

Réduction des matrices Chapitre 4

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 4-1 HP Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ définie par $f(P) = (x-1)P' + P$. On pose $R(x) = (x-1)^2$. Calculons $f(R)$.
 $f(R) = (x-1)(2(x-1)) + (x-1)^2 = 3(x-1)^2 = 3R$ donc 3 est une valeur propre de f et R (étant non nul) est son vecteur propre associé.

Exercice 2. exo 4-2 Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que X est un vecteur propre de A et déterminons sa valeur propre associée.

$$\text{On calcule } AX, \text{ on trouve : } AX = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X.$$

X étant non nul, on en déduit que 3 est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre de A .

Exercice 3. exos 4-3 et 4-5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A .

$$\text{Par calcul direct on a : } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Puis $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$ Ainsi $P(A) = 0$ et P est bien un polynôme annulateur de A .

Déterminons les valeurs propres de la matrice A .

A étant triangulaire supérieure, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale.

D'où $sp(A) = \{1, 2\}$

NB : On n'utilise pas le lien entre polynôme annulateur et spectre de A car A est triangulaire.

Exercice 4. exos 4-4 et 4-5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A .

$$\text{Par calcul direct on a : } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ Puis } P(A) = A^2 + 2A - 3I_3 = O_3 \text{ Ainsi } P(A) = 0 \text{ et } P \text{ est bien un}$$

polynôme annulateur de A .

De $A^2 + 2A - 3I_3 = O_3$ on en tire que :

$$A(A + 2I_3) = 3I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}A(A + 2I_3) = I_3.$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$.

Déterminons les valeurs propres de la matrice A .

On a $P(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

On sait que les valeurs propres possibles de la matrice A se trouvent parmi les racines de P .

On a $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, non inversible car $L_1 = -L_3$.

Donc 1 est bien valeur propre de A .

$$\text{On a } A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ non inversible car } C_1 = -2C_2 + C_3.$$

Donc -3 est bien valeur propre de A .

D'où $sp(A) = \{-3; 1\}$.

Exercice 5. exo 4-6

Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On cherche par réduction de Gauss, les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I$ non inversible.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - (5-\lambda)L_1, L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or cette dernière matrice est non inversible ssi $6 - \lambda = 0$ ou $-8 + 6\lambda - \lambda^2 = 0$.

$\lambda = 6$ ou $-8 + 6\lambda - \lambda^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$.

Donc les valeurs propres de A sont : 2, 4, 6.

$Sp(A) = \{2, 4, 6\}$.

Exercice 6. exo 4-7

Reprenons la matrice A de l'exo précédent puis déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 4.

Déterminons une base et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 4, $E_4(A)$.

On cherche un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que : $(A - 4I_3)X = 0$.

On résout alors le système suivant en repartant de la dernière réduction de Gauss :

$$\begin{pmatrix} x - y - z = 0 \\ 2y = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = z, y = 0, \text{ donc}$$

$$X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc trouvé un vecteur non nul X tel que $(A - 4I_3)X = 0$ et $E_4(A) = \text{vect} \left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, avec (u_1) unique et non nul donc c'est une base de $E_4(A)$ qui est donc de dimension 1.

NB : Déterminons une base et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 6, $E_6(A)$.

On cherche un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que : $(A - 6I_3)X = 0$.

On résout alors le système suivant en repartant de la dernière réduction de Gauss :

$$\begin{pmatrix} x - y - 3z = 0 \\ 4z = 0 \\ -8z = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 0, x = y, \text{ donc}$$

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc trouvé un vecteur non nul X tel que $(A - 6I_3)X = 0$ et $E_6(A) = \text{vect} \left(u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, avec (u_2) unique et non nul donc c'est une base de $E_6(A)$ qui est donc de dimension 1.

Déterminons le sous-espace propre de A associé à 2 : $E_2(A)$.

On cherche $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, tel que $(A - 2I)X = 0$.

$$\text{Soit } X \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

D'où :

$$E_2(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Avec $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur unique et non nul donc base de $E_2(A)$.

La concaténation des bases des sous-espaces propres (u_1, u_2, u_3) forme une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc A est diagonalisable.

Exercice 7. exo 4-8 D'après EML

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est diagonalisable car A est symétrique. On peut remarquer que A n'est pas inversible car $C_1 = C_3$. Par conséquent 0 est une valeur propre de A .
2. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puis on voit que : $A^3 = 2A$.
3. On déduit de la question 2 que le polynôme $P(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ est un polynôme annulateur de A . Donc d'après le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme.
D'où : $Sp(A) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

On va chercher directement les sous-espaces propres associés.

- $E_{-\sqrt{2}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), (A + \sqrt{2}I_3)X = O_3\}$.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(A), X \neq 0 \Leftrightarrow (A + \sqrt{2}I_3)X = O_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow x = z, y = -\sqrt{2}x \Leftrightarrow$

$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

D'où $E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (car unique vecteur non nul) et génératrice de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ donc c'en est une base.

Et par conséquent : $-\sqrt{2} \in Sp(A)$.

- $E_{\sqrt{2}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), (A - \sqrt{2}I_3)X = O_3\}$.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A), X \neq 0 \Leftrightarrow (A - \sqrt{2}I_3)X = O_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow x = z, y = \sqrt{2}x \Leftrightarrow$

$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

D'où $E_{\sqrt{2}}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (car unique vecteur non nul) et génératrice de $E_{\sqrt{2}}(A)$ donc c'en est une base.

Et par conséquent : $\sqrt{2} \in Sp(A)$.

Enfin • $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = O_3\}$.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A), X \neq 0 \Leftrightarrow AX = O_3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -z, y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0.$

D'où $E_0(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (car unique vecteur non nul) et génératrice de $E_0(A)$ donc c'en est une base.

Et par conséquent : $0 \in Sp(A)$. (mais on le savait déjà avec la remarque de la question 1)

Finalement le spectre de A est : $Sp(A) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

La concaténation des bases des sous-espaces propres de A forme une famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. A est diagonalisable (chose que l'on savait déjà) et donc il existe P inversible formée (en colonnes) des coordonnées des vecteurs propres,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et D diagonale $D = \text{diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, telles que : $A = PDP^{-1}$.

Exercice 8. exo 4-9

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $A - \lambda I_2$ non inversible

$$\Leftrightarrow \det((A - \lambda I_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 3$$

$$\text{D'où } sp(A) = \{-2, 3\}$$

On a A une matrice carrée d'ordre 2 et A possède deux valeurs propres distinctes. On sait que la dimension de chacun des sous-espaces propres associés à -2 et 3 est supérieure à 1 et ne peut dépasser 2 donc chacun de ces sous-espaces est de dimension 1. Ainsi la concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2, c'en est donc une base.

Donc A est diagonalisable.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $B - \lambda I_2$ non inversible

$$\Leftrightarrow \det((B - \lambda I_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \text{ qui n'a pas de solution}$$

$$\text{D'où } sp(B) = \emptyset.$$

Donc B n'est pas diagonalisable.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $C - \lambda I_2$ non inversible

$$\Leftrightarrow \det((C - \lambda I_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

$$\text{D'où } sp(C) = \{3\}$$

On pourrait rechercher $E_3(C)$ le sous-espace propre associé à 3 et montrer qu'il est de dimension 1 mais on va plutôt faire un raisonnement par l'absurde.

Cette méthode sera à faire à chaque fois qu'il y aura une seule valeur propre dans le spectre de la matrice.

Si C était diagonalisable, alors il existerait P inversible et D diagonale avec $D = \text{diag}(3, 3) = 3I_2$ telles que : $C = PDP^{-1}$.

Or, $C = PDP^{-1} = P3I_2P^{-1} = 3I_2$ ce qui est absurde !

Donc C n'est pas diagonalisable.

Exercice 9. exo 4-10 Puissance de matrice

Méthode 1 en diagonalisant T :

• : Recherche du spectre de T .

T étant triangulaire supérieure, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale.

D'où $Sp(T) = \{1, 2\}$.

• Recherche des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de T .

Cas $\lambda = 1$: $E_1(T) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), (T - I_3)X = O_3\}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \in E_1(T), X \neq 0 \Leftrightarrow (T - I_3)X = O_3 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

D'où $E_1(T) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre (car deux vecteurs non colinéaires) et génératrice de $E_1(T)$ donc c'en est une base.

Cas $\lambda = 2$: $E_2(T) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), (T - 2I_3)X = O_3\}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \in E_2(T), X \neq 0 \Leftrightarrow (T - 2I_3)X = O_3 \Leftrightarrow -x + 2z = 0, -y + z = 0 \Leftrightarrow x = 2z, y = z \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \text{ avec } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

D'où $E_2(T) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (car unique vecteur non nul) et génératrice de $E_2(T)$ donc c'en est une base.

• Formule de changement de base pour T et expression de T^n .

La concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de trois vecteurs. Or $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, d'où $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, T est diagonalisable et il existe donc P inversible formée (en colonnes) des coordonnées des vecteurs propres, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et D diagonale $D = \text{diag}(1, 1, 2)$, telles que : $T = PDP^{-1}$.

On montre ensuite par récurrence que pour tout entier naturel n , $T^n = PD^nP^{-1}$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

Au rang 0 : on a d'une part $T^0 = I$ et d'autre part $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Donc c'est bien vraie au rang 0.

Soit N un entier naturel. Supposons $T^n = PD^nP^{-1}$ vraie.

Hérédité : Alors on a $T^{n+1} = T^n \times T = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Donc c'est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

Il ne reste plus qu'à calculer l'inverse de P par réduite de Gauss, on trouve aisément que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalement : pour tout entier naturel } n, T^n = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 + 2^{n+1} \\ 0 & 1 & -1 + 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 en utilisant le polynôme annulateur.

On a $T^2 - 3T + 2I = O_3$ donc $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de T .

Ce polynôme a pour racines 1 et 2.

Le spectre de T est inclus dans cet ensemble, dans cet exercice il est égal à cet ensemble car T étant triangulaire, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale.

$Sp(T) = \{1, 2\}$.

De plus, on peut remarquer que $T^2 - 3T = -2I$ d'où : $T(-1/2T + 3/2I) = I$ et donc que T est inversible d'inverse $T^{-1} = -1/2T + 3/2I$.

Pour calculer T^n , on va montrer par récurrence pour tout entier naturel n , qu'ils existent deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $T^n = a_n T + b_n I$.

Initialisation : on a $T^0 = I$ et avec $a_0 = 0, b_0 = 1$ on a bien $T^0 = a_0 T + b_0 I$.

Hérédité : soit n un entier naturel fixé et supposons qu'ils existent deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $T^n = a_n T + b_n I$.

Alors $T^{n+1} = T.T^n = a_n T^2 + b_n T = a_n(3T - 2I) + b_n T$ car $T^2 = 3T - 2I$.

D'où $T^{n+1} = (3a_n + b_n)T - 2a_n I$.

Avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel n , qu'ils existent deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$T^n = a_n T + b_n I$, telles que $a_0 = 0, b_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.

On en déduit alors que : $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

L'équation caractéristique est $x^2 - 3x + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x, y$ réels tels que : $a_n = x + y2^n$.

Or avec $a_0 = 0$ et $a_1 = b_0 = 1$, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N} a_n = -1 + 2^n$.

Puis $b_n = -2a_{n-1} = 2 - 2^n$.

Par conséquent :

$$T^n = (-1 + 2^n)T + (2 - 2^n)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 + 2^{n+1} \\ 0 & 1 & -1 + 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien le même résultat que par diagonalisation.

Exercice 10. exo 4-10 ECRICOME 2003

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des puissances de A

1. Recherche des valeurs propres de A :

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ soit non inversible par réduite de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + (\lambda-3)L_1]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & -2+3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice triangulaire supérieure.

Elle est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $-2+3\lambda-\lambda^2 = 0$ ou $2-\lambda = 0$.

C'est à dire pour $\lambda = 1$, ou $\lambda = 2$.

Par conséquent, les valeurs propres de A (donc de f) sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

$$Sp(A) = \{1, 2\}.$$

2. Comme 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible.

3. Recherche des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

$E_2(A)$: on cherche $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$ tel que $(A - 2I)X = 0$.

Si $\lambda_1 = 2$, la dernière matrice obtenue par réduite de Gauss donne le système suivant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases} \iff X = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est

$$E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ où le vecteur } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ étant unique et non nul en est une base.}$$

$E_1(A)$: on cherche $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$ tel que $(A - I)X = 0$.

Si $\lambda_1 = 1$, la dernière matrice obtenue par réduite de Gauss donne le système suivant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est

$$E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ où le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ étant unique et non nul en est une base.}$$

4. La concaténation des bases des sous-espaces propres donne une famille $\mathcal{F}$ libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 : $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ donc cette famille n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc A n'est pas diagonalisable.

5. Le vecteur $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ convient. Car le vecteur colonne associé à u_1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ce vecteur est la base de

$E_1(A)$, il vérifie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$. il n'y en a pas d'autres qui conviennent.

6. De même le vecteur $\vec{u}_2 = (2, 1, 0)$ est le seul qui convient. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne associé et c'est la base

de $E_2(A)$, il vérifie $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$.

7. Soient x, y, z trois réels. Montrons que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

Si $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = 0$ alors $(x+2y+z, x+y+z, z) = (0, 0, 0)$ donc $z = 0$ et $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ donc $x = y = 0$ d'où finalement $y = x = z = 0$.

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est donc libre. Comme elle est de cardinal 3 et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3,

$\mathcal{C}$ est donc une base de E .

8. La matrice de passage P de la la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ est celle qui contient les coordonnées (en colonne) dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{C}$.

Comme $\mathcal{B}$ est la base canonique, les coordonnées des vecteurs sont leurs composantes.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

La matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est l'inverse de P que l'on trouve par réduite de Gauss :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \rightarrow L_1 - L_2 & \iff \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ & \iff \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ & \iff \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

9. Pour calculer $f(\vec{u}_3)$, comme on dispose de la matrice de f dans la base canonique, on calcule ses coordonnées dans cette base :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $f(\vec{u}_3)$ a pour coordonnées dans la base canonique $(4, 3, 2)$ et $f(\vec{u}_3) = (4, 3, 2) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$.

10. **Attention :** On n'utilise surtout pas ici la formule de changement de base (ce ne serait pas une déduction)

La base $\mathcal{C}$ est $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

Comme $f(\vec{u}_1) = 1\vec{u}_1$, ses coordonnées dans $\mathcal{C}$ sont donc $(1, 0, 0)$

De même $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$ et ses coordonnées dans $\mathcal{C}$ sont donc $(0, 2, 0)$

Et enfin on vient de voir que $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ qui a pour coordonnées dans $\mathcal{C}$: $(0, 1, 2)$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. D'après la formule de changement de base on a alors : $A = PTP^{-1}$.

12. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ il existe α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

— pour $n = 1$: $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha_1 = 1$, l'initialisation est vérifiée.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe α_n tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ alors

$$T^{n+1} = T \cdot T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$ la relation est bien vérifiée pour T^{n+1} .

— conclusion : pour tout entier $n \geq 1$ il existe α_n tel que : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ avec

$$\alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n.$$

13. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ $\alpha_n = n2^{n-1}$.

— pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$ donc l'initialisation est vérifiée.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ non nul et supposons que $\alpha_n = n2^{n-1}$ alors $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n2^{n-1} + 2^n = 2^n(n+1) = (n+1)2^{n+1-1}$. L'hérédité est vérifiée.

— Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$ $\alpha_n = n2^{n-1}$

Finalement pour $n = 0$ on a $A^0 = I$ et pour $n \geq 1$: $A^n = P T^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2^n & -2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & -1 + (n+1)2^n \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n & -1 + (n+2)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Matrices commutant avec A.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1. Montrons que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On vérifie les trois critères.

- $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par définition.

- La matrice nulle vérifie $0 \cdot A = 0 = A \cdot 0$ donc $0 \in C(A)$ et donc $C(A) \neq \emptyset$

- Soient M et N de $C(A)$ et x un réel alors

$$A(xM + N) \underset{\text{par opérations matricielles}}{=} xAM + AN \underset{M, N \in C(A)}{=} xMA + NA \underset{\text{par opérations matricielles}}{=} (xM + N)A$$

donc $xM + N \in C(A)$.

Finalement : $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$.

On a $M = PM'P^{-1}$, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P (qui sont inversibles d'où l'équivalence), on a :

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PTP^{-1}PM'P^{-1} = PM'P^{-1}PTP^{-1} \\ &\iff PTM'P^{-1} = PM'TP^{-1} \\ &\iff TM' = M'T \end{aligned}$$

3. On pose la matrice $M' = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ v & w & c \end{pmatrix}$. On calcule TM' et $M'T$ et on traduit l'égalité :

$$TM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ v & w & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 2z+u & 2b+v & w+2c \\ 2u & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

$$M'T = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2x & x+2y \\ z & 2b & b+2c \\ u & 2v & v+2w \end{pmatrix}$$

Donc $TM' = M'T$ équivaut au système de 9 équations :

$$\begin{cases} a = a & x = 2x & y = x + 2y \\ 2z + u = z & 2b + v = 2b & w + 2c = b + 2c \\ 2u = u & 2v = 2v & 2w = v + 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & x = 0 & y = -x \\ z = -u & v = 0 & w = b \\ u = 0 & 0 = 0 & v = 0 \end{cases} \text{ et par substitution}$$

$\Leftrightarrow x = y = z = u = v = 0$ et $w = b$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$)

Donc $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

4. Finalement M appartient à $C(A)$ si et seulement si $AM = MA$ si et seulement si $M = PM'P^{-1}$ avec M' donné ci dessus.

Donc $M \in C(A) \iff$

$$\begin{aligned} M &= PM'P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 2a & -a \\ b & -b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+2c+b \\ -a+b & 2a-b & -a+c+b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

5. On a donc une écriture paramétrée de $C(A)$:

$$\begin{aligned} C(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $C(A)$. Montrons qu'elle est libre.

Si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$ alors $\beta = 0$ (ligne 3 colonne 3) Donc $\alpha = 0$ (ligne 2 colonne 2) d'où $\gamma = 0$. et la famille est donc libre.

C'est donc une base de $C(A)$ qui est donc de dimension 3.

Exercice 11. exo 4-11 EDHEC 2014

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On fait une réduite de Gauss sur la matrice $A - \lambda I$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1}} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 53-27\lambda-9\lambda^2+\lambda^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On s'est ramené à une matrice triangulaire supérieure. Elle est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3 = 0$.

Par conséquent, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

(b) La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9).$$

Or, le trinôme $x^2 - 6x - 9$ a pour discriminant 72. Il a donc 2 racines réelles qui sont $\frac{6-\sqrt{72}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{72}}{2}$,

i.e $3-3\sqrt{2}$ et $3+3\sqrt{2}$. Donc $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty, 3-3\sqrt{2}] \cup [3+3\sqrt{2}, +\infty[$.

f est donc strictement croissante sur $] -\infty, 3-3\sqrt{2}]$ et sur $[3+3\sqrt{2}, +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $[3-3\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}]$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$3-3\sqrt{2}$	$3+3\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ M m $+\infty$				

(Les limites proviennent du fait que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$ et $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^3$)

(c) On a directement $f(0) = 53$ et $f(3) = -82$. De plus, la dérivée de f s'annulant en changeant de signes en $3-3\sqrt{2}$ et en $3+3\sqrt{2}$, f admet un maximum local M et un minimum local m .

Ensuite, puisque $3-3\sqrt{2} \leq 0 \leq 3 \leq 3+3\sqrt{2}$ et que la fonction f est strictement décroissante sur $[3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2}]$ (cf question précédente), on a :

$$f(3-3\sqrt{2}) \geq f(0) \geq f(3) \geq f(3+3\sqrt{2})$$

C'est-à-dire :

$$M \geq 53 \geq -82 \geq m$$

On en déduit en particulier : $M > 0$ et $m < 0$.

- (d) D'après la question 1.(b), la fonction f est continue et strictement croissante sur $] -\infty, 3 - 3\sqrt{2}[$.
D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $] -\infty, 3 - 3\sqrt{2}[$ sur $] -\infty, M[$.
Or, 0 appartient à $] -\infty, M[$ (d'après la question précédente).
Donc il existe un unique $\lambda_1 \in] -\infty, 3 - 3\sqrt{2}[$ tel que $f(\lambda_1) = 0$.
De même, étant donné que f est continue et strictement décroissante sur $[3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}]$ et que $0 \in [m, M]$, il existe un unique $\lambda_2 \in [3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}]$ tel que $f(\lambda_2) = 0$.
Enfin, toujours de la même manière, comme f est continue et strictement croissante sur $]3 + 3\sqrt{2}, +\infty[$ et que $0 \in]m, +\infty[$, il existe un unique $\lambda_3 \in]3 + 3\sqrt{2}, +\infty[$ tel que $f(\lambda_3) = 0$.
Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ a exactement 3 solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont λ_1, λ_2 et λ_3 .

D'après la question 1.(a), on en déduit que A admet 3 valeurs propres distinctes qui sont λ_1, λ_2 et λ_3 , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- (e) La matrice A est une matrice d'ordre 3, qui admet 3 valeurs propres distinctes.
Donc la dimension de chacun des 3 sous-espaces propres est 1, la famille obtenue en concaténant les bases de ces sous-espaces propres est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc A est diagonalisable. Et comme ses valeurs propres sont λ_1, λ_2 et λ_3 , on en déduit le résultat :

Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible formée de la base des vecteurs propres écrit en colonne telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On cherche à quelle condition N commute avec D :

$$\begin{aligned} ND = ND &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \lambda_3 a_{1,3} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \lambda_3 a_{2,3} \\ \lambda_1 a_{3,1} & \lambda_2 a_{3,2} & \lambda_3 a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \lambda_1 a_{1,3} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \lambda_2 a_{2,3} \\ \lambda_3 a_{3,1} & \lambda_3 a_{3,2} & \lambda_3 a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} = \lambda_1 a_{1,1} \\ \lambda_1 a_{2,1} = \lambda_2 a_{2,1} \\ \lambda_1 a_{3,1} = \lambda_3 a_{3,1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_2 a_{1,2} = \lambda_1 a_{1,2} \\ \lambda_2 a_{2,2} = \lambda_2 a_{2,2} \\ \lambda_2 a_{3,2} = \lambda_3 a_{3,2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_3 a_{1,3} = \lambda_1 a_{1,3} \\ \lambda_3 a_{2,3} = \lambda_2 a_{2,3} \\ \lambda_3 a_{3,3} = \lambda_3 a_{3,3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{2,1} = 0 \\ a_{3,1} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{1,2} = 0 \\ a_{3,2} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{1,3} = 0 \\ a_{2,3} = 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{car } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3 \text{ et } \lambda_2 \neq \lambda_3) \\ &\Leftrightarrow N \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

Conclusion : Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

- (b) On procède par équivalences successives :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \quad (\text{on multiplie à gauche par } P^{-1}) \\ &\Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \quad (\text{on multiplie à droite par } P) \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence :

$$M \in E \Leftrightarrow P^{-1}MP \text{ commute avec } D$$

(c) On reprend les équivalences ci-dessus :

$$M \in E \iff P^{-1}MP \text{ commute avec } D$$

$$\iff P^{-1}MP \text{ est diagonale (d'après la question 2.a)}$$

$$\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que :}$$

$$M = P \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$\iff \text{Il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que :}$$

$$M = \alpha P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \beta P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \gamma P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ce qui prouve le résultat suivant :

L'ensemble E est l'ensemble des combinaisons linéaires des 3 matrices

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} , \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} , \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(d) En notant E_1, E_2 et E_3 les trois matrices ci-dessus, on a donc $E = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3)$.

Par conséquent, E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrons que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 = 0$. Alors :

$$\alpha P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \beta P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \gamma P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

C'est-à-dire :

$$P \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1} = 0$$

Ou encore :

$$P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

Par conséquent, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = 0$$

D'où on déduit $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

La famille (E_1, E_2, E_3) est donc libre. Et comme c'est une famille génératrice de E , on en déduit que c'est une base de E .

Par conséquent, $\dim(E) = 3$.

(e) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un polynôme annulateur non nul de A (qu'on notera Q), de degré inférieur ou égal à 2. Comme Q est un polynôme annulateur de A , toute valeur propre de A doit être racine de Q . Donc Q admet au moins 3 racines distinctes (à savoir λ_1, λ_2 et λ_3), ce qui est absurde car un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 2 possède au maximum 2 racines.

Conclusion : Il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

Ceci prouve que la famille (I, A, A^2) est libre. En effet, soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0 &\iff \alpha + \beta X + \gamma X^2 \text{ est un polynôme annulateur de } A \\ &\text{de degré inférieur ou égal à 2} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{d'après ce qui précède}\end{aligned}$$

La famille (I, A, A^2) est donc une famille d'éléments de E (I , A et A^2 commutent avec A), qui est libre, et qui constituée de 3 éléments, 3 étant aussi la dimension de E .

On en déduit que (I, A, A^2) est une base de E .