

Primitive et Intégration sur un segment

EXERCICE 1: [Indications] Quelques primitives classiques

f désigne une fonction définie et continue sur un domaine de définition et d'intégration maximal $\mathcal{D}_f$ et F une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$. Remplir le tableau.

$f(x)$	$F(x)$	$\mathcal{D}_f$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$		
$\frac{1}{x}$		
e^x		
$a^x, a > 0, a \neq 1$		
$\sin x$		
$\ln x$		
$\cos x$		
$\tan x$		
$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$		
	$\tan x$	
	$\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{b + x^2}}, b > 0$		
	$\arctan x$	
$\frac{1}{a^2 + x^2}, a \neq 0$		
$\frac{1}{x^2 - a^2}, a \neq 0$		

EXERCICE 2: [Indications] – Calculer – Fractions rationnelles

Déterminer une primitive réelle des fractions suivantes, en indiquant l'ensemble de validité :

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $\frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ | 4. $\frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$ |
| 2. $\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ | 5. $\frac{x + 1}{x^2 - x - 1}$ |
| 3. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ | 6. $\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ |
| | 7. $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 3x + 3}$ |

EXERCICE 3: [Indications] – Calculer – Polynômes trigonométriques

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------|------------------------|
| 1. $\cos^2 x$ | 3. $\sin^3 x \cos x$ |
| 2. $\cos^3 x$ | 4. $\sin^3 x \cos^2 x$ |

EXERCICE 4: [Indications] – Calculer – Changements de variables

- Calculer $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ par changement de variable $u = \ln t$.
- Déterminer une primitive de $\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$
- Déterminer une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
- a) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$
 b) En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} + t}$

EXERCICE 5: [Indications] – Calculer – Mobiliser –

Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée sans calculer l'intégrale :

- $g(x) = \int_{2x}^{x^2} e^t dt$
- $g(x) = \int_0^{2x} x t^n dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t + x) dt$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

EXERCICE 6: [Indications] – Cours – Calculer – Chercher –

Déterminer les limites des suites de termes généraux ci-dessous

1. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
3. $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$

EXERCICE 7: [Indications] – Cours – Calculer – Chercher –

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple en $n \rightarrow +\infty$ de

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$

EXERCICE 8: [Indications] – Calculer – Chercher – Approximation par la méthode des rectangles ☆☆

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{On pose } I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I_n \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{où } M = \sup_{[a;b]} |f'|$$

2. Application : déterminer un nombre à un chiffre après la virgule qui soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 0,1 près.

EXERCICE 9: [Indications] – Calculer – Chercher –

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1+t} dt$ ☆ 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(nt) t^n dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) dt$ ☆☆ 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$ ☆☆☆ |
|---|--|

Intégrale généralisée

EXERCICE 10: [Indications] – Calculer – Cours – Étudier la convergence et calculer si possible les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ 2. $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{- t } dt$ 4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ 6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ 7. $\int_0^1 \ln(t) dt$ 8. $\int_0^{+\infty} \ln(t) dt$ |
|---|--|

EXERCICE 11: [Indications] Changement de variable et IPP

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ 2. $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$; $n \in \mathbb{N}^*$ ☆ 4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$ ☆ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$ 6. $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$ 7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$ 8. $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ ☆☆☆ |
|---|---|

EXERCICE 12: [Indications] – Chercher – Mobiliser – Déterminer la nature des intégrales impropres ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \sin x dx$ 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx$ 4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^3(x)}{e^x} dx$ 7. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \cos x dx$ 8. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x dx$ |
|--|--|

EXERCICE 13: [Indications] – Chercher – Calculer –

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}$$

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer. (On pourra penser à faire un changement de variable $t = 1/u$.)

EXERCICE 14: [Indications] – Chercher – Calculer – ☆

En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, calculer $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ (et J).

EXERCICE 15: [Indications] – Chercher – Mobiliser – Calculer –

Déterminer

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{x^2}^x \frac{1}{t} dt$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t} dt$ ☆

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2} dt$ ☆☆

EXERCICE 16: [Indications] – Mobiliser – Chercher – Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

2. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

3. En cas de convergence, encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f .

4. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

EXERCICE 17: [Indications]

Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge

2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3. $\frac{5}{4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ Remarque : en réalité, cette somme vaut $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,645$.

Indications

Exercice 2

2. Application directe d'une formule usuelle.

3. On cherche à exprimer la fonction sous la forme $\frac{1}{1 \pm u^2}$.

4. On cherche à décomposer sous la forme d'intégrales connues :

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2} = \frac{u'}{u} + \frac{c}{u}$$

Exercice 4

3. On posera le changement de variable $u = \sin t$.

4. a) On pourra poser un changement de variable affine $x = au+b$ transformant $\cos(x)$ en $\sin(u)$.

Exercice 5

1. Écrire $g(x) = F(2x) - F(x^2)$.

3. Faire un changement de variable pour se débarrasser du x dans l'intégrale et se ramener ensuite à la même technique que dans la question 1.

Exercice 8

2. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Exercice 9

1. Majorer le terme contenu dans l'intégrale avec une suite (indépendante de t mais dépendante de n) et se servir de cette majoration pour majorer l'intégrale.

2. Majorer la fonction contenue dans l'intégrale par une autre fonction facilement intégrable (mais dépendant encore de n !)

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$ c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sin t}{n}\right) - 1 \right) dt = 0$$

On pensera à utiliser l'égalité des accroissements finis.

4. Chercher, pour x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ puis utiliser la formule des accroissements finis.

Exercice 11

1. Deux problèmes. On peut essayer une intégration par partie.

2. Deux problèmes. On peut essayer une intégration par partie.

3. Chercher une relation entre I_n et I_{n-1} . En déduire I_n

4. On peut essayer une intégration par partie.

6. On fera en sorte de transformer le numérateur en un polynôme par changement de variable.

-
- 8.** Écrire $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$. Poser, dans la première intégrale, $u = t^2$. Pour conclure, utiliser le théorème des gendarmes.
-

Exercice 12

- 8.** On pourra par exemple penser que $\ln x \leq x$
-

Exercice 13

On pourra effectuer le changement de variable $v = \frac{1}{u}$.

Exercice 14

Effectuer un changement de variable affine permettant de transformer $\cos$ en $\sin$.

Exercice 15

- 2.** Remarquer que l'intégrale $\int_0^x \frac{\tan t}{t}$ est faussement impropre.
- 3.** On pourra tenter d'encadrer la fonction $\frac{\tan t}{t^2}$ de la manière la plus optimale possible grâce au théorème des accroissements finis.