

TD S4.3 - Régime sinusoïdal forcé

Table des matières

1	Notation complexe	1
2	Mesure de déphasages	1
3	Résonance en élongation	3
4	Circuit RC en régime sinusoïdal	5
5	Circuit RL en régime sinusoïdal	6
6	Résonance d'intensité	7

1 Notation complexe

Nous allons voir dans cet exercice que certaines formules se retrouvent de manière rapide et élégante grâce à la notation complexe.

1.1 Quel est l'amplitude et la phase initiale du signal $s_0(t) = -2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Donner la représentation complexe des signaux suivants :

1.2 $s_1(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $s_2(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

1.3 $s_3(t) = A \cos(\omega t)$ et $s_4(t) = B \sin(\omega t)$, en déduire la représentation complexe de $s_5(t) = s_3(t) + s_4(t)$ puis l'expression de son amplitude C et de sa phase initiale φ (on distinguera les deux cas : $A > 0$ ou $A < 0$).

1.4 $s_6(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_7(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, en déduire la représentation complexe de $s_8(t) = s_6(t) + s_7(t)$ puis l'expression de son amplitude S . Retrouver ainsi la condition d'interférences constructives et la condition d'interférences destructives lorsque les signaux $s_6(t)$ et $s_7(t)$ interfèrent.

2 Mesure de déphasages

2.1 Soient deux tensions sinusoïdales ¹ $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, représentées sur la figure 1.

Pour mesurer le déphasage $\varphi_2 - \varphi_1$ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$, on repère un instant t_1 de passage par 0 de $u_1(t)$ sur front montant et l'instant t_2 , le plus proche de t_1 , de passage par 0 de $u_2(t)$ sur front montant (voir figure ci-dessous). Montrer qu'alors :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T}(t_1 - t_2)$$

D'après les graphes, calculer et qualifier ce déphasage dans le cas présent.

Calculer φ_1 et φ_2 puis donner l'amplitude complexe de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/sinus.php

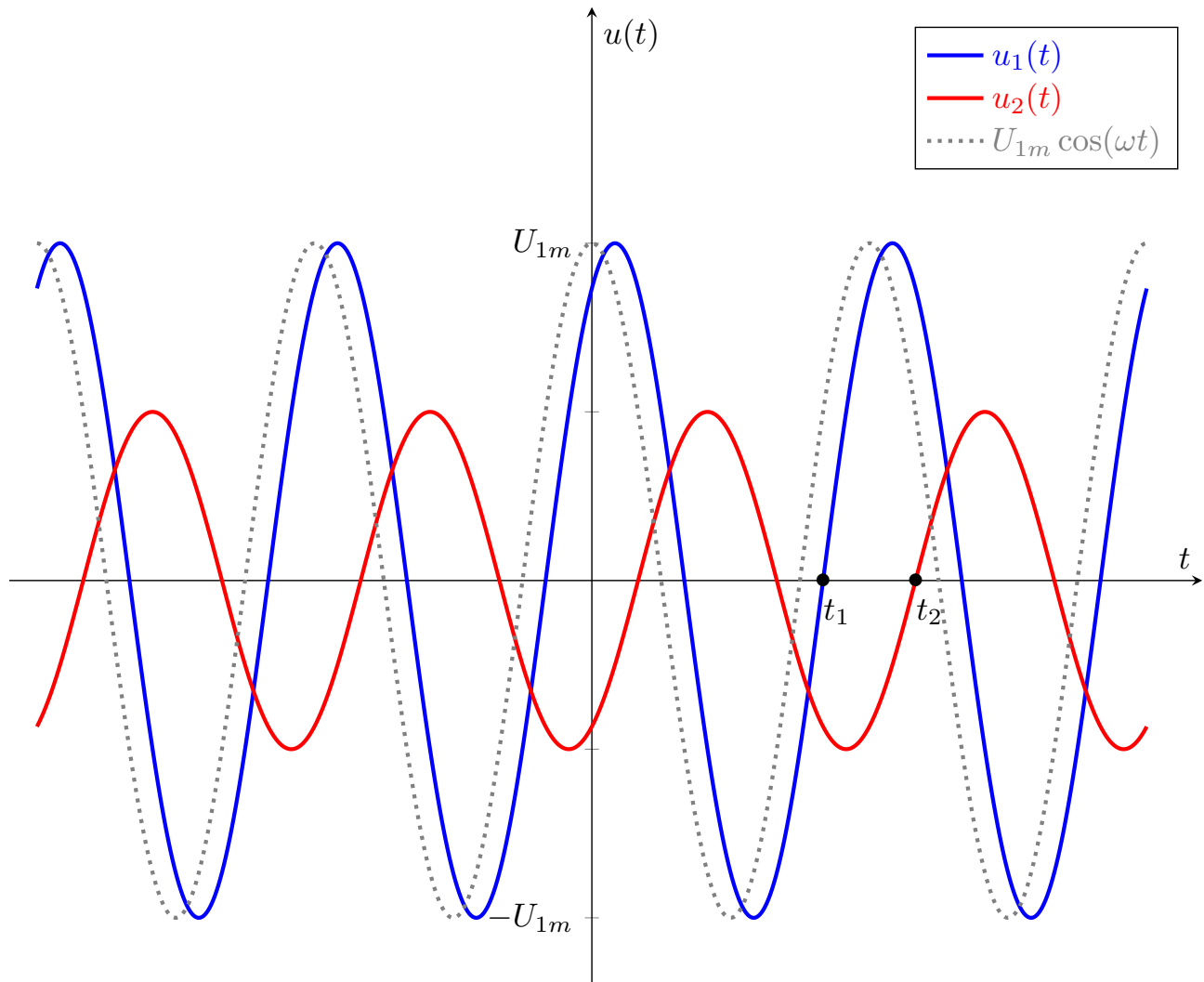
Différentes tensions en fonction du temps t 

Figure 1 – Mesure d'un déphasage

2.2 Sur l'oscillogramme de la figure 2, la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, est prise comme origine des phases (cela signifie que sa phase initiale est nulle). Donner les représentations complexes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$, en précisant la nature de leur déphasage par rapport à $u(t)$.

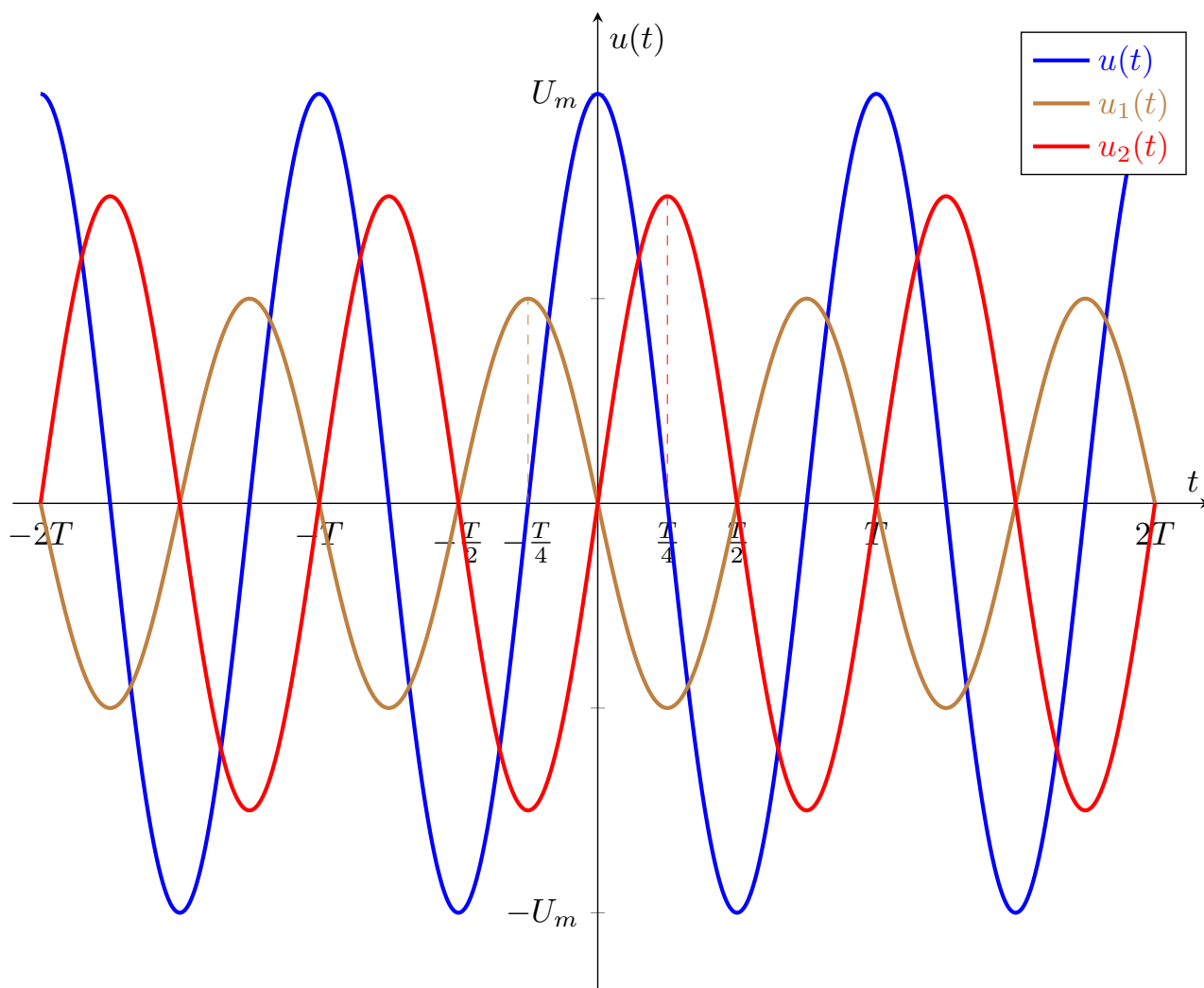
Différentes tensions en fonction du temps t 

Figure 2 – Quadrature avance ou retard

3 Résonance en élongation

Considérons un oscillateur harmonique horizontal ², constitué d'un mobile de masse $m = 1 \text{ kg}$, attaché à un ressort de constante de raideur $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 , qui oscille le long d'un axe horizontal sur une table à coussin d'air qui élimine les frottements solide au niveau du contact avec le support. Le mobile subit une force de frottements visqueux de l'air :

$$\vec{f} = -h\dot{x}\vec{e}_x$$

L'extrémité gauche du ressort est fixée en A, d'abscisse $x_A(t)$, à une masselotte dont on peut forcer le mouvement grâce à un dispositif non représenté sur la figure 3.

L'autre extrémité du ressort (à droite) est fixée en M, d'abscisse $x(t)$, à une autre masselotte de masse m .

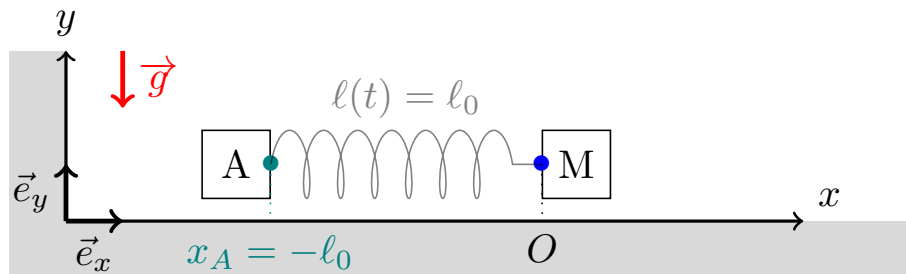
Les deux masselottes sont astreintes à se déplacer avec un mouvement rectiligne parallèle à l'axe (Ox) de vecteur unitaire $\vec{e}_x$.

A l'équilibre et en l'absence d'excitation, le point A est fixe à l'abscisse $x_A = -\ell_0$ et le point

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html

M est fixe à l'abscisse $x = 0$.

Ressort à l'équilibre en l'absence d'excitation :



Ressort en mouvement avec excitation :

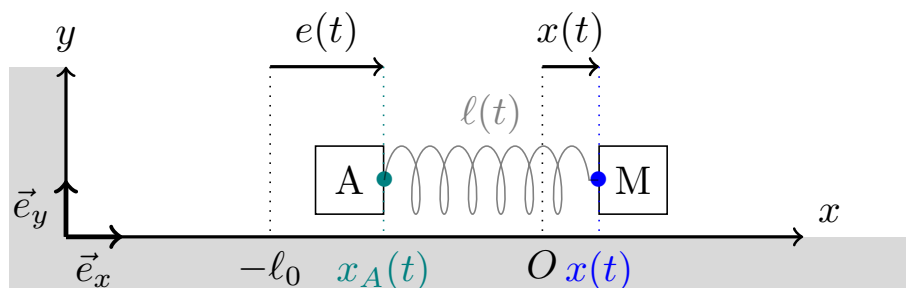


Figure 3 – Oscillateur horizontal en régime sinusoïdal forcé.

En présence d'une excitation notée $e(t)$, le point A est animé d'un mouvement sinusoïdal tel que :

$$x_A(t) = -\ell_0 + e(t) \quad \text{avec} \quad e(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

Où $e(t)$ est appelée excitation sinusoïdale de l'oscillateur, X_0 est l'amplitude de l'excitation et ω sa pulsation, la phase initiale de $e(t)$ est prise nulle, ce qui revient à prendre l'excitation pour origine des phases.

La position $x(t)$ de la masse est repérée par rapport à la position d'équilibre en l'absence d'excitation. On considère que le régime sinusoïdal forcé est atteint et on note la position du mobile :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

3.1 Trouver l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$$

en donnant l'expression de ω_0 et Q .

3.2 Trouver l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}(\omega)$ de $x(t)$, puis en déduire l'expression de X_m et φ .

3.3 A quelle condition sur h , l'amplitude de $x(t)$ peut-elle être supérieure à celle de $x_A(t)$?

4 Circuit RC en régime sinusoïdal

Dans le circuit représenté sur la figure 4, le générateur de tension possède une force électromotrice $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 1\text{ V}$, de phase initiale nulle ($e(t)$ est prise comme origine des phases), et de pulsation ω :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

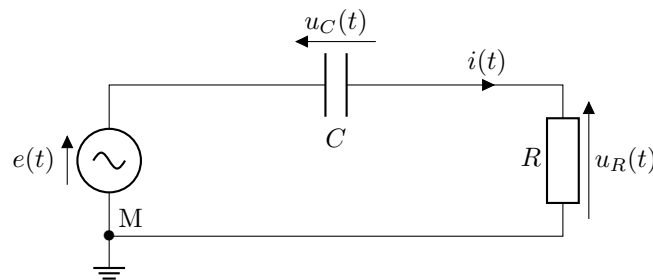


Figure 4 – Circuit (R, C) série en régime sinusoïdal forcé.

On se place en régime sinusoïdal forcé.

4.1 Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$ du courant circulant dans le circuit puis en déduire l'expression de $i(t)$.

4.2 Quelle est la nature du déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

4.3 Tracer l'allure de $e(t)$ et $u_R(t)$ dans le cas où $\omega = \frac{1}{RC}$ sur la figure 5.

Différentes tensions en fonction du temps t

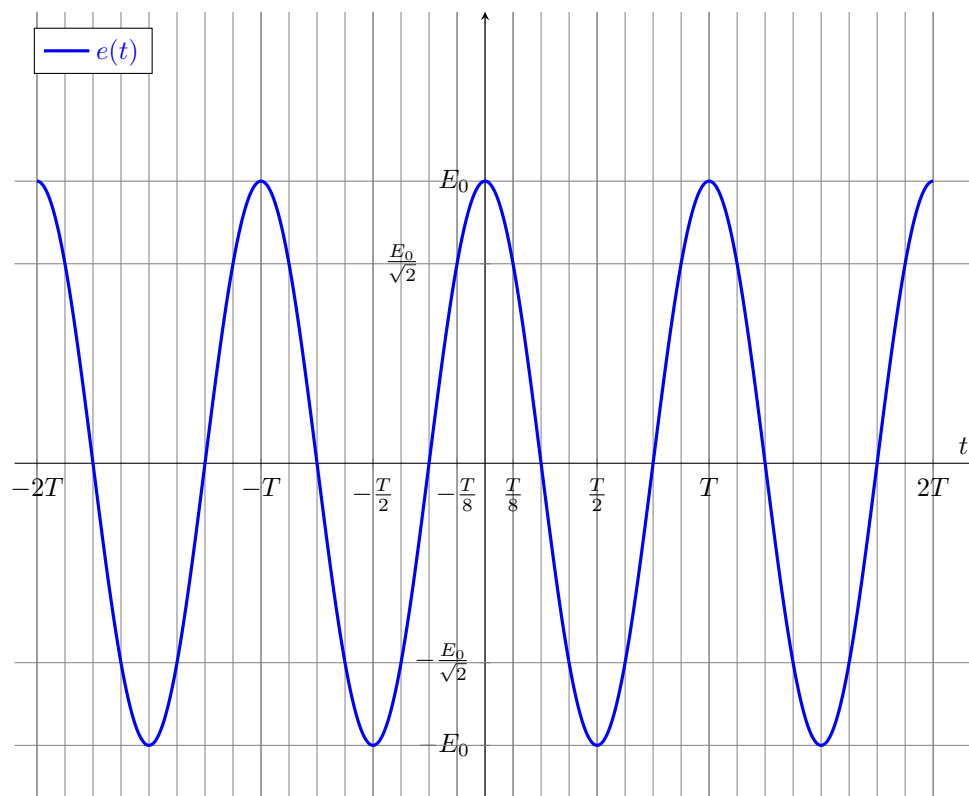


Figure 5 – Courbes du circuit (R, C) série à compléter pour $\omega = \omega_c$

5 Circuit RL en régime sinusoïdal

Dans le circuit représenté sur la figure 6 le générateur de tension possède une force électromotrice $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 1\text{ V}$, de phase initiale nulle ($e(t)$ est prise comme origine des phases), et de pulsation ω :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

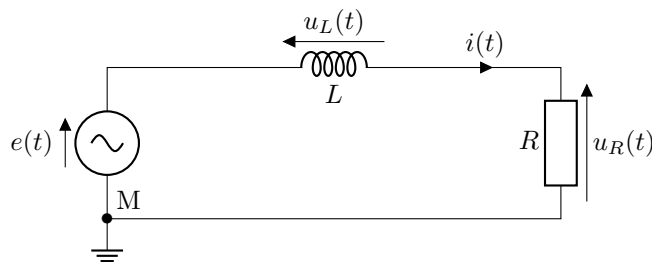


Figure 6 – Circuit (R, L) série en régime sinusoïdal forcé.

On se place en régime sinusoïdal forcé.

5.1 Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$ du courant circulant dans le circuit puis en déduire l'expression de $i(t)$.

5.2 Quelle est la nature du déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

5.3 Tracer l'allure de $e(t)$ et $u_R(t)$ dans le cas où $\omega = \frac{R}{L}$ sur la figure 7.

Différentes tensions en fonction du temps t

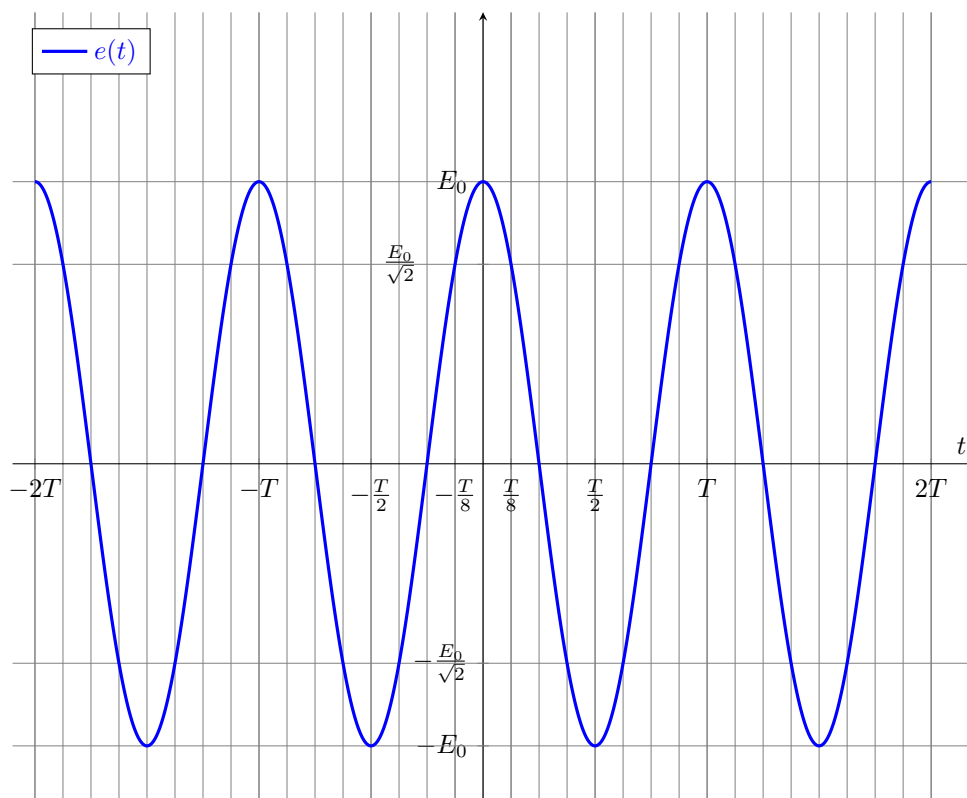


Figure 7 – Courbes du circuit (R, L) série à compléter pour $\omega = \omega_c$

6 Résonance d'intensité

Dans le circuit représenté sur la figure 8, le générateur de tension possède une force électromotrice $e(t)$ sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 10 \text{ V}$, de phase initiale nulle ($e(t)$ **est prise comme origine des phases**), et de pulsation ω . Cette f.é.m constitue l'excitation sinusoïdale du circuit RLC série :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

R est la résistance totale du circuit quand K est fermé. Pour évaluer la résistance totale du circuit, on doit prendre en compte la résistance interne du générateur $R_g = 50 \Omega$, la résistance interne de la bobine $r = 13 \Omega$ plus une boîte à décade dont on peut faire varier la résistance R_1 qui est placée en série avec L et C . A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le condensateur est déchargé :

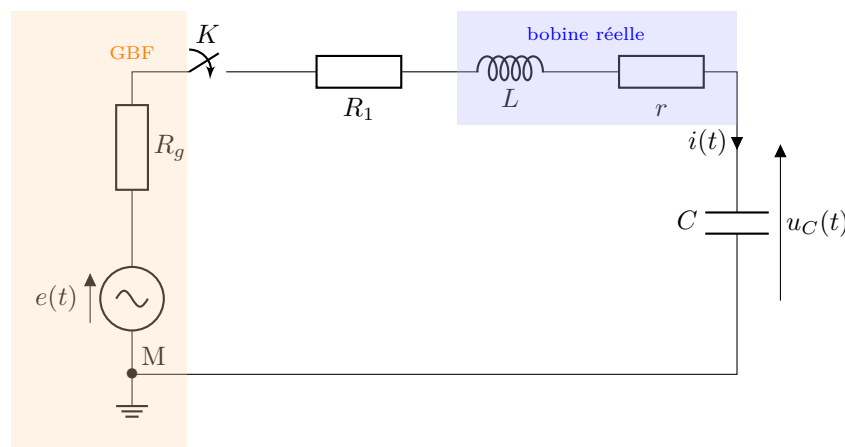


Figure 8 – Circuit R, L, C série.

Ainsi, une fois l'interrupteur K fermé, le circuit est équivalent au circuit de la figure 9 ci-dessous avec $R = R_1 + R_g + r$:

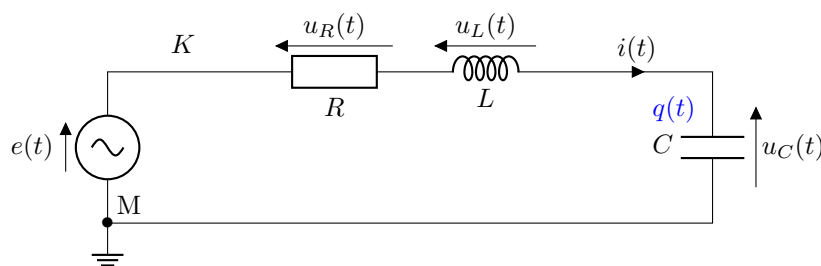


Figure 9 – Circuit R, L, C série équivalent.

6.1 On mesure les grandeurs électriques en régime sinusoïdal forcé. Qu'est-ce-que cela signifie ?

6.2 Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$ de l'intensité du courant circulant dans le circuit en fonction de E_0 , R , L , C et ω .

6.3 En déduire l'expression de l'amplitude $I_m(\omega)$ de l'intensité du courant dans le circuit et sa phase $\varphi(\omega)$.

6.4 Exprimer la pulsation de résonance ω_0 et les pulsations de coupure ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ en fonction de R , L et C

6.5 Montrer que la bande passante est $\Delta\omega = \frac{R}{L}$

On a relevé les courbes expérimentales pour l'amplitude et la phase de l'intensité du courant dans le circuit sur la figure 10.

6.6 Comment obtenir le plus rapidement possible la valeur de R ? Faire l'application numérique.

6.7 Quelle est la méthode la plus précise pour mesurer ω_0 ? Faire la mesure d'après les courbes.

6.8 Mesurer la bande passante et en déduire la valeur du facteur de qualité Q .

6.9 Déduire de ce qui précède les valeurs numériques de L et C .

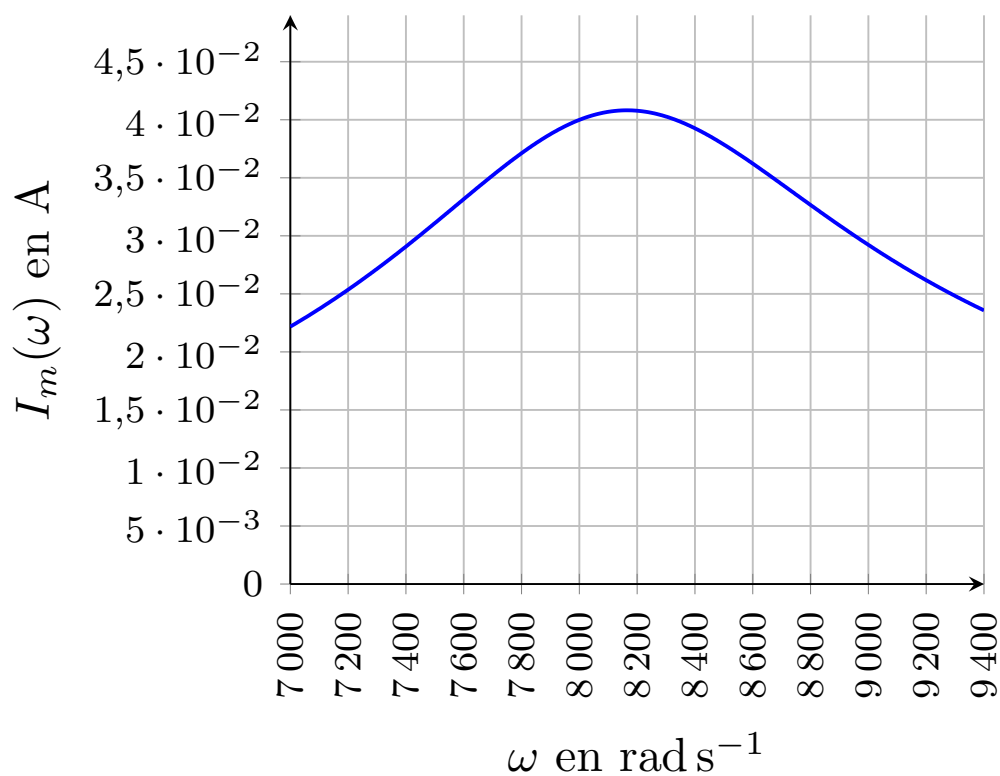
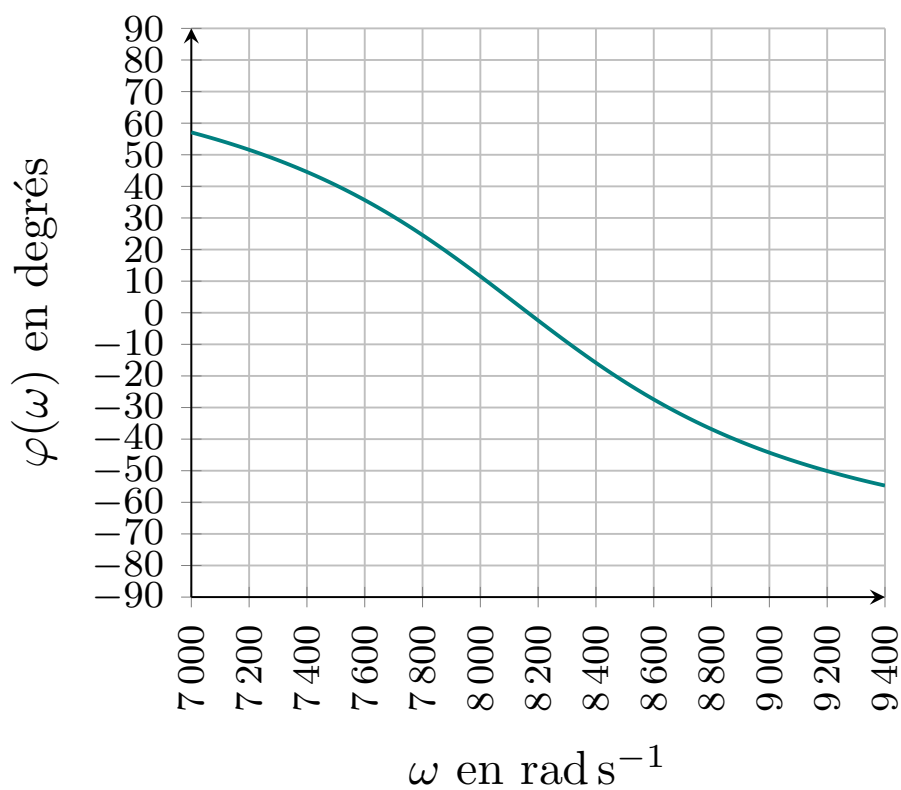
Amplitude I_m en fonction de la pulsation ω Phase φ en fonction de la pulsation ω 

Figure 10 – Résonance en intensité du courant.