

Histoire des mathématiques

C'est au XIX^{ème} siècle que le mathématicien prussien Hermann Grassmann (1809 – 1877) est amené à développer le calcul vectoriel dans le cadre de son étude... des marées !

En 1839, Grassmann rend sa thèse intitulée « Théorie des flots et des marées ». Ce travail, ignoré par son examinateur, ne sera publié qu'en 1911 alors qu'il contient des éléments de calcul vectoriel précurseurs pour l'époque, comme la somme de deux vecteurs ou le déterminant de trois vecteurs de l'espace.

En 1844, il publie sa « Théorie de l'extension » qui semble être la 1^{ère} publication dans le cadre nouveau de la théorie des espaces vectoriels. C'est dans cet ouvrage, passé presque aussi inaperçu que sa thèse, que Grassmann définit le produit linéaire, que nous appelons aujourd'hui produit scalaire. Le mot « scalaire » provient du latin « scala » qui signifie échelle.

Le produit scalaire est utilisé en chaudronnerie pour calculer un angle de tuyauterie ou un angle de coupe, mais aussi par les pilotes d'avion pour corriger la trajectoire en cas de vent latéral, même si de nombreux calculs sont automatisés dans les cockpits actuels. Les résultats issus du produit scalaire sont utilisés par les systèmes GPS ou encore pour estimer la distance entre deux astres.

Dans la suite du cours, nous nous placerons dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$ lorsque c'est nécessaire.

I Quelques rappels

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du repère. Alors, on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans le repère. On note la norme du vecteur \vec{u} , $\|\vec{u}\|$. Et, on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est la longueur du vecteur.

II Définition et propriétés du produit scalaire

2.1 Définition géométrique

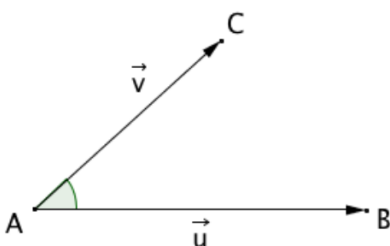
Définition Le produit scalaire d'un vecteur \vec{u} par un vecteur \vec{v} est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (se lit « \vec{u} scalaire \vec{v} »), défini par :

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Remarques 1) Par convention, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté \vec{u}^2 (appelé carré scalaire du vecteur \vec{u}). On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (c'est donc la longueur du vecteur \vec{u} au carré).

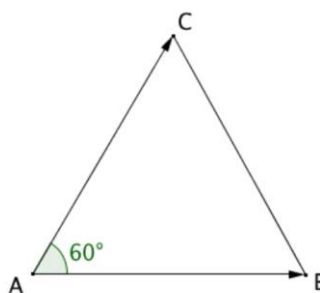
2) On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



Exemple Soit un triangle ABC équilatéral de côté a.

Alors, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = a \times a \times \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}.$$



Attention Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs. Soit λ un réel.

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

Exemple Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.

Alors, on a : $2\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 8 = -4$.

Définition Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Dire que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux signifie que, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente. Supposons le contraire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

\Leftrightarrow Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

2.3 Expression analytique du produit scalaire

Propriété On se place dans un repère orthonormé.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-9) = -\frac{1}{4} + 6 = \frac{23}{4}$.

III Produit scalaire et projeté orthogonal

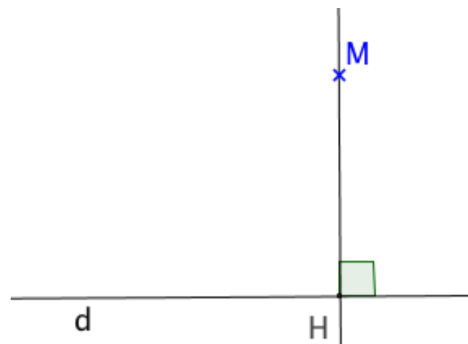
Propriété Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires et de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Définition Soit (d) une droite et M un point du plan.

Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M.

Figure



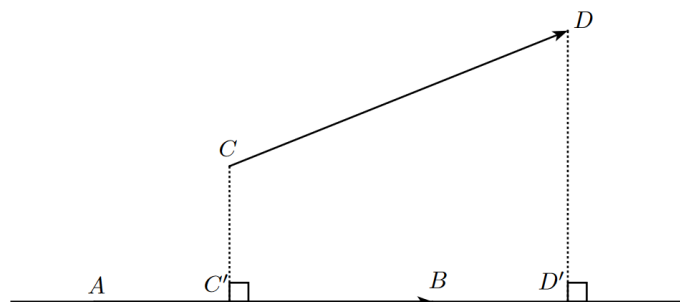
La propriété suivante permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, calcul en général plus aisé (d'après la propriété ci-dessus).

Propriété Soit \vec{AB} et \vec{CD} deux vecteurs non nuls.

Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectivement de C et de D sur la droite (AB).

Alors : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'} = \pm AB \times C'D'$.

Figure



Démonstration

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{D'D}$.

Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de \overrightarrow{CD} sur \overrightarrow{AB} .

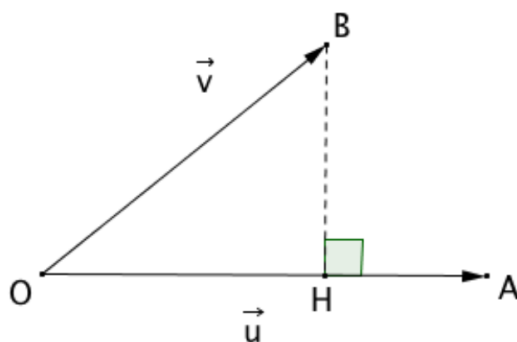
→ Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, on peut remplacer l'un des vecteurs \overrightarrow{AB} ou \overrightarrow{CD} par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

Propriété Cas particulier

Soit trois points A, B et O avec A, B distincts.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \pm OA \times OH$.

Figure



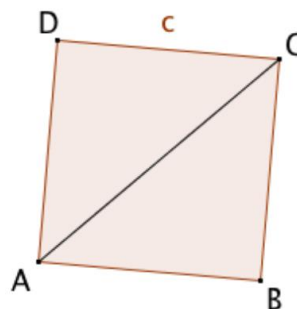
Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} \end{aligned}$$

Car $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HB}$.

Exemple Soit ABCD un carré.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = c^2.$$



Décomposition d'un vecteur selon deux axes orthogonaux

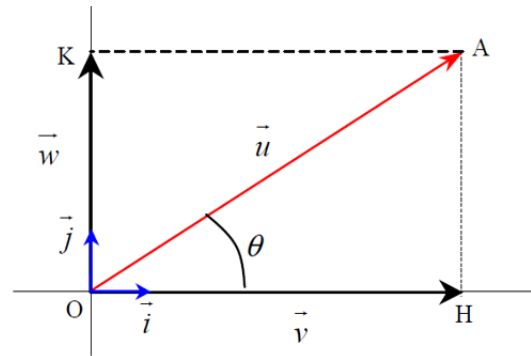
Le vecteur \vec{u} se décompose de manière unique sous la forme : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Où, \vec{v} et \vec{w} sont les projetés respectifs du vecteur \vec{u} sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

De plus, on a : $\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \cos(\theta)\vec{i}$ et

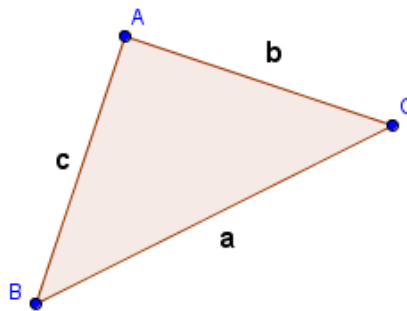
$\vec{w} = \|\vec{u}\| \times \sin(\theta)\vec{j}$.

En effet, on a : $OH = AO \times \cos(\theta)$ et

$OK = AB \times \sin(\theta)$.



IV Théorème d'Al-Kashi



Propriété Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec les notations ci-dessus, on a les relations suivantes :

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$(3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Démonstration

À l'aide du produit scalaire, c'est immédiat :

$$a^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \vec{AC} \cdot \vec{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Remarque Le théorème d'Al-Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore. En effet, si le triangle ABC est rectangle en A alors on a la relation suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos(90^\circ) = b^2 + c^2.$$

Intérêt de cette propriété sur un exemple

Soit ABC un triangle avec $b = 3$, $c = 8$ et $A = 60^\circ$.

Calculons la valeur exacte de a ainsi que B et C (en degrés à 10^{-1} près).

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 64 - 48 \times \frac{1}{2} = 49$$

D'où : $a = 7$

Déterminons $\cos B$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13}{14}$$

On a $\cos B > 0$ et ABC triangle donc $B \in]0 ; 90[$. On calcule donc $B = \arccos \frac{13}{14} \simeq 21,8^\circ$.

On peut calculer C avec la relation $A + B + C = 180$. Cependant, à titre de vérification, procédons comme précédemment : déterminons $\cos C$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{7}$$

On a cette fois $\cos C < 0$ et ABC triangle donc $C \in]90 ; 180[$. On calcule $C = \arccos \left(-\frac{1}{7}\right) \simeq 98,2^\circ$.

On vérifie bien $A + B + C = 180$.

Histoire des mathématiques – biographie d'Al-Kashi (? – Environ 1430)

D'origine persane, l'astronome et mathématicien Al-Kashi vit à la cour du prince Ulough-Beg (1393-1449) à Samarkand. Ce dernier protégeant les sciences et les arts, Al-Kashi est à l'abri du besoin. Son principal apport aux mathématiques est l'introduction systématique des fractions décimales (fractions ayant pour dénominateur 10, 100, 1000, ...), dont il explique le maniement dans son ouvrage Clé de l'arithmétique. A la mort d'Oulough-Beg, l'exil à Constantinople de l'école de Samarkand permet de diffuser cette nouveauté chez les turcs, puis probablement ensuite en Occident.

Al-Kashi maîtrise le calcul, on lui doit des extractions de racines sixièmes de nombres en écriture sexagésimale (système de numérotation utilisant la base 60), et un calcul de π avec seize décimales, par une méthode traditionnelle, certes, mais avec une précision inégalée jusqu'à la fin du seizième siècle. Il connaît ce que l'on appelle maintenant le *triangle de Pascal* (que vous verrez en terminale). Al-Kashi est le dernier grand mathématicien du monde arabe, juste au moment où la culture occidentale prendra la relève.

Devoir Surveillé
Produit Scalaire

Exercice 1:

(4 points)

1.1.

- a) On donne: $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$
Détailier le calcul et donner la valeur exacte de $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- b) On donne: $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$
Détailier le calcul et donner la valeur exacte de $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Exercice 2:

(6 points)

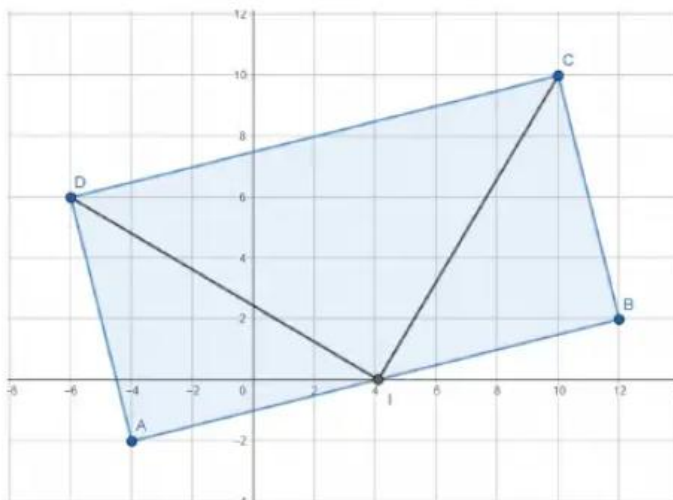
Soit dans un repère orthonormé

(O, \vec{i}, \vec{j}) et les points A , B , C et D représentés ci-dessous.

2.1. Calculer les coordonnées
des vecteurs \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{DA} .

2.2. Que pouvez-vous dire des longueurs
 AB et CD d'une part
 BC et DA d'autre part.
Justifier par le calcul

2.3. Que pouvez-vous dire de l'angle entre
 \vec{AB} et \vec{BC} ?
Justifier par le calcul.



2.4. Soit I le milieu de AB .

- a) Calculer les coordonnées de I
- b) En utilisant les propriétés du produit scalaire, que pouvez-vous dire des droites (DI) et (IC) ?
(Plusieurs étapes seront nécessaires...)

Exercice 3:

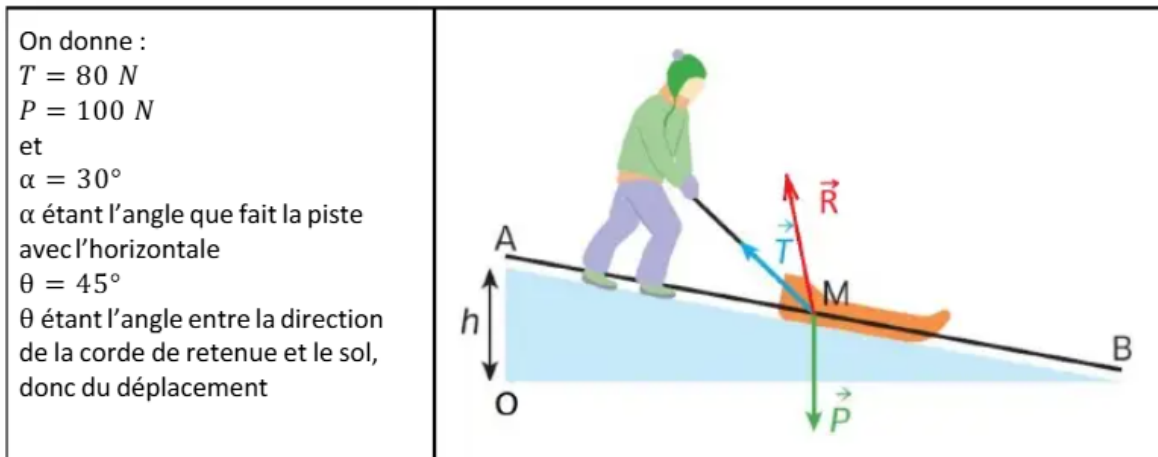
(5 points)

Le skieur du DS précédent a malheureusement fait une mauvaise chute ...

Un pisteur le descend sur une piste en retenant la "barquette" dans laquelle il est sécurisé.

La barquette est soumise à trois forces:

- son poids \vec{P} (y compris celui du skieur)
- la tension du câble \vec{T}
- la réaction du sol \vec{R} qui prend en compte les frottements sur le sol



On définit le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ (exprimée en $N \cdot m$) d'une force \vec{F} (exprimée en N) sur un déplacement de A à B (exprimée en m) comme le produit scalaire: $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$

3.1. Représenter schématiquement la situation en faisant figurer les angles α et θ .

(NB: on ne connaît pas l'angle que fait \vec{R} avec les autres directions du schéma, on indiquera donc une direction de \vec{R} approximative)

3.2. Calculer le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{T})$ exercé par la force exercée par le pisteur sur la corde de retenue pour effectuer une descente de A à B de $100m$ (c'est-à-dire $AB = 100m$).

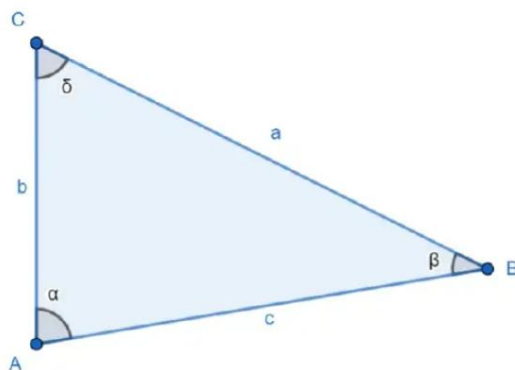
(Attention au signe!)

3.3. Calculer le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{P})$ pour cette même descente

Exercice 4:

(5 points)

Soit le triangle ABC ci-dessous :



4.1. Exprimer $\vec{BC} \cdot \vec{BC}$ en fonction de a

4.2. A partir de la relation de Chasles montrer que : $\vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$

4.3.

Vous admettez que $(\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$ peut se développer comme une expression de type $(a - b)(a - b)$ et donc que

$$(1) (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} - 2 \times \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

a) A partir de l'expression (1), montrer que :

$$(\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\alpha)$$

b) De la relation précédente et de celle que vous avez établi en 4.1, quelle relation pouvez-vous établir entre a^2 , b^2 , c^2 et $-2bc \times \cos(\alpha)$?

Comment s'appelle cette relation ?

c) Que devient cette relation si $\alpha = 90^\circ$?

Comment s'appelle cette nouvelle relation ?

Exercices supplémentaires

Ex 5

Dans chacun des cas suivants dire si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou non.

1. $A(1; 1), B(2; 3), C(2; -1)$ et $D(-2; 1)$;

2. $A(-3; 1), B(1; 4), C(0; 5)$ et $D(1; 1)$;

3. $A(2; 5), B(1; 2), C(5; 4)$ et $D(8; 3)$.

Ex 6

Quelle est la valeur de x pour que les vecteurs soient orthogonaux ? $\vec{u}(x; 4)$ et $\vec{v}(-2; x + 1)$

Ex 7

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1; 4), B(-3; -2)$ et $C(2; -5)$. On veut déterminer une valeur approchée de l'angle \widehat{BAC} .

1° a) Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

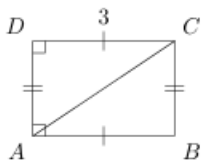
b) En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2° a) Exprimer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de $\cos(\widehat{BAC})$.

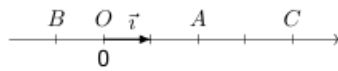
b) En déduire une mesure de l'angle \widehat{BAC} en degré au degré près.

Ex 8

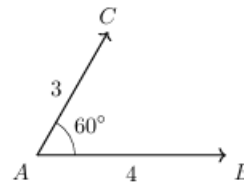
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



(a)



(b)

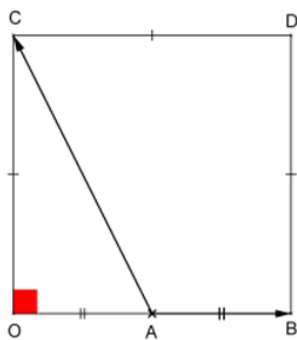


(c)

Exercice 9

Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

1) $OBDC$ est un carré de côté 5 et A est le milieu de OB .



2) ABC est un triangle isocèle en C , tel que $AB = 4$.



3) L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.

