

Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $z_1 = 3i(2ix - 4)$
2. $z_2 = \frac{1}{i}$
3. $z_3 = i^3$
4. $z_4 = (3 - i)^2$
5. $z_5 = \frac{3(2 + i)}{1 - i}$
6. $z_6 = \frac{i - e^x}{i + x}$
7. $z_7 = \frac{\cos(x) + 2ix}{i} + (ie^x - e^x)(1 + 2i)$

Exercice 2 (★). Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module de :

1. $z_1 = 5i$
2. $z_2 = -3i$
3. $z_3 = 3 - 2i$
4. $z_4 = (2 + i)(i - t)$
5. $z_5 = -2i(\sin(t) - it)$
6. $z_6 = \frac{2 - i}{3 - i}$
7. $z_7 = \frac{3i(1 + it^2)}{e^t - i}$

Exercice 3 (★★). Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique (en précisant s'il y a des valeurs de t interdites) :

$$(a) \ z_1 = \frac{2 + i}{1 + 2i} \quad (b) \ z_2 = (1 + i)^5 \quad (c) \ z_3 = \frac{e^{-it}}{1 + 3i} \quad (d) \ z_4 = \frac{1 + e^{it}}{e^{it} - e^{2it}}.$$

2. Déterminer leurs modules.

Exercice 4 (★). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2(2\theta)$
2. $\sin(2\theta) \cos(\theta)$
3. $\sin^3(\theta)$
4. $\cos(n\theta) \cos(\theta)$
5. $\cos^2((n + 1)\theta)$
6. $\sin((n + 1)\theta) \sin((n - 1)\theta)$

Exercice 5 (★). Mettre les complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z = i$
2. $z = -3$
3. $z = -\sqrt{3} + i$
4. $z = -5e^{\frac{3i\pi}{4}}$
5. $z = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$
6. $z = 1 - e^{\frac{i\pi}{4}}$
7. $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$
8. $z = 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Exercice 6 (★). Pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ suivantes, placer (approximativement) dans le plan complexe les nombres z^n , où $n \in \mathbb{N}$.

1. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z = \frac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$
3. $z = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$

Exercice 7 (★★).

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leq 2$ et $|z_2 - a| \leq 3$, où a est le complexe $-2 + i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leq 5$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leq 2$ et $|z_2 - b| \leq 3$, où $a = -2 + i$ et $b = -2 + 2i$. Montrer que $|z_1 - z_2| \leq 6$. On pourra commencer par faire un dessin de la situation.

Exercice 8 (★★). Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - 1| = |z - i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice 9 (★). Soit $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

Exercice 10 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, calculer $S_1 = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \cos(ka) \right)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \sin(ka) \right)$.

Exercice 11 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En déduire sa limite pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$.

Exercice 13 (★★). z et z' étant deux complexes non nuls et de même module, montrer que $U = \frac{(z + z')^2}{zz'}$ est un nombre réel positif.

Exercice 14 (★★★). Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le complexe $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$ est-il un réel positif?

Exercice 15 (Type DS). On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{\bar{z} + 1}{z - 1} \end{array}$.

1. (a) Déterminer les antécédents de 1 par f .
 (b) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
 (c) La fonction f est-elle injective de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$? Surjective? Bijective?
2. Dans cette question, on note g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 (a) Montrer que $g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, simplifier $g \circ g(x)$.
 (c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et déterminer sa réciproque.