

Exercice 1. Isomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $M^2 = 3M - 3I_2$.
4. En déduire sans calcul que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 2. Isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application S qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice :

$$S(M) = JMJ.$$

1. Montrer que S est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $S \circ S$. En déduire que S est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'isomorphisme réciproque ?
3. Déterminer la matrice de S dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On notera A cette matrice.
4. On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Déterminer la matrice de S dans la base (I, J, K, L) . On notera D cette matrice.

Exercice 3. Représentation matricielle dans différentes bases

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f .
2. On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$Q(X) = X, \quad R(X) = X^2 + 1, \quad S(X) = X^2 - 1$$

Montrer que (Q, R, S) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice M' de f dans cette base.

Exercice 4. Endomorphisme canoniquement associée à une matrice

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de u .
2. Calculer la matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de u .

Exercice 5. Endomorphisme canoniquement associée à une matrice (bis)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
3. Calculer M^2 et M^3 .
4. Déterminer $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Im}(u^2)$.
5. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$.
6. En déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.

Exercice 6. Matrices semblables

On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On suppose dans cet exercice que A et B sont semblables.

1. Montrer que

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow B \text{ est inversible.}$$

2. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = I \Leftrightarrow B^p = I.$$

3. On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$, montrer que

$$A \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow B \text{ est nilpotente.}$$

4. Montrer que

$$A = \lambda I \Rightarrow A = B.$$

Exercice 7. Rang de matrices

Calculer le rang des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -2m & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$