

Compléments sur les suites Chapitre 1

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 1-1

Soit k un entier naturel donné, calculer la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Par définition du coefficient binomial on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Or chaque facteur du numérateur est équivalent à n et on a k facteurs.

D'où l'équivalent du coefficient binomial est : $\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$

Par conséquent, un équivalent de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$, quand n tend vers $+\infty$ est : $\frac{1}{k!}$ donc la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{1}{k!}$.

Exercice 2. exo 1-2

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $n \leq u_n \leq 2n$ alors montrer que $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

De $n \leq u_n \leq 2n$, et par stricte croissance de la fonction logarithme, on a l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln n \leq \ln(u_n) \leq \ln(2n)$$

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n \leq \ln(u_n) \leq \ln 2 + \ln n$

Au voisinage de $+\infty$, $n > 1$ et en divisant par $\ln n$ l'encadrement précédent, on obtient : $\forall n > 1, 1 \leq \frac{\ln(u_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln n}$.

Or, $\frac{\ln 2}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par théorème d'encadrement on a :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ d'où } \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 3. exo 1-3

$$1. \text{ On a } u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

$$2. \text{ On cherche un équivalent à } v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

$$v_n = \sqrt{n+1} \left(1 - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \right) = \sqrt{n+1} \left(1 - \frac{\sqrt{n+1-1-1}}{\sqrt{n+1}} \right) = \sqrt{n+1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n+1}} \right).$$

Or $\sqrt{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et on a par équivalent usuel car $\frac{2}{n+1}$ tend vers 0 en $+\infty$ que :

$$1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

D'où par produit d'équivalent : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$

Autre méthode qui utilise la quantité conjuguée :

$$v_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n})}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n} \right] = 2$ donc $\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n} \underset{+\infty}{\sim} 2$, puis par produit d'équivalent :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$3. w_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}). \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} > 0.$$

Donc, $\ln(u_n) = \ln(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}).$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0$, donc par équivalent usuel, $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ donc par équivalent usuel, $1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} -(-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2}.$

Finalement $w_n = \ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$

Exercice 4. exo 1-4 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$. La suite u est-elle bien définie? Non car on a $u_1 = 1$ et u_n n'est plus définie à partir du rang 2.

Exercice 5. exo 1-5

Soit la fonction f définie pour tout réel x , par : $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ et soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$

1. Étudions la fonction f .

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et composées de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet, $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$).

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{1+x^2} = \frac{2e^x (x^2 - x + 1)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Le signe de $f'(x)$ en dépend que du signe de $x^2 - x + 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2e^x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ car son $\Delta < 0$.

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x} = +\infty \text{ par CC.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ par produit de limites.}$$

2. Montrons que $\forall x \geq 0, 2e^x - x - x^2 > 0$ et $1+x \geq \sqrt{1+x^2}$.

On va étudier $g(x) = 2e^x - x - x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

g est deux fois dérivable en tant que somme de fonctions usuelles deux fois dérivables.

$$g'(x) = 2e^x - 1 - 2x \text{ et } g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1) \geq 0 \text{ car } x \geq 0.$$

Donc la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $g'(0) = 1$.

Donc $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Puis comme $g(0) = 2$, on a finalement que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$: d'où $\forall x \geq 0, 2e^x - x - x^2 > 0$.

$\forall x \geq 0, (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+x^2$ donc par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, et comme $1+x > 0$ on a : $1+x \geq \sqrt{1+x^2}$.

3. $\forall x \geq 0, f(x) > x \Leftrightarrow \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}} > x \Leftrightarrow 2e^x > x\sqrt{1+x^2}$.

Or, d'après les inégalités précédentes on a que : $\forall x \geq 0, 2e^x - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 2e^x > x + x^2 \Leftrightarrow 2e^x > x(1+x) \Leftrightarrow 2e^x > x\sqrt{1+x^2}$. Donc on a bien que $\forall x \geq 0, f(x) > x$. Ce qui signifie que f n'a aucun point fixe.

4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $u_n \leq u_{n+1}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$.

$$u_1 = \frac{2e}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e \geq 1.$$

Donc l'initialisation est vérifiée.

• Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que $u_n > 0$ et $u_n \leq u_{n+1}$.

Alors comme $u_n > 0$, on a $f(u_n) > u_n > 0$ c'est à dire que $u_{n+1} > 0$.

Mais alors aussi comme $u_{n+1} > 0$, on a $f(u_{n+1}) > u_{n+1}$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et (u_n) croissante.

5. Étudions le comportement asymptotique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Supposons que (u_n) converge vers un nombre ℓ alors $\ell \geq 0$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors d'après le théorème du point fixe ℓ serait un point fixe de f .

Or, on a vu à la question 3, qu'il n'y a pas de point fixe donc il y a une contradiction et la suite (u_n) diverge.

Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

Exercice 6. exo1-6

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est bien définie et que $u_n \geq 0$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ qui existe et $u_0 \geq 0$. Donc l'initialisation est vérifiée.

• Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que la suite u est bien définie et que $u_n \geq 0$.

Alors par hypothèse de récurrence, comme $u_n \geq 0$, on a $u_n + 2 \geq 0$ d'où u_{n+1} est bien définie.

Ensuite, on sait que $\sqrt{u_n + 2} \geq 0$ donc l'hérédité est vérifiée.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est bien définie et $u_n \geq 0$.

2. Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Alors la suite u vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, si (u_n) converge vers ℓ , ce nombre ℓ ne peut être qu'un point fixe de f et doit appartenir à $\mathbb{R}^+$.

Recherche du point fixe de f :

$$\text{On résout } \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

Un seul convient : 2 car $-1 < 0$.

Donc la seule limite possible de la suite est 2.

3. $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur $\mathbb{R}^+$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ en tant que composée de fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Étudions le sens de variation de la suite u .

$u_0 = 0, u_1 = \sqrt{2} > 0$. On conjecture que u est croissante.

On va alors montrer que u est croissante et majorée par 2.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est croissante et $u_n \leq 2$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 < 2$ et $u_1 = \sqrt{2} > 0$. Donc l'initialisation est vérifiée.

- Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que la suite u vérifie : $u_{n+1} \geq u_n$ et $u_n \leq 2$.

Alors par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}^+$ et comme u_n, u_{n+1} sont dans $\mathbb{R}^+$, on a par hypothèse de récurrence :

$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

Mais aussi $f(u_n) \leq f(2) = 2$ soit $u_{n+1} \leq 2$ donc l'hérédité est vérifiée.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est croissante et $u_n \leq 2$.

Ainsi d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente vers $\ell \in [0, 2]$.

Et d'après la question 2, cette limite est 2.

Exercice 7. ex01-7

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est bien définie et que $u_n > 0$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ qui existe et $u_0 > 0$. Donc l'initialisation est vérifiée.

- Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que la suite u est bien définie et que $u_n > 0$.

Alors par hypothèse de récurrence, comme $u_n > 0$, on a $\frac{2}{u_n}$ qui existe, d'où u_{n+1} est bien définie.

Ensuite, comme $u_n > 0, 1 + \frac{2}{u_n} > 0$ donc l'hérédité est vérifiée.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite u est bien définie et que $u_n > 0$.

2. Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

Alors la suite u vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que somme et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème du point fixe, si (u_n) converge vers ℓ , ce nombre ℓ ne peut être qu'un point fixe de f et doit appartenir à $\mathbb{R}_+^*$.

Recherche du point fixe de f :

On résout $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$.

Un seul convient : 2 car $-1 < 0$.

Donc la seule limite possible de la suite est 2.

3. Etudions le sens de variation de $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est strictement décroissante en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Etudions la convergence de ces deux sous-suites.

On a tout d'abord que :

$f \circ f(v_n) = f(f(v_n)) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}$.

De même :

$f \circ f(w_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} = w_{n+1}$.

On a vu que f était strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f \circ f$ sera strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = \frac{5}{3}, u_3 = \frac{11}{5}$.

La suite u n'est pas monotone mais on peut conjecturer que v_n sera croissante et w_n sera décroissante.

De plus comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, alors on a $w_n = u_{2n+1}$ minorée également par 0 (de même v_n).

Autre remarque comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, si v_n et w_n convergent respectivement vers α et β alors leurs limites vérifient l'équation :

$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} + 2 = x(1 + \frac{2}{x}) \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = x \Leftrightarrow f(x) = x$.

Donc la seule limite possible est 2 d'après la question 2.

Il ne reste plus donc à prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , (v_n) est croissante et majorée par 2 et que (w_n) est décroissante.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 = 1 < 2$ et $v_1 = u_2 = \frac{5}{3} > v_0$.

Puis $w_0 = u_1 = 3, w_1 = u_3 = \frac{11}{5} < 3$.

Donc l'initialisation est vérifiée.

- Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que la suite v vérifie : $v_{n+1} \geq v_n$ et $v_n \leq 2$ et que la suite w vérifie $w_{n+1} \leq w_n$.

Alors par stricte croissance de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $v_n, v_{n+1}, w_n, w_{n+1}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, on a par hypothèse de récurrence :

$f \circ f(v_{n+1}) \geq f \circ f(v_n)$ soit $v_{n+2} \geq v_{n+1}$.

Mais aussi $f \circ f(v_n) \leq f \circ f(2) = f(2) = 2$ soit $v_{n+1} \leq 2$.

Puis, $f \circ f(w_{n+1}) \leq f \circ f(w_n)$ soit $w_{n+2} \leq w_{n+1}$
donc l'hérédité est vérifiée.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite v est croissante et $v_n \leq 2$ et w est décroissante.

5. D'après la question précédente, w est décroissante et minorée par 0, v est croissante et majorée par 2. On a alors par théorème de convergence monotone que les suites extraites v et w sont convergentes vers ℓ .

Or, on a vu précédemment que ce nombre ℓ ne peut être que 2. La suite u converge donc aussi vers 2 car ses deux suites extraites convergent vers la même limite 2.

Exercice 8. exo1-8

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$.

1. On étudie rapidement la fonction f sur $[0, 1]$ car $f(u_n) = u_{n+1}$.

f est continue et dérivable sur $[0, 1]$ en tant que somme de fonctions usuelles continues et dérivables sur $[0, 1]$.

De plus, $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = -1/2x < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 1$, $f(1) = 3/4$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in [0, 1]$. Donc l'initialisation est vérifiée.

• Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que $u_n \in [0, 1]$.

Alors par hypothèse de récurrence, comme $u_n \in [0, 1]$ et que f est strictement décroissante sur $u_n \in [0, 1]$, on a $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ c'est à dire $0 < 3/4 \leq u_{n+1} \leq 1$ donc l'hérédité est vérifiée.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

2. On a pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = -1/2x$ donc $-1/2 \leq f'(x) \leq 0$.

D'où pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq 1/2$.

3. Montrons que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1]$.

On résout pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{2}$ ou $x = -2 - 2\sqrt{2} < 0$.

De plus $1 < \sqrt{2} < 3/2$ donc $0 < -2 + 2\sqrt{2} < 1$. D'où $\alpha = -2 + 2\sqrt{2}$, unique point fixe de f .

4. Etudions la convergence de (u_n) .

On va utiliser l'inégalité des accroissements finis (IAF).

f est continue et dérivable sur $[0, 1]$.

On a montré que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq 1/2$.

Puis on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$ et que $f(\alpha) = \alpha \in [0, 1]$.

Alors d'après l'IAF appliquée à f , u_n , α sur $[0, 1]$, on a l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq |u_n - \alpha|$$

$$\text{Soit comme } f(u_n) = u_{n+1} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha| \quad (*)$$

On montre ensuite par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (1/2)^n |u_0 - \alpha|.$$

Initialisation : on a $|u_0 - \alpha| \leq (1/2)^0 |u_0 - \alpha|$ Donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons que $|u_n - \alpha| \leq (1/2)^n |u_0 - \alpha|$.

Alors d'après (*), $|u_{n+1} - \alpha| \leq 1/2 |u_n - \alpha|$ et par hypothèse de récurrence cela entraîne que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 1/2 \times (1/2)^n |u_0 - \alpha| \text{ c'est à dire : } |u_{n+1} - \alpha| \leq (1/2)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

Donc l'hérédité est vérifiée.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (1/2)^n |u_0 - \alpha|.$$

Comme $0 < 1/2 < 1$, $(1/2)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'où par théorème d'encadrement, on en déduit que u_n converge vers α quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. D'après EDHEC 1997 [exo1-9]

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n \cdot \ln(x)$.

1. (a) Etudions cette fonction et son tableau de variations. f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$.

D'où le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de $x - n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\forall x > 0$, $f'_n(x) > 0 \Leftrightarrow x > n$ donc f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$.

$$\text{En } +\infty : \text{on a } f_n(x) = x(1 - n \ln(x)/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (car par CC en } +\infty, \ln(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0)$$

$$\text{En } 0 : x - n \cdot \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \text{ car } n > 0.$$

x	0	n	$+\infty$
$x - n$	-	0	+
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$n - n \ln(n)$	$+\infty$

- (b) Pour $n \geq 3$, on applique alors le théorème de bijection sur $]0, n]$ (on pourrait aussi le faire dès à présent sur $[1, e]$ pour la question suivante).

On détermine pour cela le signe de $n - n \ln(n) = n(1 - \ln(n))$ et comme $n \geq 3 > e$ on a $\ln(n) > 1$ donc $n - n \ln(n) < 0$.

f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n]$ donc bijective de $]0, n]$ dans $\left[f_n(n), \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \right] = [n - n \ln(n), +\infty[$.

Et comme $n - n \ln(n) < 0$ alors $0 \in]n - n \ln(n), +\infty[$.

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $]0, n]$: u_n .

On a donc $f_n(u_n) = 0 = u_n - n \ln(u_n)$ et et comme $f_n(n) = n - n \ln(n) \neq 0$ on a : $0 < u_n < n$.

De même f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$ donc bijective de $[n, +\infty[$ dans $\left[f_n(n), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] = [n - n \ln(n), +\infty[$.

Et comme $n - n \ln(n) < 0$ alors $0 \in [n - n \ln(n), +\infty[$.

Il y a donc une unique solution v_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$ et comme $f_n(n) = n - n \ln(n) \neq 0$ on a : $n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

- (a) On compare les images pour pouvoir comparer les termes. On les calcule d'abord :

$$f_n(1) = 1 - n \ln(1) = 1$$

$$f_n(u_n) = 0$$

$$f_n(e) = e - n \ln(e) = e - n < 0 \text{ car } n \geq 3 > e$$

On a donc $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$

et comme f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$ et que 1, u_n et e en sont éléments (car $e < n$) alors

Conclusion : $\forall n \geq 3 : 1 < u_n < e$.

- (b) $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1})$

On connaît $f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1) \ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = 0$

Donc $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$

Pour avoir $u_n \geq u_{n+1}$ on compare les images par f_n :

$$f_n(u_n) = 0$$

$$f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) \geq 0 \text{ car } u_{n+1} \geq 1$$

Donc $f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1})$ et comme f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$ et que u_n et u_{n+1} en sont éléments (car $u_{n+1} < e < n$) alors :

Conclusion : $\forall n \geq 3 : u_n \geq u_{n+1}$ et la suite est décroissante.

- (c) La suite u est donc décroissante et minorée par 1 donc convergente vers $\ell \geq 1$.

ATTENTION : on ne connaît pas la valeur de cette limite, on ne peut pas encore conclure que $\ell = 1$

Pour encadrer $\ln(u_n)$ on peut partir de $1 < u_n < e$ d'où $0 < \ln(u_n) < 1 \dots$ cela n'est pas suffisant pour avoir un encadrement plus précis de la limite.

Il faut chercher $\ln(u_n)$ ailleurs : $f_n(u_n) = 0 = u_n - n \ln(u_n)$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et donc en divisant l'inégalité précédente par $n > 0$:

$$\frac{1}{n} < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$$

Donc par encadrement $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ (car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.)

- (d) Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on se ramène là où l'on dispose d'outils en posant $t_n = u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a alors par équivalent usuel :

$$\ln(u_n) = \ln(1 + t_n) \underset{+\infty}{\sim} t_n \text{ car } t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n - 1 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1.$$

On calcule la limite du quotient de $u_n - 1$ et $\frac{1}{n}$ en faisant apparaître le quotient précédent :

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = n(u_n - 1) = \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} n \ln(u_n)$$

et comme $u_n - n \ln(u_n) = 0$ on a $n \ln(u_n) = u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$$\frac{u_n - 1}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Conclusion : $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Exercice 10. exo1-10

- Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n . Pour cela, étudions la fonction $f : x \rightarrow e^x + x$.
 f est continue sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
Donc f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (par limites usuelles).
De plus $n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_n .
- Étudions le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie.
Comme f est bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on sait d'après le cours que son application réciproque f^{-1} est aussi bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
De plus $\forall n \geq 1, f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$.
Comme $n \leq n+1$ alors par stricte croissance de f^{-1} , on a $f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+1)$ soit $\forall n \geq 1, u_n \leq u_{n+1}$.
Donc la suite est croissante.
On peut dire également que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Donc la suite diverge vers $+\infty$.
- Pour montrer que $\forall n \geq 1, u_n \leq \ln n$ puis que, pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n) - 1$. on va comparer $f(u_n)$, $f(\ln(n))$ et $f(\ln(n) - 1)$.
On a $f(u_n) = n, f(\ln n) = n + n \ln n \geq n$ car $\forall n \geq 1, \ln n \geq 0$ on a donc : $f(u_n) \leq f(\ln n)$ et par bijection strictement croissante on en déduit que $\forall n \geq 1, u_n \leq \ln n$.

Ensuite : $f(\ln(n) - 1) = \frac{n}{e} + \ln n - 1$.

Or la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave et donc sa courbe représentative est toujours en dessous de ses tangentes.

Donc en particulier en $x = e$, on a $\ln x \leq \frac{x}{e}$ (car l'équation de la tangente à la fonction $\ln$ en e est : $y = \frac{x}{e}$).

Donc on a : $\forall n \geq 1, \frac{n}{e} + \ln n - 1 \leq \frac{n}{e} + \ln n \leq 2\frac{n}{e} \leq n$ (car $2 < e$).

D'où : $f(\ln(n) - 1) \leq f(u_n)$ et par bijection strictement croissante on en déduit que $\forall n \geq 1, u_n \geq \ln(n) - 1$.

- On a d'après la question précédente :

$$\forall n \geq 1, \ln(n) - 1 \leq u_n \leq \ln(n).$$

Alors en divisant cette inégalité par $\ln n$ pour tout n supérieur à 2, on a :

$$1 - \frac{1}{\ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1.$$

Comme $\frac{1}{\ln n}$ tend vers 0 en $+\infty$ alors $1 - \frac{1}{\ln n}$ tend vers 1 et donc par théorème d'encadrement, on en déduit que $\frac{u_n}{\ln n}$ tend aussi vers 1.

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 11. exo 1-11 Critère de comparaison

Déterminer la nature de la série de terme général :

- $u_n = \frac{5}{4^n \ln n}$.

$$\forall n \geq 3, 0 \leq \frac{5}{4^n \ln n} \leq 5\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Or, la série $\sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $1/4$ avec $0 < 1/4 < 1$).

Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

- $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

$\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$, or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

Exercice 12. exo 1-12 Critère de négligeabilité

Déterminer la nature de la série de terme général :

- $u_n = \frac{n^5}{e^n}$.

On a $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et $u_n \underset{+\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{n^{5+2}}{e^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ par C.C.

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

- $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

On a $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$ et $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ avec $1 < \alpha < 3/2$.

En effet $\frac{\ln n}{n^{3/2-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par C.C.

Or la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ CV car série de Riemann ($\alpha > 1$) donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

Exercice 13. exo 1-13 Critère d'équivalence

Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

On a $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$, comme $1/n$ tend vers 0 en $+\infty$, on a par équivalent usuel :

$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc par produit d'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

2. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n^\alpha + 1}$.

On a $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$, puis $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$.

Donc soit $\alpha - 2 > 1$, soit $\alpha - 2 \leq 1$.

• $\alpha - 2 > 1$ c'est à dire $\alpha > 3$;

la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ CV car série de Riemann ($\alpha - 2 > 1$) donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

• $\alpha - 2 \leq 1$ c'est à dire $\alpha \leq 3$;

la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ DV car série de Riemann ($\alpha - 2 \leq 1$) donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n DV.

Exercice 14. exo 1-14

Etude de la série de terme général $\frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k}$.

$$\sum_{k \geq 0} u_k = \sum_{k \geq 0} \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k \geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 3 \times \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 5 \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On a fait apparaître les termes généraux de séries géométriques dérivées secondes, première et classique, toutes CV car de raison $0 < q = 1/2 < 1$, donc par CL, la série CV et vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} + 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-1/2)^2} + 5 \times \frac{1}{(1-1/2)} = 8 + 10 + 10 = 28.$$

Exercice 15. exo 1-15

Etude de la série de terme général $\frac{2k^2 + 3k + 5}{k!}$. On va faire apparaître les termes généraux de séries exponentielles :

$$\sum_{k \geq 0} u_k = \sum_{k \geq 0} \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} = 2 \times \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)}{k!} + 2 \times \sum_{k \geq 1} \frac{k}{k!} + 3 \times \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} + 5 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = 2 \times \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} + 5 \times \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} + 5 \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = 12 \times \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}.$$

On reconnaît une série exponentielle CV et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 12e$.

Exercice 16. D'après Edhec 1998 exo 1-16

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x) = 1 - e^{-x}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que (u_n) est convergente vers 0.

Etudier la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a par télescopage :

$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$. Comme la suite (u_n) est convergente vers 0, alors la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge également. De plus cette série vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_0) = -1$.

Exercice 17. exo 1-17

Étude de la nature des séries de termes généraux suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^4 + 2}$.

On a $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

2. $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$.

$\forall n \geq 1, u_n \geq 0$.

On peut utiliser soit que $0 \leq u_n \leq \frac{n-1}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ (car on sait que la courbe de la fonction logarithme est concave donc toujours en dessous de ses tangentes, en particulier en 1 : $\ln n \leq n - 1$)

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

Ou bien on a aussi $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (car $\frac{\ln n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ par C.C.).

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

Exercice 18. exo1-18

Étudier la nature des séries de terme général

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$

La série CVABS car $|u_n| = \frac{1}{n^4}$ et on sait par Riemann que la série de terme général $\frac{1}{n^4}$ CV ($\alpha = 4 > 1$).

Donc la série de terme général u_n CV.

2. $u_n = \frac{x^{2n}}{2n!}$ (on donnera sa somme également)

on a $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n!} = \frac{1}{2} \times \sum_{n \geq 0} \frac{(x^2)^n}{n!}$.

On reconnaît une série exponentielle CV et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

3. $u_n = e^{-n^2}$.

On a $\forall n \geq 0, u_n > 0$, puis $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

En effet on a : $n^2 e^{-n^2} = X e^{-X}$ (en posant $X = n^2$, quand n tend vers $+\infty$, X aussi) et par C.C, on sait que $X e^{-X} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ CV car série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série de terme général u_n CV.

Série de Riemann : proposition $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Preuve :

• : cas $\alpha \leq 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

• : Cas $\alpha > 0$

On considère f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ **strictement décroissante** définie par : $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^\alpha} = f(k)$.

On a alors par stricte décroissance de f : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k; k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

On intègre cette inégalité (les bornes étant croissantes) sur $[k; k+1]$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

On calcule en n'oubliant pas que k est une constante :

$$f(k+1)[t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)[t]_k^{k+1}$$

Ce qui donne : $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

On somme les termes de cet encadrement pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

On utilise ensuite la relation de Chasles des intégrales pour le membre du milieu dans cette inégalité, et un changement d'indice sur la première somme :

$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n - \frac{1}{n^\alpha}$$

-l'inégalité de gauche donne :

$$S_n \leq \int_1^n f(t) dt + 1$$

-l'inégalité de droite donne :

$$S_n \geq \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{n^\alpha}$$

C'est à dire :

$$\underbrace{\int_1^n f(t) dt + \frac{1}{n^\alpha}}_* \leq S_n \leq \overbrace{\int_1^n f(t) dt + 1}^{(**)}$$

On est donc ramené à calculer $\int_1^n f(t) dt$ suivant la valeur de α .

On a si $\alpha = 1$,

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^n = \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc d'après (*), par théorème de comparaison, S_n tend aussi vers $+\infty$ et la série diverge.

Si $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^n = \frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1}$$

• Si $\alpha > 1$ alors $\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{-\alpha+1}$ et donc d'après (**), S_n est majorée donc la série converge.

• Si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc d'après (*), S_n tend aussi vers $+\infty$ et la série diverge.

Conclusion :

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.