donnée par la relation :

$$\mathcal{P}_{\text{cédée}} = \iiint_{\tau} \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} d\tau = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Le bilan d'énergie indique que la variation globale d'énergie est nulle ("rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme") :

$$dW + \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} dt + \mathcal{P}_{\text{cédée}} dt = 0$$

Si on raisonne en puissance, le bilan de puissance s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} + \mathcal{P}_{\text{rayonnée}} + \mathcal{P}_{\text{cédée}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\tau} w_{\text{em}} d\tau \right) + \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0$$

Le théorème de GREEN-OSTROGRASKY indique que $\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{\Pi} d\tau$, et on peut inverser la dérivée temporelle et l'intégrale spatiale dans le premier terme de la somme. On a donc :

$$\iiint_{\tau} \frac{dw_{\text{em}}}{dt} d\tau + \iiint_{\tau} \text{div} \vec{\Pi} d\tau + \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0$$

Résultat EM5.3 - Équation de POYNTING

Comme cette relation est vraie quelque soit le volume, on a le bilan local d'énergie (ou de puissance volumique plutôt), connu sous le nom d'équation de POYNTING :

$$\frac{dw_{\text{em}}}{dt} + \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

E.2 Équation de bilan

On remarque que cette équation est similaire à la conservation de la charge : $\frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0$.

La différence réside dans le fait que les charges électriques ne peuvent pas être cédées à la matière, contrairement à l'énergie électromagnétique, via la force de LORENTZ.

Cette forme d'équation est inhérente au concept de bilan. Elle est transversale et, de ce fait, figure dans de nombreux domaines où des bilans sont réalisés : mécanique des fluides, gestion de trafic, recensement...

E.3 Est-ce une équation fondamentale ?

La réponse est clairement non. Elle est fondamentale car elle est importante, primordiale, essentielle. Mais elle ne l'est pas car elle n'est pas une cinquième équation qui vient s'ajouter aux quatre équations de Maxwell, qui constituent le fondement de l'électromagnétisme.

Pour s'en convaincre, il suffit de montrer que l'équation de POYNTING est contenue dans les équations de MAXWELL. On utilise pour cela une formule d'analyse vectorielle :

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère amènent :

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \left(-\frac{d\vec{B}}{dt} \right) - \vec{E} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)$$

On reconnaît les deux composantes de la densité volumique d'énergie électromagnétique w_{em} et le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$.

$$\text{div} \vec{\Pi} = -\frac{dw_{\text{em}}}{dt} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

soit l'équation de POYNTING : $\frac{dw_{\text{em}}}{dt} + \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$.