

Chapitre 10

Fonctions numériques de deux variables réelles

Sommaire

10.1 Le plan $\mathbb{R}^2$	216
10.1.1 Droites et cercles	216
10.1.2 Exemples de domaines de $\mathbb{R}^2$	216
10.2 Fonctions de deux variables	217
10.2.1 Définition et exemples	217
10.2.2 Représentation graphique	217
10.3 Continuité	218
10.3.1 Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$	218
10.3.2 Continuité locale (en un point)	219
10.3.3 Continuité globale	219
10.4 Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$	220
10.4.1 Dérivées partielles d'ordre 1	220
10.4.2 Classe C^1	221
10.4.3 Classe C^2	222
10.5 Extrema d'une fonction de deux variables réelles	224
10.5.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$	224
10.5.2 Extremums	225
10.6 Application en micro-économie	228

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices. Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbb{R}^2$. On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python. Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

Compétences attendues. $\Leftrightarrow$ Montrer qu'une fonction f est continue ou C^1 ou C^2 .

$\Leftrightarrow$ Calculer les dérivées partielles d'une fonction.

$\Leftrightarrow$ Déterminer les points critiques d'une fonction.

$\Leftrightarrow$ Déterminer la nature (extremum ou non) des points critiques d'une fonction. .

10.1 Le plan $\mathbb{R}^2$

Rappel : $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

On représente $\mathbb{R}^2$ sous la forme d'un plan muni traditionnellement d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout point M du plan, on associe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées et réciproquement, à tout couple de réels, on peut associer un point du plan.

10.1.1 Droites et cercles

Toute droite du plan possède une équation du type $y = ax + b$ ou $x = c$, ou de manière équivalente, l'équation de toute droite du plan est de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple 10.1. L'axe des ordonnées est la droite d'équation $x = 0$ et l'axe des abscisses la droite d'équation $y = 0$.

Tracer dans le plan la droite d'équation $y = 2x - 3$ et celle d'équation $4y + 2x + 1 = 0$.

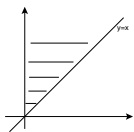
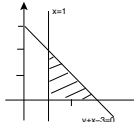
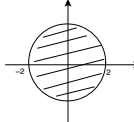
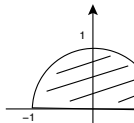
Le cercle de centre l'origine $(0, 0)$ et de rayon r possède comme équation :

$$\mathcal{C}(O, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Plus généralement, l'équation du cercle de centre (a, b) et de rayon r est :

$$\mathcal{C}((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

10.1.2 Exemples de domaines de $\mathbb{R}^2$

l'ensemble des points (x, y) définis par	est représenté par la zone hachurée dans $\mathbb{R}^2$
$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$	
$\begin{cases} x \geq 1 \\ y > 0 \\ y + x - 3 \leq 0 \end{cases}$	
$x^2 + y^2 \leq 4$	
$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$	

Faire attention aux frontières et préciser si elles sont incluses ou exclues.

10.2 Fonctions de deux variables

10.2.1 Définition et exemples

Définition 10.1.

On appelle fonction numérique réelle de deux variables réelles toute application f définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \in \mathcal{D} \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$
L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé ensemble ou domaine de définition de f .

Exemples 10.2.

1. Les fonctions coordonnées définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.
2. La fonction norme définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles : $(x, y) \mapsto \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} x^i y^j$ où A est une partie finie de $\mathbb{N}^2$.
4. Les fonctions rationnelles qui sont des quotients de fonctions polynômes.
5. Les fonctions $f(x, y) = x + y$ et $g(x, y) = \exp(xy) + y^2 - 1$ sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.
6. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \ln(x + y)$. $f(x, y)$ existe si et seulement si $x + y > 0 \Leftrightarrow y > -x$; donc $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > -x\}$ demi-plan de frontière la droite $y = -x$ exclue.
7. la fonction $g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
8. la fonction $h(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{-4+x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, privé du disque de centre l'origine et de rayon 2.
9. En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont les fonctions qui, à deux variables réelles (la quantité de travail L et le capital investi K), associent la production totale P définie par : $P(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$, où α et β sont des réels strictement positifs.

10.2.2 Représentation graphique

Définition 10.2 (Graphe). La fonction de 2 variables f définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ fait correspondre à tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$ un unique nombre réel $z = f(x, y)$. On peut représenter f dans l'espace par l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ où $(x, y) \in \mathcal{D}$. Le graphe de f est donc une **surface** ou nappe.

Définition 10.3 (Ligne de niveau).

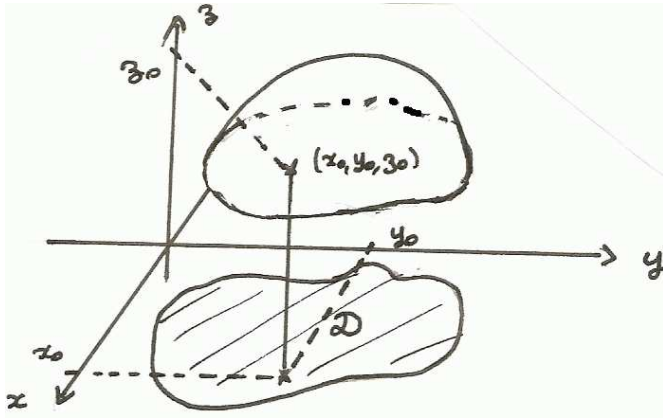
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne (ou courbe) de niveau c* l'ensemble $N_c = \{(x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = c\}$

Graphiquement : on projette dans le plan (Oxy) l'intersection de la surface définie par f et du plan $z = c$.

Par abus de langage, cette intersection est parfois elle-même appelée ligne de niveau.

Exemple 10.3.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 3x + y$. La ligne de niveau c de f est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 3x + y = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = c - 3x\}$, c'est-à-dire une droite. Donc toutes les lignes de niveau de f sont des droites du plan. En fait, la surface définie par f est un plan de $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 10.4.**

La ligne de niveau c de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est l'ensemble $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 = c\}$. Comme f est positive, on obtient :

1. si c est strictement négatif, $N_c = \emptyset$
2. si c est nul : $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ donc $N_c = \{(0, 0)\}$
3. si c est strictement positif, l'ensemble N_c est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

Ainsi, connaissant toutes les lignes de niveau, on peut en déduire l'allure de la surface définie par f .

10.3 Continuité

10.3.1 Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 10.4.

La distance euclidienne de $A(x_A, y_A)$ à $B(x_B, y_B)$, ou norme de $\overrightarrow{AB}$, est donnée par :

$$d((x_A, y_A), (x_B, y_B)) = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Propriétés 10.1.

1. $\forall A, B, d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $\forall A, B, d(A, B) = d(B, A)$
3. $\forall A, B, C, d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.
4. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
5. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.
6. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

10.3.2 Continuité locale (en un point)

Définition 10.5.

Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbb{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Remarque.

On pourra écrire par analogie avec les fonctions d'une seule variable :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Définition 10.6 (Applications partielles). Soit f une fonction de 2 variables définie sur $\mathcal{D}$. Lorsqu'on fixe une des deux variables, on obtient une fonction d'une seule variable, que l'on sait alors étudier.

Ces fonctions sont appelées **applications partielles** de f . Il y en a deux types :

Pour tout y fixé $f_x : t \rightarrow f(t, y)$ d'ensemble de définition $\{t \in \mathbb{R}, \text{ tels que } (t, y) \in \mathcal{D}\}$

et pour tout x fixé $f_y : t \rightarrow f(x, t)$ d'ensemble de définition $\{t \in \mathbb{R}, \text{ tels que } (x, t) \in \mathcal{D}\}$

Remarque.

attention toutefois, ce n'est parce que les deux applications partielles sont continues que l'application sera continue!! contreexemple : $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Etude en $(0, 0)$: pour $y = 0$, $f_x(t, 0) = 0$ donc elle est continue et $\lim_{t \rightarrow 0} f_x(t, 0) = 0$; de même pour $x = 0$, $f_y(0, t) = 0$ donc elle est continue et $\lim_{t \rightarrow 0} f_y(0, t) = 0$.

$$\text{Mais } f(x, x) = \frac{x * x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

La continuité est un comportement qui s'étudie en x et y *simultanément*.

EXERCICE 10.1.

1. Montrer que, pour tous réels x et y : $\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$.
2. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ est continue en } (0, 0).$$

EXERCICE 10.2.

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10.3.3 Continuité globale

Définition 10.7. On dit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ lorsque f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 10.2 (🔗 Exemples de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$).

1. Toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriétés 10.3 (🔗 Opérations et continuité).

1. La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. La composée d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 10.3.

Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + e^y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

10.4 Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ **10.4.1 Dérivées partielles d'ordre 1****Définition 10.8.**

Si pour tout y fixé dans $\mathcal{D}$, l'application partielle f_x est dérivable, alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x et on note $\partial_1(f)$ cette dérivée.

On définit de la même manière la dérivée partielle par rapport à y (lorsque pour x fixé, l'application partielle f_y est dérivable), et on la note $\partial_2(f)$.

Exemples 10.5.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 3x + y$.
Considérons l'application partielle en x , $f_1 : t \rightarrow 3t + y$ où y est un réel fixé.
 f_1 est un polynôme en la variable t donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1'(t) = 3$. Et ce pour tout réel y . Donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\partial_1(f)(x, y) = 3$.
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_2 : t \rightarrow 3x + t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_2'(t) = 1$. Donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\partial_2(f)(x, y) = 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 - x^2y + xy^2 - 3xy + 5x - y + 7$.
On a $\partial_1(f)(x, y) = 6x^2 - 2xy + y^2 - 3y + 5$ et $\partial_2(f)(x, y) = -x^2 + 2xy - 3x - 1$.
3. Si $g(x, y) = e^{x^2+y^2}$, on a $\partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}$ et $\partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}$.

Remarques.

1. $\rightarrow$ Plus généralement, il est facile de montrer que si f est un polynôme en les variables x et y , f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De même, dès que f est un produit, quotient, composée de fonctions usuelles... L'existence des dérivées partielles sera donc justifiée à l'aide d'une phrase.

2. $\longrightarrow$ Pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable, il suffit de considérer l'autre variable comme une *constante* et de dériver à l'aide des formules connues pour les fonctions d'une variable.

Exemple 10.6.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^3 - xy^5 + x^4 + 2y + 1$. f est une fonction polynôme en les variables x et y donc f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x, y) = 2xy^3 - y^5 + 4x^3$ et $\partial_2(f)(x, y) = x^2(3y^2) - x(5y^4) + 2$.

Définition 10.9 (🔗 Gradient).

On appelle gradient de f en (x, y) le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x, y)$, ce que l'on lit "nabla de f en (x, y) ", défini par :

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 10.4.

Calculer si elles existent les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

10.4.2 Classe C^1

Définition 10.10 (🔗 Fonction de classe C^1).

On dit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ et que chacune de ces dérivées partielles est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 10.4 (🔗).

Toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 10.5 (🔗 Opérations).

1. La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. La composée d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction de classe C^1 sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 10.6 (🔗).

1. Toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions coordonnées sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Les fonctions rationnelles sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

Théorème 10.7 (🔗 Développement limité d'ordre 1).

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout couple de réels (h, k) , on a :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \partial_1(f)(x, y) \times h + \partial_2(f)(x, y) \times k + \sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(h, k)$$

où ϵ désigne une fonction continue en $(0, 0)$ et telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.

Cette égalité est le développement limité à l'ordre 1 de f en (x, y) et il est unique.

On peut l'écrire également sous la forme suivante :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + {}^t\nabla(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(h, k).$$

10.4.3 Classe C^2 **Définition 10.11** (Dérivées partielles d'ordre 2).

Soit f admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Si $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$, et on la note $\partial_{1,1}^2(f)$, où $\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = \partial_1(\partial_1(f))(x, y)$.
2. Si $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$, et on la note $\partial_{2,1}^2(f)$, où $\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = \partial_2(\partial_1(f))(x, y)$.
3. Si $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$, et on la note $\partial_{1,2}^2(f)$, où $\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_1(\partial_2(f))(x, y)$.
4. Si $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$, alors on dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$, et on la note $\partial_{2,2}^2(f)$, où $\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = \partial_2(\partial_2(f))(x, y)$.

Exemples 10.7. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^3 - x^2y - 3xy + 5x - y + 7$.

On a :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y) = 12x - 2y.$$

$$\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = -2x + 2y - 3.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = -2x + 2y - 3.$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 2x.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

On a :

$$\partial_{1,1}^2(g)(x, y) = (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2}.$$

$$\partial_{2,1}^2(g)(x, y) = 4xye^{x^2+y^2}.$$

$$\partial_{1,2}^2(g)(x, y) = 4xye^{x^2+y^2}.$$

$$\partial_{2,2}^2(g)(x, y) = (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2}.$$

Définition 10.12 (🔗 [Matrice Hessienne](#)).

On appelle matrice hessienne ou hessienne de f en (x, y) la matrice de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, noté $\nabla^2(f)(x, y)$, ce que l'on lit "nabla deux de f en (x, y) ", définie par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 10.5.

Calculer si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

Donner la hessienne de f si elle existe.

Définition 10.13 (🔗 [Fonction de classe \$C^2\$](#)).

On dit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ et que chacune de ces quatre dérivées partielles est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 10.8 (🔗).

Toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 10.9 (🔗 [Opérations](#)).

1. La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. La composée d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction de classe C^2 sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 10.10 (🔗).

1. Toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions coordonnées sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Les fonctions rationnelles sont de classe C^2 sur leur ensemble de définition.

EXERCICE 10.6.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xe^{x+3y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque.

Attention les dérivées partielles $\partial_{2,1}^2(f)$ et $\partial_{1,2}^2(f)$ ne sont pas toujours égales!

Théorème 10.11 (🔗 [de Schwartz](#)).

Si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{2,1}^2(f) = \partial_{1,2}^2(f)$.

Remarque (Très importante).

Si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors sa hessienne est une matrice symétrique!

Théorème 10.12 (🔗 Développement limité d'ordre 2).

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout couple de réels (h, k) , on a :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \partial_1(f)(x, y) \times h + \partial_2(f)(x, y) \times k + \frac{1}{2}(\partial_{1,1}^2(f)(x, y)h^2 + 2\partial_{1,2}^2(f)(x, y)hk + \partial_{2,2}^2(f)(x, y)k^2) + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

où ϵ désigne une fonction continue en $(0, 0)$ et telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.

Cette égalité est le développement limité à l'ordre 2 de f en (x, y) et il est unique.

On peut l'écrire également sous la forme suivante :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + {}^t\nabla(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k).$$

EXERCICE 10.7.

Donner le développement limité d'ordre 2 de :

$f : (x, y) \mapsto 2x^2e^{x-2y}$ au point $(2, 1)$, ainsi que sa hessienne en ce point.

10.5 Extrema d'une fonction de deux variables réelles

10.5.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition 10.14 (Boules de $\mathbb{R}^2$).

Soit A un point de $\mathbb{R}^2$ et un réel r strictement positif. On appelle boule ouverte de centre A et de rayon r , l'ensemble noté $B(A, r)$ des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, M) < r$.

La boule est dite fermée et est notée $B_f(A, r)$, si $d(A, M) \leq r$.

Définitions 10.15 (Ouverts et fermés).

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte lorsque pour tout point A de U , il existe une boule ouverte de centre A , entièrement incluse dans U .

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Exemples 10.8.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$, toute boule ouverte et tout ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ (où a, b, c, d sont des réels) sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Toute boule fermée et tout ensemble de la forme $[a, b] \times [c, d]$ (où a, b, c, d sont des réels) sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

Définition 10.16 (Bornés).

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite bornée lorsqu'il existe un réel K strictement positif tel que, pour tout point (x, y) de U , on a : $x^2 + y^2 \leq K$. Autrement dit U est bornée si elle est incluse dans une boule fermée de centre $(0, 0)$.

Exemples 10.9.

Tout ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ (où a, b, c, d sont des réels) et tout ensemble de la forme $[a, b] \times [c, d]$ (où a, b, c, d sont des réels) sont des bornés de $\mathbb{R}^2$.

Remarque (Importante).

Les définitions de la continuité, de la classe C^1 , C^2 s'adaptent à des fonctions définies seulement sur une partie U de $\mathbb{R}^2$.

10.5.2 Extremums

Définitions 10.17 (extrema locaux-globaux).

On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe une boule B centrée en (x_0, y_0) telle que, pour tout point $(x, y) \in B \cap U$, on a : $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Le maximum est **global** lorsque l'inégalité est vraie sur tout U .

On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe une boule B centrée en (x_0, y_0) telle que, pour tout point $(x, y) \in B \cap U$, on a : $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Le minimum est **global** lorsque l'inégalité est vraie sur tout U .

Théorème 10.13 ( Continuité sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$).

Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, est bornée et atteint ses bornes sur cette partie. (ie qu'elle y admet un maximum global et un minimum global)

EXERCICE 10.8.

On admet que l'ensemble $U = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que l'ensemble $V = \{(x, y) / x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction définie par :

$$f : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2y^2 - 4x - 3y + 4xy + 3.$$

Montrer que f admet un maximum et un minimum sur U et préciser leurs valeurs.

Définition 10.18 ( Point critique).

Soit f une fonction de deux variables sur U une partie de $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur U . On appelle point critique de f tout point $(x, y) \in U$ tel que $\nabla(f)(x, y) = 0$.

Remarque.

Tout comme on a pu définir la notion de tangente à une courbe pour des fonctions d'une variable, on pourrait définir la notion de plan tangent. L'équation du plan tangent à la surface définie par f au point (a, b) est : $z = \partial_1(f)(a, b)(x - a) + \partial_2(f)(a, b)(y - b) + f(a, b)$. Si (a, b) est un point critique, l'équation devient $z = f(a, b)$: plan horizontal. C'est donc en ces points critiques, que l'on va chercher des extrémums.

Théorème 10.14 ( Condition nécessaire d'existence d'un extremum local).

Soit une fonction f de classe C^1 sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de U alors (x_0, y_0) est un point critique de f ou encore : $\nabla(f)(x_0, y_0) = 0$.

Remarques.

ATTENTION la réciproque de ce théorème est fausse! Contre-exemple : $f(x, y) = xy$, C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car fonction polynôme et $\partial_1(f)(x, y) = y$, $\partial_2(f)(x, y) = x$. La fonction n'a qu'un seul point critique $(0, 0)$ mais ce point n'est pas un extremum local. Et si U n'est pas ouvert alors f peut avoir un extremum local en un point autre qu'un point critique.

EXERCICE 10.9.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. En quels points f peut-elle présenter un extremum?

EXERCICE 10.10.

Soit h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 10$. En quels points h peut-elle présenter des extrémums?

• Point méthode pour trouver les points critiques sur U

1. On s'assure que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (donné par l'énoncé) et que f est de classe C^1 sur U .
2. Recherche des points critiques : on résout le système $\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases}$
3. Ce système n'est pratiquement jamais linéaire et il faudra utiliser souvent la méthode par substitutions pour le résoudre.
4. Les solutions (ce sont les points critiques de f) sont les seuls points en lesquels f peut admettre un extremum.
5. Chacun des points trouvés ne sont pas forcément des extrema de f . Il faut poursuivre l'étude en utilisant la condition suffisante d'existence d'un extremum local, à savoir le théorème 10.15.

Théorème 10.15 (Condition suffisante d'existence d'un extremum local).

Soit une fonction f de classe C^2 sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$.

1. Si $(x_0, y_0) \in U$ est un point critique de f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (resp. strictement négatives) alors f admet un minimum (resp. un maximum) local en (x_0, y_0) .
2. Si $(x_0, y_0) \in U$ est un point critique de f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un **point col ou point selle** pour f .
3. Si $(x_0, y_0) \in U$ est un point critique de f et si une des valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) est nulle, on ne peut rien conclure par l'étude de la hessienne.

Remarque.

Ce théorème énonce des conditions suffisantes pour que f ait un extremum **local** en un point critique, il ne prouve pas que cet extremum (s'il existe) est **global**!

EXERCICE 10.11.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. f a-t-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 10.12.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$. f a-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 10.13.

Soit g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$. g a-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?

• Point méthode pour savoir si f a un extremum local en un point critique

1. On a prouvé que (x_0, y_0) est un point critique par la méthode 10.5.2.

2. Il faut calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

3. Il faut ensuite former la matrice hessienne en ce point critique :

$$A = \nabla^2(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x_0, y_0) & \partial_{1,2}^2(f)(x_0, y_0) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x_0, y_0) & \partial_{2,2}^2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

4. Il faut ensuite chercher les valeurs propres de cette matrice d'ordre 2 en écrivant : on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $A - \lambda I_2$ soit non inversible. Ce qui équivaut à dire : $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0$.

5. On résout cette équation si elle est simple ou on utilise le résultat sur la somme et le produit des racines d'un polynôme du second degré vu en première année.

6. On discute ensuite sur le signe des valeurs propres obtenues, en utilisant le théorème 10.15.

10.6 Application en micro-économie

Contexte : on effectue une opération consistant à utiliser des facteurs de production (biens ou services comme les matières premières, l'énergie ou le travail) pour créer d'autres biens ou services.

La **fonction de production** décrit la relation entre la quantité produite d'un bien quelconque et les quantités des différents facteurs de production nécessaires à sa fabrication.

Lorsqu'il y a deux facteurs de production (cf exemple ultérieur où les facteurs de production sont la terre et le travail dans l'opération de récolte), la fonction de production est une fonction numérique de 2 variables réelles : à titre illustratif, on peut envisager des fonctions du type $Q(x, y) = ax + by$, ou $Q(x, y) = Axy$ ou encore $Q(x, y) = u\sqrt{xy} = ux^{1/2}y^{1/2}$, avec a, b, A, u des paramètres, ou plus généralement

$Q(x, y) = ux^\alpha y^\beta$, avec $\alpha, \beta > 0$ qui est la fonction de Cobb-Douglas.

EXERCICE 10.14.

Calculer les dérivées partielles par rapport aux deux variables de ces fonctions Q .

Exemple :

On s'intéresse à la récolte totale obtenue Q en un an d'une certaine exploitation, avec comme facteurs de production la terre et le travail. Autrement dit, on étudie $Q = Q(T, L)$, où T représente la surface de terre occupée par l'exploitation, et L le nombre de travailleurs (ou le nombre d'heures travaillées).

Considérons l'application partielle Q_T où T varie mais L reste fixe.

On définit la productivité marginale de la terre comme le supplément de production découlant de l'utilisation d'une unité supplémentaire de terre dans le processus de production, l'utilisation des autres facteurs de production (ici le facteur L) restant inchangé : $\frac{Q(T_2, L) - Q(T_1, L)}{T_2 - T_1}$: si l'accroissement $T_2 - T_1$ est infiniment petit, la limite quand T_2 tend vers T_1 est justement la dérivée partielle

$$Q'_T(T_1, L) = \frac{\partial Q}{\partial T}(T_1, L).$$

→ dessiner Q_T .

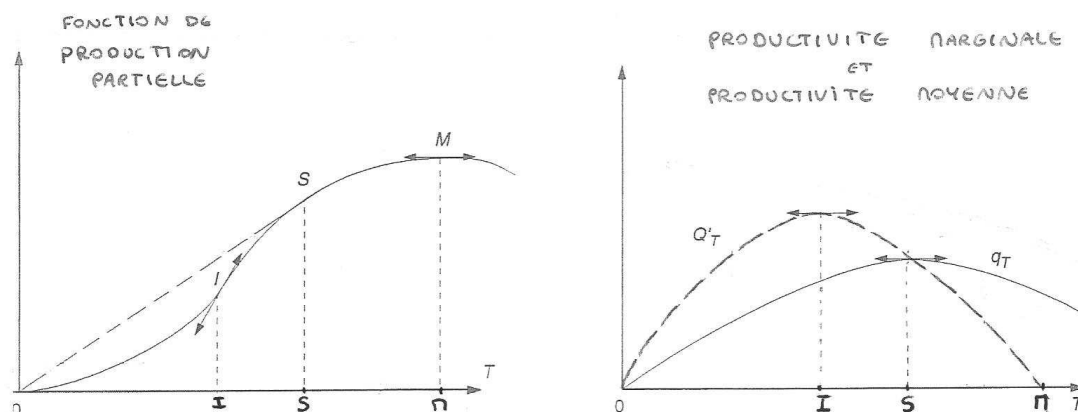
Quand la courbe $Q_T = Q_T(T, L)$ présente un point d'inflexion I pour $T = T_1$, il en découle que la productivité marginale présente un maximum pour cette même valeur, puisque avant ce point d'inflexion, la dérivée Q'_T est croissante, et après ce point, elle décroît.

La **productivité moyenne** de la terre q_T est quant à elle définie par $q_T = \frac{Q(T, L)}{T}$ (L fixé). Elle croît jusqu'à son intersection avec la courbe de Q'_T et décroît ensuite.

Montrons que l'intersection des courbes $T \rightarrow Q'_T$ et $T \rightarrow q_T$ correspond effectivement au maximum de q_T : on sait que le maximum de q_T vérifie $\frac{\partial q_T}{\partial T} = 0$.

$$\text{Or } \frac{\partial q_T}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Q}{T} \right) = \frac{TQ'_T - Q}{T^2} = \frac{T}{T^2} (Q'_T - \frac{Q}{T}) = \frac{1}{T} (Q'_T - q_T). \text{ Donc } \frac{\partial q_T}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow Q'_T = q_T.$$

De manière analogue, on peut étudier l'évolution de la récolte avec une surface d'exploitation fixe, mais un nombre de travailleurs variable, en étudiant la deuxième application partielle Q_L où T est fixe et L est variable. On définit la productivité marginale du travail comme le supplément de production découlant de l'utilisation d'une unité supplémentaire de travail dans le processus de production, l'utilisation des autres facteurs (ici le facteur terre T) restant inchangée : $\frac{Q(T, L_2) - Q(T, L_1)}{L_2 - L_1}$. Si



on peut supposer la parfaite divisibilité du facteur travail (il faut alors raisonner en heures de travail et non sur les travailleurs), on peut considérer des accroissements très petits de L et comme précédemment, en passant à la limite, on obtient la dérivée partielle par rapport à L $Q'_L(T, L_1) = \frac{\partial Q}{\partial L}(T, L_1)$.

Dans le cas de deux facteurs de production, on peut représenter dans l'espace la surface de production c'est-à-dire la surface définie par $z = Q(T, L)$.

En général, la fonction de production est croissante de l'utilisation de chacun des facteurs qui sont représentés sur les deux axes (T et L); il y a donc apparition d'une surface qui ressemble à une colline. On peut "gravir" la colline (en partant de l'origine), en suivant différentes directions, c'est-à-dire que l'on peut augmenter la production en accroissant l'utilisation de l'un, de l'autre ou des 2 facteurs.

Pour préciser la forme de la surface, on a recours aux lignes de niveau appelées également courbes isoquantes ou courbes d'égale production (i.e. de production $Q=c$ constante).

Une isoquante ou courbe d'égale production est l'ensemble des combinaisons des facteurs de production permettant d'obtenir le même niveau de production : $\{(T, L) \text{ tels que } Q(T, L) = c = \text{cste}\}$.

Remarque. Il existe une infinité d'isoquantes, chacune des courbes correspondant à un niveau de production donné. Si l'on représente sur un même graphique (dans le plan (T, L)), différentes isoquantes, le niveau de production est d'autant plus élevé que l'on se dirige vers le "nord-est" du graphique.

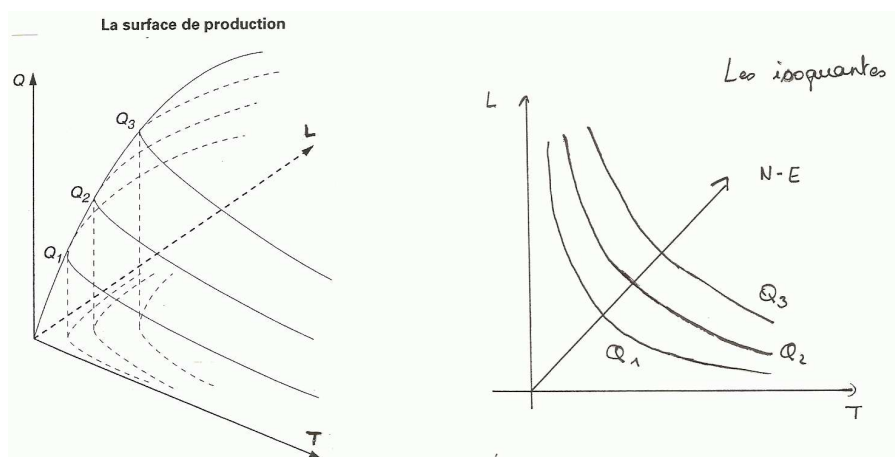
Remarquons qu'il est impossible que deux isoquantes se coupent puisque chacune d'entre elles correspond à un niveau de production différent.

En général (c'est-à-dire dans tous les modèles un minimum réalistes), les isoquantes seront convexes et décroissantes.

Les isoquantes seront utilisées afin de déterminer quel est le niveau maximal de production pour un coût donné : la répartition T et L sera alors imposée au producteur. Il suffit de tracer la droite du coût et de choisir l'isoquante qui est tangente à cette droite. Le point de tangence est la répartition (T, L) adéquate.

Autre point de vue : les rendements d'échelle et non les rendements factoriels. Dans le cas des rendements factoriels, on envisage les conséquences sur le niveau de production d'un accroissement d'un seul facteur. Dans le cas des rendements d'échelles, on étudie les conséquences sur le niveau de production d'un accroissement simultané et dans la même proportion des facteurs de production.

Dans le cas de deux facteurs de production on s'intéresse au comportement de $Q(mT, mL)$ par rapport à $Q(T, L)$. Pour étudier ces rendements d'échelle, on introduit la notion de fonctions homo-



gènes :

Définition 10.19. Une fonction $Q(T, L)$ est dite homogène de degré k si $\forall m > 0$, $Q(mT, mL) = m^k Q(T, L)$.

En supposant $m > 1$, on trouve 3 cas :

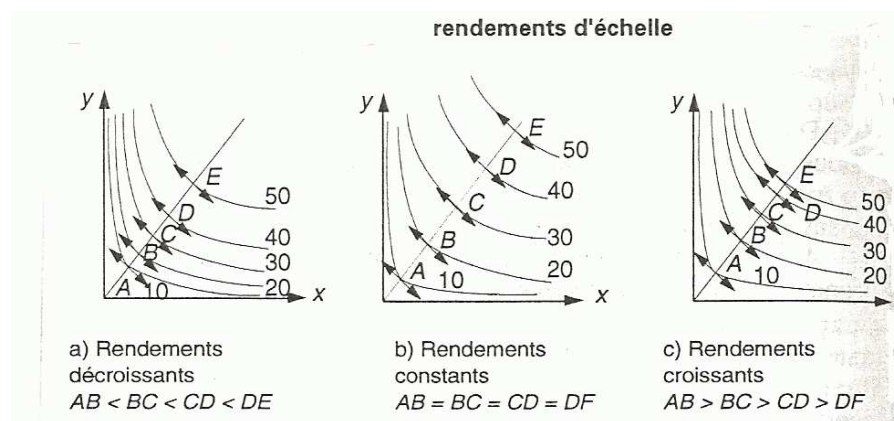
$k = 1$	$Q(mT, mL) = mQ(T, L)$	les rendements sont constants
$k > 1$	$Q(mT, mL) = m^k Q(T, L) > mQ(T, L)$	les rendements sont croissants
$k < 1$	$Q(mT, mL) = m^k Q(T, L) < mQ(T, L)$	les rendements sont décroissants.

EXERCICE 10.15.

Trouver le degré d'homogénéité de la fonction de Cobb-Douglas $Q(T, L) = AT^\alpha L^\beta$, en fonction des paramètres α et β , et en déduire la nature des rendements d'échelle.

Représentation graphique

Selon le degré d'homogénéité, des augmentations de production d'un montant égal demanderont des quantités croissantes, constantes ou décroissantes des deux facteurs. Dans le premier cas, les rendements d'échelle seront décroissants (attention!), constants ou croissants.



EXERCICE 10.16.

Soit la fonction de production micro-économique d'une entreprise : $Q(K, L) = 2K^{1/5}L^{3/5}$ où K est le capital et L le travail.

1. Donner le nom de cette fonction de production. Que représente le facteur multiplicatif 2 ?
2. Calculer les productivités marginales du capital et du travail.
3. Montrer que ces productivités sont décroissantes. Est-ce une nécessité économique ?
4. Trouver le rendement d'échelle de cette fonction de production. Signification ?

Feuille d'exercices n°10

FONCTIONS NUMÉRIQUES DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

Exercice 1. Trouver le domaine de définition

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $a : (x, y) \mapsto \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + \frac{x^2}{2}$.
2. $b : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Représenter une ligne de niveau

Par définition, la ligne de niveau k d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $f(x, y)$ soit bien défini et vérifie $f(x, y) = k$.

Pour représenter une telle ligne de niveau, si l'on ne reconnaît pas un cas particulier évident (par exemple, un cercle), on se ramène au tracé des courbes représentatives de fonctions réelles.

On cherche pour cela à isoler y (parfois x) dans l'équation $f(x, y) = k$.

1. Représenter la ligne de niveau -1 de la fonction $F : (x, y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$.
2. Représenter la ligne de niveau 1 de la fonction $G : (x, y) \mapsto x^2y^2$

Exercice 3. Justifier qu'une application est de classe C^1 ou C^2

1. Justifier que la fonction $a : (x, y) \mapsto \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + \frac{x^2}{2}$ est de classe C^2 sur son domaine de définition D_a .
2. Justifier que la fonction $k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que la fonction $l : (x, y) \mapsto xye^{x^2y}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
4. Justifier que la fonction $m : (x, y) \mapsto \sqrt{xy^2 + 1}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Exercice 4. Donner un DL à l'ordre 2

Donner le DL à l'ordre 2 en $(0, 0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = y^2x + (1 + y)e^x$.

**Exercice 5. Trouver un gradient
ou une matrice hessienne**

1. Déterminer le gradient de l'application a en tout point de D_a .
2. Déterminer la matrice hessienne de l'application a en tout point de D_a .

**Exercice 6. Trouver des points critiques
et leurs natures**

1. Rechercher les points critiques de la fonction $k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et leurs natures.
2. Rechercher les points critiques de la fonction a et leurs natures.

Exercice 7. Trouver les extrema

1. Déterminer les extrema éventuels de l'application a .
2. Déterminer les extrema locaux de la fonction $c : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2} - ey^2$.
3. Montrer que la fonction $h : (x, y) \in [0, 1]^2 \mapsto 3 - x^2 + 2xy^2 - 2y^4 + 2y^2 \in \mathbb{R}$ admet un maximum global et un minimum global. Préciser leurs valeurs.
4. Montrer que la fonction j définie sur $\mathbb{R}^2$ par $j : (x, y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^2$ possède un seul point critique dont on donnera la nature et la valeur.
5. Idem avec la fonction n définie sur $\mathbb{R}^2$ par $j : (x, y) \mapsto 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$.
6. Etude des points critiques (existence, nature, valeurs) de la fonction q définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $q : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.
7. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x[(\ln x)^2 + y^2]$. Montrer que f admet un seul extremum local. Est-il global?

Exercice 8. EML 2015

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ , en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini?

Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U .
10. Calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières de g en (x, y) .
11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?
13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?
14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 9. EML 2012

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
 - (b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.
 - (c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 - (d) Tracer l'allure de Γ . On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , définie, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
2. Montrer que (e, e) est un point critique de F .
3. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$. Est-ce que F admet, un extremum local en (e, e) ?

Exercice 10. EML 2003

On note $e = \exp(1)$, et $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

On considère, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} - \frac{y}{a}$$

I. Première partie

Dans cette première partie, on prend $a = -e$, et on note g à la place de f_{-e} . Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.
4. Est-ce que g admet un extremum?

Exercice 11. EML 2006

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$$

1. (a) Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F .
 (b) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$?
 (c) Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$?
2. On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5)$$

- (a) Montrer : $\forall x \in [4; +\infty[, \quad (x-2)(2x-5) \geq 4$
- (b) En déduire : $\forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4, +\infty[$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n)$$

(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ .

(b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 4^{n+1}$

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

Exercice 12. ECRICOME 2008

On considère les fonctions suivantes : $g(x, y) = 1 + \ln(x + y)$ (fonction des variables x et y)

et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f_p(x) = g(x, p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$ (famille de fonctions de la variable réelle x).

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1. Recherche d'extremum éventuel de la fonction g

- Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition D de la fonction g . On hachurera D . On admet que cet ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Déterminer sur D les dérivées partielles premières de g . La fonction g admet-elle un extremum sur D ?

2. Etude de la fonction f_1

- Donner le domaine de définition de f_1 .
- Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction f_1 .
- En déduire une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe C_1 par rapport à cette tangente.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ces limites.

Exercice 13. ECRICOME 2006

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x (x + y^2 + e^x)$$

Recherche d'extremum local de g .

- Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
- Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α , élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)
- Déterminer le seul point critique de g , c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$, en lequel g est susceptible de présenter un extremum.

5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum?
6. Montrer que l'on a :

$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

Exercice 14. ECRICOME 2000

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note T' l' "intérieur" de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$

- 1) Représenter sur un même graphique T et T' .
- 2) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 - a : Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f .
 - b : Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T' .
- 3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x, y) de T :

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).

On suppose que $p \geq \frac{1}{4} \quad r \geq \frac{1}{4} \quad u \geq \frac{1}{4}$ et que $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement : "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{\text{ième}}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).

On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

- 4) Déterminer la loi de X . Faire de même pour Y .
- 5) Soit i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X, Y) .
- 6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- 7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité :

$$P(D = k) = \frac{pr}{p+r} \left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1} \right]$$

- 8) Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p, r)$. Encadrer alors $E(D)$.

Exercice 15. EDHEC 2010 On considère la fonction f définie, pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

1. Montrer que, pour tout couple (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
 3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.
 4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
 5. (a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.
 (b) En déduire que f admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
 6. Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par :

$$g(x, y) = 2 \ln(x + y) - \ln x - \ln y.$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $g(x, y) \geq 2 \ln 2$.

Exercice 16. EDHEC 2006

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f .
 (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
 2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f .
 (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
 3. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$.
 (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
 4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :
 $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.
 (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
 (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 17. ESC 2002

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :

X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n, x)$ avec $x \in]0, 1[$).

Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n, y)$ avec $y \in]0, 1[$).

On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité : $Z = 2n - X - Y$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z .

(b) Exprimer en fonction de n , x et y les probabilités :

$$P(Z=0) \quad ; \quad P(Z=2n) \quad ; \quad P(Z=2n-1) \quad ; \quad P(Z=1)$$

2. (a) Donner les espérances et variances suivantes : $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.

(b) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.

Montrer que l'espérance de W est donnée par : $E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

3. On pose $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x, y) = xy(2 - x - y) \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ de } D$$

(a) Justifier que f est de classe C^2 sur D .

(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , en déduire le seul point (x_0, y_0) de D (appelé "point critique") susceptible de réaliser un extremum local pour f .

(c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , et montrer que f admet un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\frac{8}{27}$.

(d) Montrer que pour tout couple (x, y) de D : $f(x, y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4} \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y \left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$

En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D .

4. On suppose que les variables X , Y définies plus haut représentent, en centimètres, la largeur et la longueur d'une brique, dont la hauteur Z est telle que la somme des côtés, $X + Y + Z$, est toujours égale à 56 cm, et de volume XYZ .

(a) Quelles sont les valeurs que l'on doit donner aux paramètres x et y pour que le volume moyen de la brique soit maximal ?

(b) Montrer que ce volume moyen maximum est de 6272 cm^3 .

Exercice 18. HEC 2008

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2, on considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n -uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les réels $x_1, x_2, \dots$ (resp $y_1, y_2, \dots$) ne sont pas tous égaux.

On appelle moyenne arithmétique $\bar{x}$ et écart-type σ_x du n -uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ les réels suivants :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart-type σ_y du n -uplet $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

La covariance $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad \text{et} \quad r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe le réel $f(a, b)$ tel que :

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (a x_k + b - y_k)^2$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Écrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f .
(b) Résoudre le système (S)
En déduire que f admet un unique point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x^2 et $cov(x, y)$.
(c) Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .
(d) Établir la formule suivante : $f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - r^2(x, y))$
3. (a) Montrer que l'on a : $|r(x, y)| \leq 1$.
(b) Que peut-on dire du nuage de points lorsque $|r(x, y)| = 1$?