

S6.2 - Interférences et ondes stationnaires

Table des matières

1 Interférences	1
1.1 Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence	1
1.2 Maximum et minimum de l'amplitude du signal somme $s(t)$	2
1.3 Figure d'interférences	3
2 Modèle scalaire de l'onde lumineuse	6
2.1 Indice de réfraction	6
2.2 L'onde lumineuse scalaire	6
2.3 Différence de phase	7
2.4 Surface équiphase	7
2.5 Source secondaire	8
2.6 Intensité lumineuse	9
3 Expérience des trous d'Young	9
3.1 Description du dispositif	9
3.2 Onde en un point de l'écran	10
3.3 Intensité en un point de l'écran	10
3.4 Figure d'interférence	11
4 Expérience des fentes d'Young	12
5 Corde de Melde	13
5.1 Schéma de l'expérience	13
5.2 Vitesse de propagation d'une onde transverse progressive dans la corde	13
6 Vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités	14
6.1 Onde stationnaire	14
6.2 Modes propres de vibration	15
6.3 Superposition de modes propres de vibration	17
6.4 Retour sur la corde de Melde	18

1 Interférences

1.1 Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Soient deux signaux sinusoïdaux de même fréquence f donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$ mais d'amplitudes ($S_1 > 0$ et $S_2 > 0$) et de phases initiales (φ_1 et φ_2) différentes :

$$s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La somme de ces deux signaux ¹ est un signal $s(t)$ de même pulsation ω d'amplitude notée S . Nous avons démontré la propriété ci-dessous en TD en utilisant la notation complexe :

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/somme.php

Propriété : Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Le signal sinusoïdal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, d'amplitudes respectives S_1 et S_2 , et de phases initiales respectives φ_1 et φ_2 , est un signal sinusoïdal de même fréquence et d'amplitude donnée par la **formule des interférences** :

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (1)$$

1.2 Maximum et minimum de l'amplitude du signal somme $s(t)$

◇ Lorsque $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en phase, ce qui revient à $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 [2\pi]$, on constate graphiquement sur l'animation Flash que c'est dans cette situation que l'amplitude S du signal somme $s(t)$ est maximale. On notera S_{max} cette valeur de S correspondant au cas où les deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en phase.

L'expression de $s(t)$ est alors :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + S_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{car } \varphi_1 = \varphi_2 [2\pi]$$

$$\Rightarrow s(t) = \underbrace{(S_1 + S_2)}_{S_{max}} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la formule des interférences :

On note $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. S_1 et S_2 étant fixés, d'après (1) l'amplitude S de $s(t)$ sera **maximale** lorsque

$$\cos(\Delta\varphi) = 1$$

qui correspondent à

$$\Delta\varphi = 0 [2\pi] = 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit, on retrouve par le calcul que l'amplitude S de $s(t)$ est maximale lorsque les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en phase. L'amplitude S vaut alors :

$$S_{max} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2} = \sqrt{(S_1 + S_2)^2} = S_1 + S_2$$

Propriété : Interférences constructives

L'amplitude S du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, d'amplitudes respectives S_1 et S_2 , est maximale lorsque les signaux sont en phase et vaut

$$S_{max} = S_1 + S_2$$

◇ Lorsque $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en opposition de phase, ce qui revient à $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi [2\pi]$, on constate graphiquement sur l'animation Flash que c'est dans cette situation que l'amplitude S du signal somme $s(t)$ est minimale. On notera S_{min} cette valeur de S correspondant au cas

où les deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en opposition de phase.
L'expression de $s(t)$ est alors :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + S_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi) \quad \text{car} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi [2\pi]$$

$$\Rightarrow s(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - S_2 \cos(\omega t + \varphi_1) = (S_1 - S_2) \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\Rightarrow S_{\min} = |S_1 - S_2|$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la formule des interférences :

S_1 et S_2 étant fixés, d'après (1) l'amplitude S de $s(t)$ sera **minimale** lorsque

$$\cos(\Delta\varphi) = -1$$

qui correspondent à

$$\Delta\varphi = \pi + 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit, on retrouve par le calcul que l'amplitude S de $s(t)$ est minimale lorsque les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en opposition de phase. L'amplitude S vaut alors :

$$S_{\min} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2} = \sqrt{(S_1 - S_2)^2} = |S_1 - S_2|$$

Propriété : Interférences destructives

L'amplitude S du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, d'amplitudes respectives S_1 et S_2 , est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase et vaut

$$S_{\min} = |S_1 - S_2|$$

Remarque : Cas usuel où les deux signaux interférant ont la même amplitude

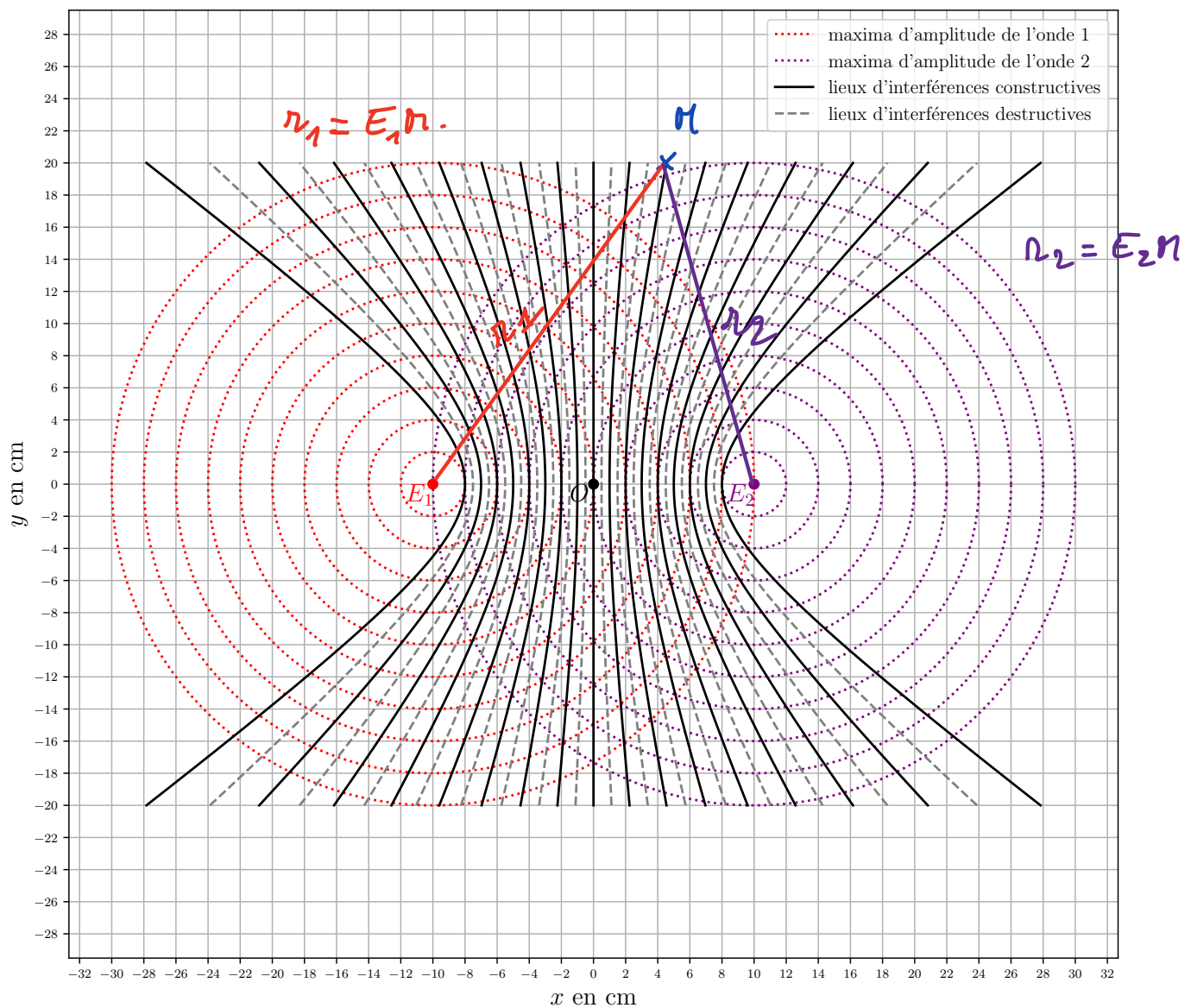
Lorsque les deux signaux ont la même amplitude que l'on note $S_0 = S_1 = S_2$ on obtient :

$$S_{\max} = 2S_0 \quad \text{et} \quad S_{\min} = 0$$

1.3 Figure d'interférences

Les résultats relatifs à la sommation de signaux sinusoïdaux permettent d'interpréter aisément les résultats observés dans les dispositifs expérimentaux comme la cuve à onde ² représentée sur la figure 1.

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php

Figure 1 – Interférences dans une cuve à onde : image de la cuve à un instant t donné

On modélise les émetteurs par des points sources E_1 et E_2 . Le point M où s'effectue l'observation reçoit un signal issu de chaque source, après une propagation à la vitesse c . On désigne par $r_1 = E_1M$ et $r_2 = E_2M$ les distances des sources au point de réception. Les vibrations émises par les points sources ont même pulsation, car elles sont issues d'un générateur unique. Par ailleurs, les temps de propagation entre ce générateur commun et chacune des sources sont identiques, on peut donc considérer les ondes émises en phase au niveau des sources (les vibreurs), on choisit une origine des phases nulle au niveau des vibreurs, on peut donc écrire :

$$s_1(E_1, t) = S_1 \cos(\omega t) \text{ et } s_2(E_2, t) = S_2 \cos(\omega t)$$

Le déphasage des signaux reçus en un point M n'est donc dû qu'à la différence des parcours r_1 et r_2 , on a :

$$s_1(M, t) = s_1\left(E_1, t - \frac{r_1}{c}\right) = S_1 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right)\right) = S_1 \cos\left(\omega t \underbrace{-\frac{\omega}{c}r_1}_{\varphi_1(M)}\right)$$

$$s_2(M, t) = s_2\left(E_2, t - \frac{r_2}{c}\right) = S_2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{r_2}{c}\right)\right) = S_2 \cos\left(\omega t \underbrace{- \frac{\omega}{c} r_2}_{\varphi_2(M)}\right)$$

Le déphasage entre les vibrations en M est donc donné par :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{\omega}{c}(r_1 - r_2)$$

On rappelle que le module du vecteur d'onde s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donc le déphasage au point M s'exprime en fonction de la longueur d'onde et de la différence de distances aux sources $r_1 - r_2 = E_1M - E_2M$ selon :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad (2)$$

Maxima d'amplitude : interférences constructives

Un maximum d'amplitude résultante est observé lorsque les ondes sont en phase, c'est-à-dire lorsque le déphasage est un multiple de 2π , soit

$$\Delta\varphi = 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

car les deux ondes sont alors reçues en phase.

On observe donc un maximum d'amplitude résultante en des points M où la différence des distances aux sources est un multiple de la longueur d'onde car d'après (2) :

$$\Delta\varphi = 2n\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \Rightarrow r_1 - r_2 = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Minima d'amplitude : interférences destructives

Un minimum d'amplitude résultante est observé lorsque les ondes sont en opposition de phase, soit

$$\Delta\varphi = \pi + 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

car les deux ondes sont alors reçues en opposition de phase.

On observe donc un minimum d'amplitude résultante en des points où la différence des distances aux sources est un multiple de la longueur d'onde augmenté d'une demi-longueur d'onde car d'après (2) :

$$\Delta\varphi = \pi + 2n\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} + n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} (\pi + 2n\pi) \nearrow$$

Les lieux à déphasage $\Delta\varphi$ constant correspondent à une différence de marche $r_1 - r_2 = cst$, ce sont des **hyperboles dont les foyers sont** E_1 et E_2 , comme on peut le voir sur l'animation

Flash en cliquant sur le bouton *Franges*.

Propriété : Lieux d'interférences constructives ou destructives

Les lieux d'**interférences constructives** correspondent à la famille d'hyperboles telle que :

$$r_1 - r_2 = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Les lieux d'**interférences destructives** correspondent à la famille d'hyperboles telle que :

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} + n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

2 Modèle scalaire de l'onde lumineuse

2.1 Indice de réfraction

Dans un milieu matériel d'**indice de réfraction** n , la vitesse de propagation de la lumière notée v est donnée par la relation :

$$v = \frac{c}{n}$$

où $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

Exemples : $n_{\text{eau}} = 1,33$; $n_{\text{verre}} \approx 1,5$; $n_{\text{diamant}} = 2,42$; $n_{\text{air}} = 1,00027$.

2.2 L'onde lumineuse scalaire

Soit $(Oxyz)$ un repère orthonormé direct. Dans le cas très fréquent d'ondes électromagnétiques non polarisées³ dont les directions de propagation sont voisines, le modèle scalaire de l'onde lumineuse convient. A une onde lumineuse plane progressive monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = n \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}$, où n est l'indice de réfraction du milieu et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction de propagation, on associe alors une **onde scalaire ou signal lumineux** en M à l'instant t qui s'écrit :

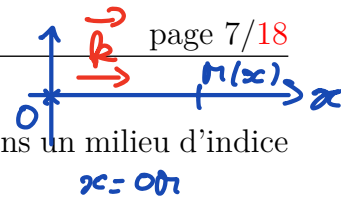
$$s(M,t) = s_0 \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0 \right)$$

où s_0 est l'amplitude de l'onde et $\varphi(M,t) = \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_0$ est sa phase, φ_0 est la phase initiale en O . On utilise aussi la notation complexe :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

Où $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi_0}$ est l'amplitude complexe de l'onde et $s(M,t) = \text{Re}(\underline{s}(M,t))$.

3. Cela signifie que la direction de polarisation des ondes varie aléatoirement dans le temps



Exemple : Soit une onde de vecteur d'onde $\vec{k} = n \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x$ avec $\varphi_0 = 0$, dans un milieu d'indice n , l'onde scalaire en $M(x, y, z)$ s'écrit :

$$s(M, t) = s_0 \cos \left(\omega t - n \frac{2\pi}{\lambda} x \right) = s_0 \cos \left(\omega t - n \frac{\omega}{c} x \right) = s_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{n}{c} x \right) \right) = s \left(O, t - \frac{OM}{v} \right)$$

On voit que la période spatiale de cette onde, encore appelée longueur d'onde dans le milieu, est $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ et que sa vitesse de propagation est $v = \frac{c}{n}$.

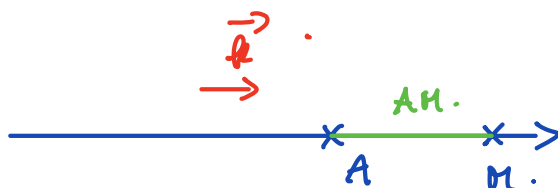
Quand on parle de longueur d'onde, il s'agit toujours par défaut de la longueur d'onde dans le vide, c'est-à-dire $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

On remarque également que $\tau = \frac{n}{c} x = \frac{OM}{v}$ est le retard dû à la propagation de la lumière de O à M .

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = \begin{pmatrix} n \frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \frac{2\pi}{\lambda} x$$

2.3 Différence de phase

Schéma :



L'onde lumineuse plane progressive monochromatique en A s'écrit :

$$s(A, t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OA})}$$

L'onde lumineuse en M peut se mettre sous la forme :

$$s(M, t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot (\vec{OA} + \vec{AM}))} = s(A, t) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{AM}}$$

A tout instant, la **différence de phase** de l'onde entre les points A et M , notée $\varphi_{A \rightarrow M}$ vaut :

$$\varphi_{A \rightarrow M} = -\vec{k} \cdot \vec{AM} = -n \frac{2\pi}{\lambda} AM$$

On appelle nAM le **chemin optique** entre les points A et M .

2.4 Surface équiphasé

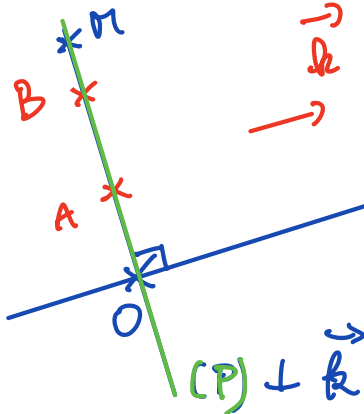
Définition

Une **surface équiphasé** est une surface, telle que la phase de l'onde est la même en tous les points de cette surface à un instant t donné.

Propriété

Pour une **onde scalaire plane progressive monochromatique**, les surfaces équiphasés sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation.

Démonstration :



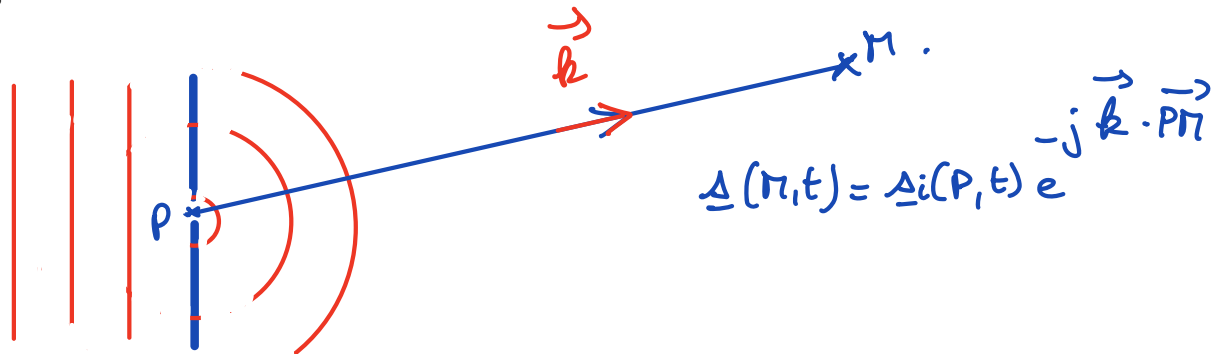
$$\begin{aligned}\underline{s}(M,t) &= \underline{s}(A,t) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{AM}} \\ \underline{s}(B,t) &= \underline{s}(A,t) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{AB}}\end{aligned}$$

Si $(P) \perp \vec{k}$ avec A et $B \in (P)$
alors $\vec{k} \cdot \vec{AB} = 0$
 $\Rightarrow \underline{s}(A,t) = \underline{s}(B,t)$

2.5 Source secondaire

Expérience de cours : Diffraction des ondes à la surface de l'eau, analogie avec les ondes électromagnétiques ⁴

Schéma :



Un trou P sur lequel arrive une onde $\underline{s}_i(P,t)$, va se comporter comme une source dite secondaire, qui va émettre une onde sphérique qui pourra être considérée comme plane à une grande distance du trou. Pour s'en convaincre, on peut se référer à la figure 2.

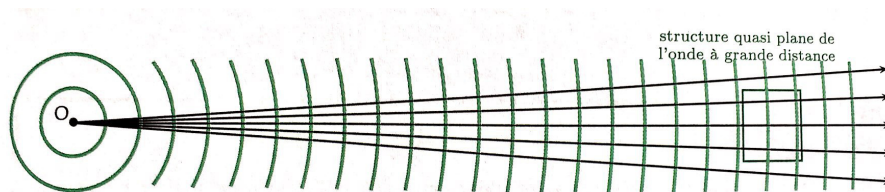


Figure 2 – Onde sphérique assimilable à une onde plane loin de la source

L'amplitude complexe de l'onde en M s'écrit alors :

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s}_i(P,t) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{PM}}$$

4. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/cuve_ondes/diffraction.php

2.6 Intensité lumineuse

Définition

L'**intensité lumineuse** en M , notée $I(M)$, est proportionnelle à l'amplitude de l'onde lumineuse élevée au carré. C'est à cette grandeur que sont sensibles les capteurs optiques ou l'œil. On note K la constante de proportionnalité.

On peut alors aussi écrire :

$$I(M) = K s_0^2 = 2K \langle s(M,t)^2 \rangle = K \underline{s}(M,t) \times \underline{s}^*(M,t) = K |\underline{s}(M,t)|^2$$

$$\begin{aligned} \underline{s}(M,t) &= \underline{s}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)} \\ \underline{s}^*(M,t) &= \underline{s}_0^* e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0)} \end{aligned}$$

avec $\underline{s}_0 = s_0 e^{-j\varphi_0}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} 2K \langle s(M,t)^2 \rangle &= 2K \langle s_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_0) \rangle = 2K \\ &= 2K s_0^2 \times \frac{1}{2} = K s_0^2. \\ \text{et } K \underline{s}(M,t) \times \underline{s}^*(M,t) &= K |\underline{s}(M,t)|^2 = K |\underline{s}_0|^2 = K s_0^2. \end{aligned}$$

Deux ondes qui arrivent en M s'additionnent mais l'intensité lumineuse qui en résulte n'est alors pas forcément la somme des intensités de chaque onde prise séparément, cela donne lieu à un phénomène d'interférences comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

3 Expérience des trous d'Young

3.1 Description du dispositif

On réalise, dans l'air, l'expérience des trous d'Young à l'aide du dispositif décrit et schématisé figure 3. Un laser, de longueur d'onde λ , émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe (Oz) . On suppose que l'OPPM émise par le laser éclaire entièrement et de manière uniforme les différentes ouvertures qui sont placées sur son passage.

Une plaque opaque (P), percée de deux trous circulaires S_1 et S_2 de même taille et de faibles dimensions, est placée perpendiculairement à l'axe (Oz) . On note O' le milieu du segment $[S_1 S_2]$. Le point O' appartient à l'axe (Oz) . La distance entre les centres des deux trous S_1 et S_2 est notée a .

Le phénomène d'interférences est observé sur un écran (E) placé perpendiculairement à l'axe (Oz) . L'origine O de l'axe (Oz) est pris sur l'écran (E). La distance entre la plaque (P) et l'écran (E) est égale à D . On a ainsi $D = O'O$.

L'indice de réfraction de l'air sera pris égal à 1.

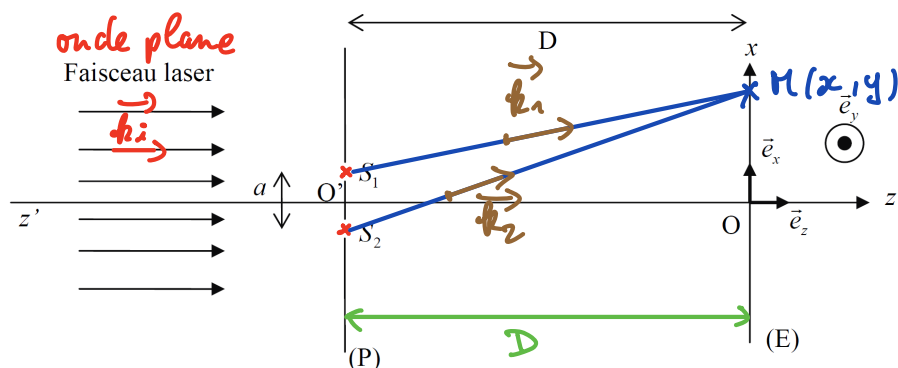


Figure 3 – Schéma de l'expérience des trous d'Young

$$\begin{aligned} -\vec{k}_1 \cdot \vec{OS}_1 &= -\vec{k}_1 \cdot (\vec{OO'} + \vec{O'S}_1) = -\vec{k}_1 \cdot \vec{OO'} \text{ de même } -\vec{k}_2 \cdot \vec{OS}_2 \\ &\quad \text{car } \vec{k}_2 \cdot \vec{O'S}_2 = 0 = -\vec{k}_1 \cdot \vec{OO'} \end{aligned}$$

3.2 Onde en un point de l'écran

L'onde plane émise par le laser a pour expression en S_1 : $\underline{s}(S_1, t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OS}_1)}$

L'onde plane émise par le laser a pour expression en S_2 : $\underline{s}(S_2, t) = s_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OS}_2)}$ On peut remarquer que : $-\vec{k}_i \cdot \vec{OS}_1 = -\vec{k}_i \cdot \vec{OS}_2 = -\vec{k}_i \cdot \vec{OO'} = \frac{2\pi}{\lambda} D$ on notera φ_i cette valeur.

L'onde incidente s'écrit donc en S_1 et S_2 :

$$\underline{s}(S_2, t) = \underline{s}(S_1, t) = s_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{s}_i(t)$$

En M l'onde plane issue de S_1 s'écrit :

$$\underline{s}_1(M, t) = \underline{s}(S_1, t) e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{S_1M}} = \underline{s}_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} S_1 M}$$

En M l'onde plane issue de S_2 s'écrit :

$$\underline{s}_2(M, t) = \underline{s}(S_2, t) e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{S_2M}} = \underline{s}_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} S_2 M}$$

En M l'onde totale s'écrit donc :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = \underline{s}_i(t) \left(\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} S_1 M}}_{\underline{z}_1} + \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} S_2 M}}_{\underline{z}_2} \right)$$

3.3 Intensité en un point de l'écran

En reprenant l'expression précédente de l'onde totale en M et en appliquant la définition de l'intensité lumineuse en M , on en déduit :

$$I(M) = K |\underline{s}(M, t)|^2 = K s_0^2 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M - S_1 M) \right) \right)$$

Démonstration : $K |\underline{s}(M, t)|^2 = K \underline{s}(M, t) \times \underline{s}^*(M, t)$

$$\begin{aligned} &= K \underline{s}_i(t) (\underline{z}_1 + \underline{z}_2) \times \underline{s}_i^*(t) (\underline{z}_1^* + \underline{z}_2^*) \\ &= K s_0^2 \left(\underbrace{\underline{z}_1 \underline{z}_1^*}_1 + \underbrace{\underline{z}_2 \underline{z}_2^*}_1 + \underbrace{\underline{z}_1 \underline{z}_2^* + \underline{z}_1^* \underline{z}_2}_{2 \operatorname{Re}(\underline{z}_1 \underline{z}_2^*)} \right) \end{aligned}$$

$$= K s_0^2 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M - S_1 M) \right) \right)$$

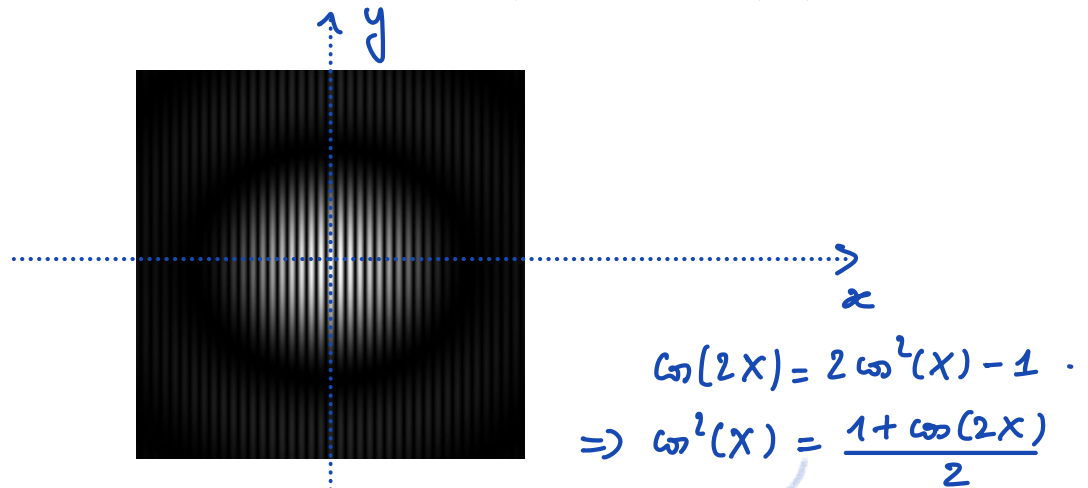
en effet $\underline{z}_1 \underline{z}_2^* = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \cdot S_1 M} \times e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \cdot S_2 M} = \exp \left(j \times \frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M - S_1 M) \right)$

$\Rightarrow 2 \operatorname{Re}(\underline{z}_1 \underline{z}_2^*) = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M - S_1 M) \right)$

·
·
·
·
·

3.4 Figure d'interférence

Voici la figure d'interférence que l'on obtient sur l'écran (attention : l'axe (Ox) est horizontal) :



Si on note $I_0 = Ks_0^2$, qui serait l'intensité en M dans le cas de la présence d'un seul des deux trous S_1 ou S_2 , l'intensité en M peut s'écrire :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \right) \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \delta(M) \right)$$

où $\delta(M) = S_2M - S_1M$ est appelée **différence de marche** en M entre l'onde issue de S_2 et celle issue de S_1 .

Pour un point $M(x, y, 0)$, en effectuant un développement limité au premier ordre sachant que $\frac{a}{D} \ll 1$, $\frac{x}{D} \ll 1$ et $\frac{y}{D} \ll 1$, on obtient :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

$$S_1 \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} \quad S_2 \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration :

On a $S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}}$

De même $S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}}$

On en déduit :

$$\delta(M) = S_2M - S_1M = D \left(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}}_{\ll 1} \right)^{1/2} - D \left(1 + \underbrace{\left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}}_{\ll 1} \right)^{1/2}$$

Sachant que $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$ quand $\epsilon \ll 1$:

ici $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\delta(M) &\approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{y^2}{2D^2} \right) - D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{y^2}{2D^2} \right) \\ &= D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right) \right) - D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} \right) \right) \\ &= \frac{ax}{2D} + \frac{ax}{2D} = \frac{ax}{D}\end{aligned}$$

L'intensité peut alors s'écrire :

$1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right) \Rightarrow 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{i} \right)$$

où $i = \frac{\lambda D}{a}$ est la période spatiale de l'intensité lumineuse, encore appelée **interfrange**.

Les maxima d'intensité, correspondant à des franges brillantes, sont obtenus pour $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$, p est appelé l'**ordre d'interférence** (figure 4).

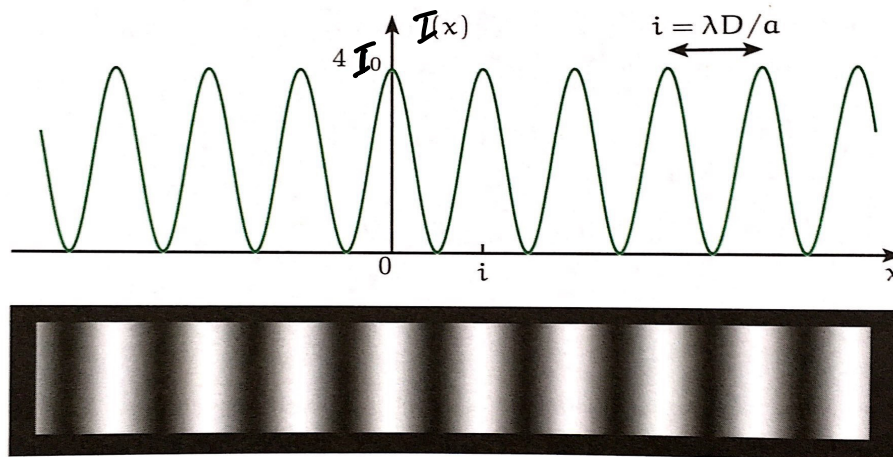


Figure 4 – Intensité lumineuse

4 Expérience des fentes d'Young

On peut remplacer deux trous par deux fentes parallèles à (Oy) , cela permet d'obtenir une figure d'interférence ⁵ plus lumineuse, tout en conservant les résultats précédents (figure 5).

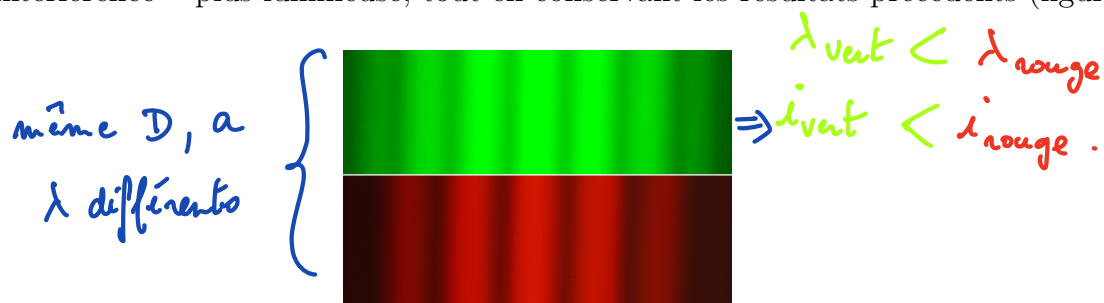


Figure 5 – Figure d'interférence pour l'expérience des fentes d'Young pour deux longueurs d'onde différentes.

5. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/lumiere/interference_lumiere.php

5 Corde de Melde

5.1 Schéma de l'expérience

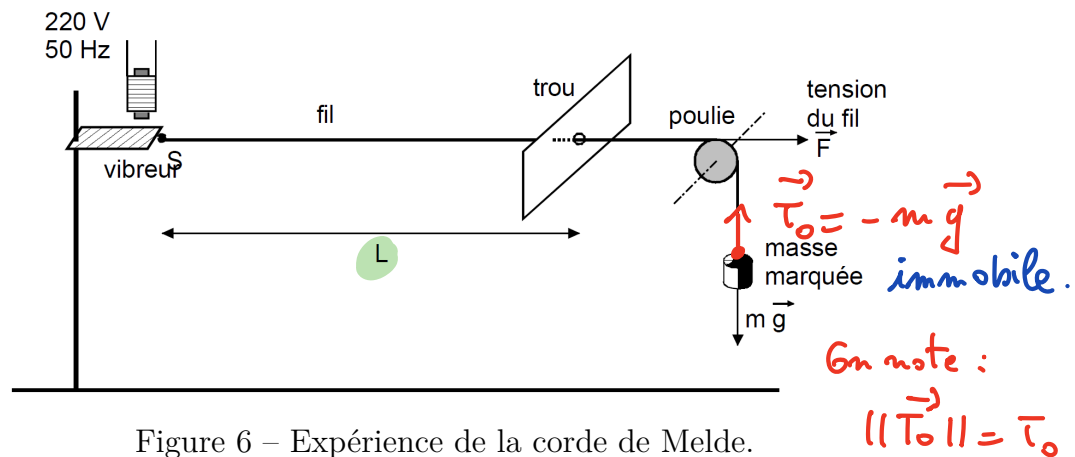


Figure 6 – Expérience de la corde de Melde.

On considère une corde tendue grâce à une masse marquée de masse m fixée à une de ses extrémités. Cette corde est attachée à un vibreur au niveau de son autre extrémité (figure 6). La corde est peu extensible, sa masse linéique est notée μ et le module de sa tension lorsque la corde est immobile vaut $T_0 = mg$.

La partie mobile de la corde, située entre le vibreur et le trou, a une longueur notée L . Au repos, cette corde est confondue avec l'axe (Ox) .

On note $\psi(x,t)$ l'onde transverse se propageant le long de la corde.

5.2 Vitesse de propagation d'une onde transverse progressive dans la corde

Célérité des ondes transverses progressives dans la corde

La célérité c des ondes transverses progressives se propageant le long de la corde est telle que :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Annotations manuscrites : T_0 est en N, μ est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

Analyse dimensionnelle :

$$[c] = \left(\frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L}^{-1}} \right)^{1/2} = \left(\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2} \right)^{1/2}$$

$$= \text{L} \cdot \text{T}^{-1} \quad \text{s'exprime en } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

6 Vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités

Lorsque le vibreur est immobile, cela revient à avoir une corde fixe à ses deux extrémités. Cela correspond aussi au cas des instruments à cordes.

6.1 Onde stationnaire

Définition d'une onde stationnaire

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances vis-à-vis des variables d'espace et de temps sont découplées, elle est représentée par une fonction de la forme :

$$\psi(x,t) = F(x)G(t)$$

Propriété : Ondes stationnaires sinusoïdales (ou harmoniques) dans la corde

On admet que les solutions physiquement acceptables pour l'onde dans la corde fixée à ses deux extrémités sont de la forme :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

C'est une onde stationnaire qui oscille sinusoïdalement sur place. On peut aussi employer le terme harmonique à la place de sinusoïdal.

Montrons que cette onde est la superposition de deux ondes progressives harmoniques OPH⁶ de même amplitude mais se propageant dans des directions opposées :
Pour cela on rappelle d'abord une formule de trigonométrie :

$$\cos \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \frac{\psi_0}{2} \left[\cos(kx + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2) + \cos(kx + \varphi_1 - \omega t - \varphi_2) \right] \\ &= \frac{\psi_0}{2} \cos(kx + \omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\psi_0}{2} \cos(\omega t - kx + \varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

OPH se propageant dans le sens de $-\vec{u}_x$

OPH se propageant dans le sens de $+\vec{u}_x$

6. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php

6.2 Modes propres de vibration

Considérons l'onde stationnaire harmonique vue au paragraphe précédent et appliquons lui les conditions aux limites spatiales imposées par le dispositif, à savoir :

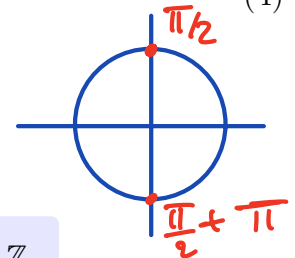
$$\psi(0,t) = 0 \quad \forall t \quad (3)$$

$$\psi(L,t) = 0 \quad \forall t \quad (4)$$

◇ La première condition (3) nous donne :

$$\psi(0,t) \stackrel{x=0}{=} \psi_0 \cos(\varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + q\pi = \frac{\pi}{2}(2q+1) \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z}$$



◇ La deuxième condition (4) nous donne :

$$\psi(L,t) \stackrel{x=L}{=} \psi_0 \cos(kL + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \cos(kL + \varphi_1) = 0 \Rightarrow kL + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + p\pi = \frac{\pi}{2}(2p+1) \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

Finalement on obtient :

$$kL = \frac{\pi}{2}(2p+1) - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}(2p+1) - \frac{\pi}{2}(2q+1) = \frac{\pi}{2} \underbrace{2(p-q)}_n = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ car } kL > 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

Propriétés de l'onde stationnaire dans une corde fixée à ses deux extrémités

On peut alors noter k_n les différentes valeurs possibles du module du vecteur d'onde :

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad (5)$$

On voit que les valeurs possibles de k (notées k_n), imposées par les conditions aux limites spatiales, sont discrètes.

A chaque valeur de n correspond ce que l'on appelle un mode propre d'oscillation de la corde pour lequel :

$$\lambda_n = 2\pi \times \frac{L}{n\pi} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \quad \text{avec } \lambda_1 = 2L \quad (6)$$

$$f_n = c \times \frac{n}{2L} \Rightarrow f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L} = nf_1 \quad \text{avec } f_1 = \frac{c}{2L} \quad (7)$$

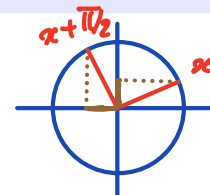
où λ_1 et f_1 sont respectivement la longueur d'onde et la fréquence du mode fondamental ($n = 1$) de la corde.

Au final le mode n peut donc s'écrire :

$$\psi_n(x,t) = \psi_{0n} \cos(k_n x + \varphi_{1n}) \cos(2\pi f_n t + \varphi_{2n}) = \psi_{0n} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x + \frac{\pi}{2} + q\pi\right) \cos(2\pi f_n t + \varphi_{2n})$$

$$\Rightarrow \psi_n(x,t) = \psi_{0n} (-1)^{q+1} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(2\pi f_n t + \varphi_{2n})$$

$$\Rightarrow \psi_n(x,t) = \psi_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(2\pi f_n t + \underbrace{\varphi_{2n} + (q+1)\pi}_{\Phi_n})$$



Où Φ_n est une phase quelconque, on pourra choisir $\Phi_n = 0$ pour représenter les différents modes.

Amplitude de l'onde stationnaire

L'amplitude $A_n(x)$ de $\psi_n(x,t)$ qui est par définition la valeur maximale que peut prendre l'onde en un point donné au cours du temps, dépend donc de x :

$$A_n(x) = \psi_{0n} \left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \right|$$

Définitions des nœuds et des ventres de vibration

On remarque que :

- $A_n(x)$ est nulle ($\psi_n(x,t) = 0$ à tout instant) quand x est un multiple de $\frac{\lambda_n}{2}$, ces points particuliers s'appellent des nœuds de vibration de la corde :

$$x_{\text{nœuds}} = p \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } p \text{ entier tel que } 0 \leq p \leq n. \quad \text{il y a } n+1 \text{ nœuds.}$$

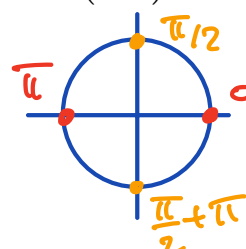
- $A_n(x) = \psi_{0n}$ est maximale quand x est égal à $\frac{\lambda_n}{4}$ plus un multiple de $\frac{\lambda_n}{2}$, ces points particuliers s'appellent des ventres de vibration de la corde :

$$x_{\text{ventre}} = \frac{\lambda_n}{4} + p \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } p \text{ entier tel que } 0 \leq p < n. \quad \text{il y a } n \text{ ventre.}$$

On a représenté le mode $n = 2$ sur la figure 7 : $\psi_2(x,t) = \psi_{02} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} x\right) \cos(2\pi f_2 t)$

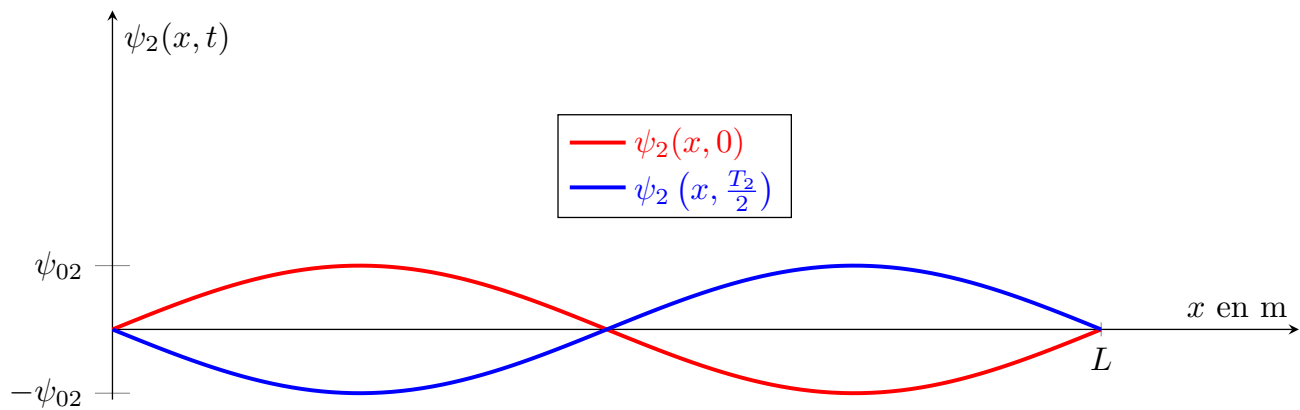
nœuds si $\left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \right| = 0$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} x = n\pi \Rightarrow x = n \frac{\lambda_n}{2}$$



ventre si $\left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \right| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} x = \frac{\pi}{2} + p\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \times \frac{\lambda_n}{2\pi} + p \frac{\lambda_n}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda_n}{4} + p \frac{\lambda_n}{2}$$

Figure 7 – Mode $n = 2$: $\psi_2(x, t)$ en fonction de x à différents instants

Astuce : Représentation des modes propres

Pour représenter les modes de vibration de la corde, on pourra retenir que la distance $\frac{\lambda_n}{2}$ qui sépare deux nœuds de vibration vérifie d'après (6) :

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n}$$

combiné au fait que les deux extrémités de la corde (en $x = 0$ et $x = L$) sont également des nœuds de vibration (figure 8).

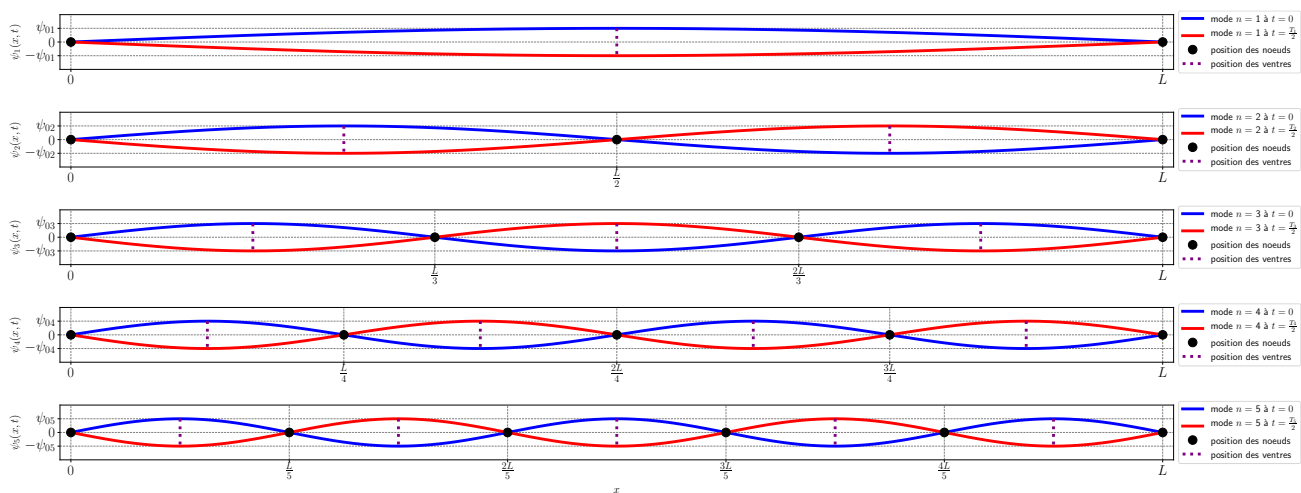


Figure 8 – Les 5 premiers modes propres de la corde fixée à ses deux extrémités.

6.3 Superposition de modes propres de vibration

Lorsqu'une corde d'un instrument de musique vibre suite à l'action du musicien, l'onde est une superposition des modes propres étudiés dans le paragraphe précédent. Ces vibrations sont transmises dans l'air et perçues par notre oreille.

Le mode fondamental correspond à la fréquence de la note jouée et un mode numéro $n \geq 2$ correspond à l'harmonique n de cette note.

Le timbre d'un instrument dépend du poids relatif des différents harmoniques, voici par exemple le spectre du La 110 Hz d'une guitare obtenu en séance de TP à l'aide d'un microphone et de

l'oscilloscope Tektronix TDS 2002C (figure 9).

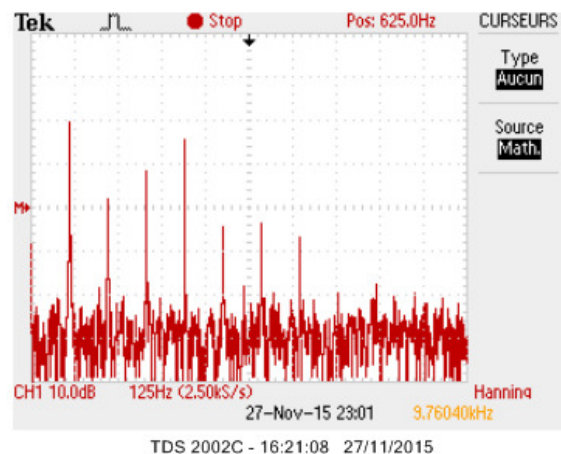


Figure 9 – Spectre expérimental du La 110 Hz d'une guitare.

6.4 Retour sur la corde de Melde

Le rôle du vibreur est en fait d'exciter à tour de rôles les différents modes propres ⁷ de la corde en faisant varier la fréquence d'excitation.

Lorsque la corde entre en résonance, on peut considérer que l'amplitude de vibration de vibreur est très faible devant l'amplitude d'un ventre de vibration, ainsi le vibreur est assimilable à un nœud et les modes propres ont la même allure que pour une corde fixée à ses deux extrémités.

7. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/melde.php